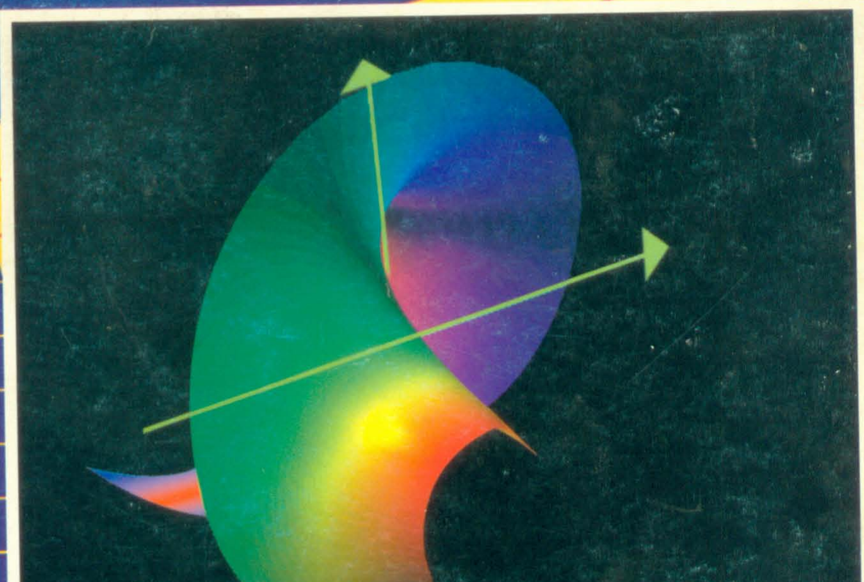
حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسهٔ تحلیلی

۲

«کتاب عام»

نوشتهٔ ریچارد ا. سیلورمن

ترجمهٔ دکتر علی اکبر عالم زاده



جلد دوم

روشهای انتگرالگیری [7]

فرمولهای انتگرالگیری ، که در فصلهای ۴ تا ۶ به دست آمدند ، اگرچه بسیارند ولی حوایج حساب دیفرانسیل و انتگرال عملی را کلا" برنمی‌آورند . لذا ، در فصل حاضر به مسئلهٔ محاسبهٔ انتگرالها ،هم نامعین و هم معین، شدیدا " حمله می‌کنیم . دوروش انتگرالگیری که از همه مهمترند عبارتنداز *انتگرالگیری* بوسیلهٔ *جانشانی* (ر.ک. بخش ۱.۷) و *انتگرالگیری جزء به جزء* (ر.ک. بخش ۲.۷) . این روشها ابراز اصلی بخشهای آتی ، که در آنها انتگرالهای مختلفی شامل توابع مثلثاتی و رادیکالها مطرح می‌شوند ، نیز می‌باشند . علاوه‌براین ، تکنیکی کلی برای انتگرالگیری از یک تابع گویای دلخواه وجود دارد که در بخش ۶.۷ داده خواهد شد .

ویژگی جالب این مبحث وجود انتگرالهای بسیاری است ، بعضی با صورت ساده ، که نمی‌توان آنها را " به شکل بسته " حساب کرد . مثلا" ، هیچیک از انتگرالهای

$$\int e^{-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int \cos x^2\,dx \tag{1}$$

را نمی‌توان با فرمول‌صریحی شامل تعدادی‌متناهی عمل‌جبری ،به‌انضمام‌ترکیب و ریشه‌گیری بر توابع که در فصول قبل بررسی‌شدند ،بیان کرد (هر تابع که قابل بیان باچنین فرمولی باشد *مقدماتی* نام دارد) .برای پرداختن به‌انتگرالهایی چون (۱) باید به روشهای‌تقریب بخش ۸.۷ پناه برد یا از سریهای نامتناهی استفاده کرد (ر.ک. فصل ۹) . همچنین، می‌توان این گونه انتگرالها را توابع " جدیدی" گرفت و آنها را ، همانطور که در مورد انتگرال $\int (1/x)\,dx$ معرف لگاریتم طبیعی کردیم ، مطالعه نمود .

مفهوم انتگرال را می‌توان تعمیم داد تا *انتگرالهای مجازی* را نیز دربرگیرد ؛ یعنی ، انتگرالهایی با انتگرالدههای بی‌کران وانتگرالهاروی بازه‌های بی‌کران . بخش ۹.۷ به این مبحث مهم اختصاص دارد .

۱۰۷ انتگرالگیری بهوسیلهٔ جانشانی

قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقگیری از یک‌تابع مرکب ما را به‌روش‌انتگرالگیری‌مهمی‌می‌رساند، به نام انتگرالگیری به وسیلهٔ **جانشانی** (یا انتگرالگیری به وسیلهٔ **تغییر متغیر**) ، که می‌توان از آن برای محاسبهٔ انتگرالهای نامعین و معین استفاده کرد . ابتدا به انتگرالهای نامعین می‌پردازیم .

قضیهٔ ۱ (محاسبهٔ انتگرال نامعین بهوسیلهٔ جانشانی) . فرض‌کنیم $f(u)$ *تابع پیوسته‌ای* بوده ، و $u = u(x)$ *تابعی با* مشتق پیوستهٔ $u'(x)$ *باشد* . در *این صورت* ،

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du\bigg|_{u=u(x)}, \qquad (۱)$$

که درآن *نماد* سمت‌*راست یعنی پس از محاسبهٔ‌انتگرال* $\int f(u)\,du$ جانشانی $u = u(x)$ صورت می‌گیرد.

برهان . برای اثبات تساوی دو انتگرال در (۱) ، فرض‌کنیم F یک پادمشتق f باشد ، که وجود F را پیوستگی f تضمین می‌کند (ر.ک. قضیهٔ ۵ ، ص ۴۰۵) . در این صورت ، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای ،

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x),$$

و درنتیجه ،

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int F'(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C, \qquad (۲)$$

که در آن C ثابت دلخواهی است . اما ، از آن سو ،

$$\int f(u)\,du\bigg|_{u=u(x)} = [F(u) + C]\bigg|_{u=u(x)} = F(u(x)) + C, \qquad (۲')$$

و مقایسهٔ (۲) و (۲') فورا" (۱) را نتیجه می‌دهد .

توجه کنیدکه عامل اضافی $u'(x)$ سمت چپ معادلهٔ (۱) در دیفرانسیل du سمت راست پنهان شده است ، زیرا $du = u'(x)\,dx$. حال می‌توان استفاده از نماد انتگرالها را درک کرد که در آن عبارت پس از علامت انتگرال به صورت حاصلضرب تابعی که انتگره می‌شود (انتگرالده) و **دیفرانسیل** متغیر انتگرالگیری نوشته می‌شود . در واقع ، اگر متغیر

انتگرالگیری تغییر کند ، دیفرانسیل خود بخود عمل قاعدهٔ زنجیره‌ای را می‌پذیرد . کار با دیفرانسیلها نقشی کلیدی در مثالهای زیر ایفا می‌کند .

مثال ۱ . $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = \sin x$. در این صورت ، $du = (D_x \sin x)\, dx = \cos x \, dx$ ، و

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 + C.$$

بنابراین ، پس از تعویض u با $\sin x$ ،

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

در اینجا ، مثل هر مسئلهٔ محاسبهٔ یک انتگرال نامعین ، امتحان نتیجهٔ کار باتحقیق‌اینکه مشتق جواب مساوی انتگرالده است فکر خوبی است (این کار را انجام دهید) . در این مثال توابع آمده در قضیهٔ ۱ عبارتنداز $f(u) = u^3$ و $u = \sin x$ ، و معادلهٔ (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du \Big|_{u = \sin x}$$

مثال ۲ . $\int \sin^3 x \, dx$ را حساب کنید .

حل . در مثال ۱ جانشانی مناسب $u = u(x)$ فورا" مشخص شد ، ولی در اینجا این‌انتخاب کمتر واضح است . ابتدا ممکن است اغوا شده همان جانشانی $u = \sin x$ را انجام دهیم ، ولی این انتخاب نامناسب است ، زیرا $du = \cos x \, dx$ و عاملی از $\cos x$ در انتگرال داده شده وجود ندارد . به جای این کار جانشانی $u = \cos x$ را انجام می‌دهیم . دراین‌صورت $du = (D_x \cos x)\, dx = -\sin x \, dx$ ، و انتگرالده قبلا" شامل $\sin x$ به‌عنوان عامل است ؛ درنتیجه ،

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (-\sin^2 x)\, du.$$

حال پیشرفت بیشتر به عبارت $-\sin^2 x$ برحسب متغیر u بستگی دارد . این کار به سهولت انجام می‌شود ، زیرا

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1 = u^2 - 1.$$

بنابراین،

$$\int \sin^3 x\, dx = \int (u^2 - 1)\, du = \frac{1}{3} u^3 - u + C,$$

که، پس از تعویض u با $\cos x$ ، نتیجه می‌دهد که

$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$$

در اینجا توابع قضیهٔ ۱ عبارتنداز $f(u) = u^2 - 1$ و $u = \cos x$ ، و معادلهٔ (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\int \sin^3 x\, dx = \int (u^2 - 1)\, du \Big|_{u=\cos x}$$

به محض گرفتن ایدهٔ انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی، می‌توان بعضی ازمراحل‌میانی حتی معرفی صریح متغیر کمکی u ، را حذف کرد. لذا، جواب فشرده‌تر مثال ۲ عبارت‌است از

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (-\sin^2 x)\, d(\cos x)$$
$$= \int (\cos^2 x - 1)\, d(\cos x) = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C,$$

که در آن تمام عبارت $\cos x$ متغیر انتگرالگیری گرفته شده است.

مثال ۳. $\int x\sqrt{2 + 3x}\, dx$ را حساب کنید.

حل. فرض‌کنیم $u = 2 + 3x$. دراین‌صورت، $x = \frac{1}{3}(u - 2)$ ، $du = 3\, dx, dx = \frac{1}{3} du,$ ؛ و درنتیجه،

$$\int x\sqrt{2 + 3x}\, dx = \frac{1}{9}\int (u - 2)\sqrt{u}\, du = \frac{1}{9}\int (u^{3/2} - 2u^{1/2})\, du$$
$$= \frac{2}{45} u^{5/2} - \frac{4}{27} u^{3/2} + C$$
$$= \frac{2}{45}(2 + 3x)^{5/2} - \frac{4}{27}(2 + 3x)^{3/2} + C.$$

این نتیجه را با مشتقگیری مستقیم از عبارت سمت راست تحقیق کنید .

مثال ۴. $\int \sec x\, dx$ را حساب کنید .

حل. با همان شیوه‌ای که به‌فرمول (۴) ، صفحهٔ ۴۹۸ ، برای انتگرال $\tan x$ منجر شد ، می‌توان‌دید که اگر $\sec x$ را به شکل زیر بنویسیم

$$\sec x = \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x},$$

صورت عبارت اخیر مشتق مخرج آن است. لذا ، با انتخاب $u = \sec x + \tan x$ ، داریم $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$ و درنتیجه ،

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

لذا ،

$$\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C. \tag{۳}$$

به‌طور معادل ، (۳) را می‌توان با قرار دادن $f(x) = \sec x + \tan x$ درفرمول

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C, \tag{۴}$$

که در صفحهٔ ۴۹۸ با مشتقگیری مستقیم از $\ln |f(x)|$ ثابت شد ، به دست آورد. به عنوان تمرین ، رابطهٔ (۴) را با جانشانی $u = f(x)$ تحقیق کنید .

حال مشابه قضیهٔ ۱ را برای انتگرالهای معین درنظر می‌گیریم .

قضیهٔ ′۱ (محاسبهٔ انتگرال معین به وسیلهٔ جانشانی) . *فرض‌کنیم $u = u(x)$ و $f(u)$ در شرایط قضیهٔ ۱ بر بازهٔ $a \le x \le b$ و بر بازهٔ $A \le u \le B$ که نقش $a \le x \le b$ تحت جانشانی $u = u(x)$ است صدق کنند . در این صورت ،*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, du.$$

برهان. فرض‌کنیم F یک پادمشتق f باشد . در این صورت ، طبق فرمول (۲) و دو کاربرد

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x))\Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

توجه کنید که فرض نکرده‌ایم $u = u(x)$ بر $[a, b]$ یکنواست؛ درنتیجه، رابطهٔ لازمی بین $u(a)$، $u(b)$ و A, B وجودندارد. از آن‌سو، جانشانیهای یکنوا متداولترین‌جانشانی‌اند، و در این صورت، اگر u بر $[a, b]$ صعودی باشد، $A = u(a)$ و $B = u(b)$، و اگر u بر $[a, b]$ نزولی باشد، $A = u(b)$ و $B = u(a)$.

مثال ۵. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ را حساب کنید.

حل. با جانشانی $u = u(x) = \ln x$، داریم $du = dx/x$. به‌علاوه، $u(1) = \ln 1 = 0$، $u(e) = \ln e = 1$. پس از قضیهٔ ۱۰ معلوم می‌شودکه

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \qquad (۵)$$

به صورت دیگر، چون

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C,$$

می‌توان با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشت

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2},$$

ولی این راه موءثر نیست، زیرا عملاً نیازی به برگشت از u به متغیر اصلی x نیست. در واقع، به محض محاسبه شدن انتگرال (۵)، اولین انتگرال نیز معلوم است، زیرا هر دو انتگرال معین، و لذا عدد، می‌باشند.

مثال ۶. با شروع از تعریف لگاریتم طبیعی

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

برهان دیگری برای فرمول

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (\text{مثبت } b \text{ و } a)$$

که قبلا" در قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۴۸۷، ثابت شد بیاورید.

حل. داریم

$$\ln b = \int_1^b \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{a\,dt}{at} = \int_a^{ab} \frac{du}{u},$$

که در آخرین مرحله به متغیر جدید $u = at$ رو آورده و تغییرات نظیر را درحدود انتگرال گیری انجام می‌دهیم. بنابراین، پس از بازگشت به متغیر انتگرالگیری (ظاهری) اصلی،

$$\ln b = \int_a^{ab} \frac{dt}{t},$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\ln ab = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \ln a + \ln b.$$

روش دیگر. تا اینجا، در اعمال روش انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی، در جستجوی یک جانشانی $u = u(x)$ و یک‌تابع $f(u)$ باانتگرال آسان‌بوده‌ایم به‌طوری‌که تابعی‌که می‌خواهیم انتگره کنیم (آن را $g(x)$ می‌نامیم) را بتوان به شکل

$$g(x) = f(u(x))u'(x) \tag{۶}$$

در آورد. زیرا در این صورت، طبق قضیهٔ ۱،

$$\int g(x)\,dx = \int f(u)\,du\Big|_{u=u(x)}, \tag{۷}$$

و، طبق قضیهٔ ۱′،

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du, \tag{۷′}$$

روش دیگر جانشانیی به شکل $x = x(u)$ مستقیما" در انتگرال $\int g(x)\,dx$ است. اگر $x(u)$ دارای مشتق پیوستهٔ $x'(u)$ باشد، درنتیجه بخصوص $dx = x'(u)\,du$، این جا نشانی $\int g(x)\,dx$ را به

$$\int g(x(u))x'(u)\,du = \int f(u)\,du$$

"تبدیل می‌کند"، که در آن

$$f(u) = g(x(u))x'(u), \tag{۸}$$

و اگر جانشانی $x = x(u)$ بدقت انتخاب شده باشد، تابع $f(u)$ را می‌توان به خلاف تابع

اصلی $g(x)$ به آسانی انتگره کرد .

اختیاری . بین این دو روش انتگرالگیری با جانشانی رابطهٔ سادهای وجود دارد . فرضکنیم $x = x(u)$ تابع یک به یکی با معکوس $u = u(x)$ باشد . در این صورت ، بنابر قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰ ، در باب مشتق یک تابع معکوس ،

$$u'(x) = \frac{1}{x'(u)}$$

(در اینجا فرض اضافی ناصفر بودن $x'(u)$ را میپذیریم) ؛ درنتیجه ،

$$x'(u) = \frac{1}{u'(x)}.$$

با گذاردن این عبارت $x'(u)$ در فرمول (۸) فورا" به فرمول (۶) ، و درنتیجه فرمولهای (۷) و (۷') ، میرسیم . لذا ، دو روش اساسا" یکی میباشند .

مثال ۷ . $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$ را به دو راه حساب کنید .

حل . باتوجه به اینکه $\sqrt{x}$ دوبار در انتگرالده ظاهر شده است ، جانشانی $u = \sqrt{x}$ را انجام میدهیم . در این صورت ،

$$du = d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

درنتیجه ، $dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du$. بنابراین ،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = 2\int \frac{u\,du}{u(1+u)} = 2\int \frac{du}{1+u} = 2\ln|1+u| + C,$$

یا ، پس از بازگشت به متغیر x ،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

عبارت $2\ln(1+\sqrt{x})$ را میتوانید ، در صورت تمایل ، با $\ln(1+\sqrt{x})^2$ عوض کنید .

به صورت دیگر ، ظاهرا" جانشانی $x = u^2$ (معکوس $u = \sqrt{x}$) انتخاب مناسبیاست زیرا رادیکال را از بین میبرد . با این جانشانی ، $dx = 2u\,du$ ، $\sqrt{x} = u$ ، و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = \int \frac{2u\,du}{u(1+u)} = 2\int \frac{du}{1+u},$$

که به همان نتیجهٔ قبل ختم می‌شود .

مسائل

انتگرالهای زیر را با استفاده از انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی حساب کنید .

۱. $\int (1-2x)^9\,dx$

۲. $\int (1+x^2)^{49}\,x\,dx$

۳. $\int \sqrt{4+5x}\,dx$

۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{\pi+2x}}$

۵. $\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}\,dx$

۶. $\int (x^2-4x+4)^{-5/3}\,dx$

۷. $\int x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

۸. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

۹. $\int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}\right)^{1/2} dx$

۱۰. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}$

۱۱. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

۱۲. $\int \cos^3 x \sin x\,dx$

۱۳. $\int \cos^3 x\,dx$

۱۴. $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

۱۵. $\int \sin^5 x\,dx$

۱۶. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

۱۷. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}\,dx$

۱۸. $\int \cos(\tan x)\sec^2 x\,dx$

۱۹. $\int x\sec x^2 \tan x^2\,dx$

۲۰. $\int \frac{\sec^2 x^{1/3}}{x^{2/3}}\,dx$

۲۱. $\int e^{x^2}\,x\,dx$

۲۲. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

۲۳. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

۲۴. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$

۲۵. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1}\,dx$

۲۶. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+e^{-\sqrt{x}})}$

۲۷. $\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx$

۲۸. $\int \frac{2^{x}}{4^{x}+1}\,dx$

۲۹. $\int \frac{2^{x}}{\sqrt{4^{x}+1}}\,dx$

۳۰. $\int x\cosh x^{2}\,dx$

۳۱. $\int \frac{\sinh\sqrt{x}\,\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

۳۲. $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{x^{2}+1}\,dx$

۳۳. $\int \frac{1}{x^{2}}\tan\frac{1}{x}\,dx$

۳۴. با استفاده از انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی، قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲، را تحقیق کنید که می‌گوید هرگاه F یک پادمشتق f باشد، آنگاه

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a \neq 0).$$

نشان دهید که

۳۵. $$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x+\cot x|+C = \ln|\csc x-\cot x|+C$$

۳۶. $$\int \csc x\,dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,$$
$$\int \sec x\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

۳۷. $$\int \sec x\,dx = \tanh^{-1}(\sin x)+C,$$
$$\int \csc x\,dx = -\tanh^{-1}(\cos x)+C$$

۳۸. $$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C,$$
$$\int \csc x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$$

۳۹. با استفاده از انتگرالگیری به‌وسیلهٔ جانشانی، نشان دهید که اگر f زوج باشد،

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ولی اگر f فرد باشد ،

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

و این قبلاً" در مسئلهٔ ۱ ، صفحهٔ ۴۱۵ ، به روشی دیگر ثابت شده است . فرض کنید f بر $[-a, a]$ پیوسته باشد .

۴۰ . به فرض آنکه f بر $[0, a]$ پیوسته باشد ، نشان دهید که

$$\int_{0}^{a} f(a-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۴۱ . $\int_{-1}^{1} (1+x^3)^7 x^2\,dx$

۴۲ . $\int_{0}^{2} s\sqrt{1+2s^2}\,ds$

۴۳ . $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1}\,dt$

۴۴ . $\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$

۴۵ . $\int_{1}^{3} \frac{ds}{\sqrt{s}\,(1+s)}$

۴۶ . $\int_{0}^{\pi} \cos^4 t \sin t\,dt$

۴۷ . $\int_{0}^{\pi/2} \cos^5 u\,du$

۴۸ . $\int_{1}^{e} \frac{dv}{v[1+(\ln v)^2]}$

۴۹ . $\int_{0}^{2} \frac{3^w}{3^w+1}\,dw$

۵۰ . $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x\,dx$

۵۱ . $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc x\,dx$

۵۲ . $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec x \csc x\,dx$

۵۳ . فرض کنید f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و متناوب با دورهٔ تناوب p باشد ؛ درنتیجه ، $f(x+p) \equiv f(x)$. فرمول

$$\int_{a}^{a+p} f(x)\,dx = \int_{0}^{p} f(x)\,dx \quad (\text{دلخواه } a)$$

را تحقیق کنید ، که نشان می‌دهد f بر هر بازه به طول p انتگرال یکسان دارد .

۵۴ . نشان دهید که

$$\int_{a}^{a+2\pi} \sin^3 x\,dx = 0 \quad (\text{دلخواه } a) .$$

۵۵. نشان دهید که

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln \frac{1+x}{1-x} \sin^{10} x \, dx = 0.$$

۵۶. با استفاده از مسئلهٔ ۴۰، نشان دهید هرگاه f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx.$$

۲.۷ انتگرالگیری جزء به جزء

حال روش مهم دیگری از انتگرالگیری را درنظر می‌گیریم که نتیجه‌ای است از قاعدهٔ حاصل ضرب برای مشتقگیری. فرض کنیم $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر با مشتقات پیوستهٔ $u'(x)$ و $v'(x)$ باشند. با مشتقگیری از حاصلضرب $u(x)v(x)$ نسبت به x، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

یا معادلاً

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x). \qquad (۱)$$

پس انتگرالگیری از طرفین (۱) نتیجه می‌دهد که

$$\int u(x)v'(x)\, dx = \int [u(x)v(x)]'\, dx - \int v(x)u'(x)\, dx.$$

اما

$$\int [u(x)v(x)]'\, dx = u(x)v(x) + C,$$

و درنتیجه،

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx, \qquad (۲)$$

که درآن می‌توان C را حذف‌کرد، زیرا در هریک‌از دوانتگرال نامعین یک ثابت‌انتگرالگیری وجود دارد. با معرفی دیفرانسیلهای

$$du = u'(x)\, dx, \qquad dv = v'(x)\, dx,$$

و حذف شناسهٔ توابع به خاطر سادگی، می‌توان (۲) به شکل فشردهٔ زیر نوشت:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۳)، به نام فرمول **انتگرالگیری جزء به جزء** ، یکی از با ارزش‌ترین تکنیکهای انتگرالگیری است که ، همانطور که امثلهٔ زیر نشان می‌دهند ، اغلب یک انتگرال مشکل را برحسب انتگرالهای آسانتر بیان می‌کند .

برای یافتن فرمول نظیر به انتگرالهای **معین** ، از طرفین (۱) نسبت به x از a تا b انتگرال می‌گیریم . از این نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

اما ، بنابر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ،

$$\int_a^b [u(x)v(x)]'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

و درنتیجه ،

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx, \qquad (۲')$$

یا ، به‌طور خلاصه‌تر ،

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du, \qquad (۳')$$

که در آن $uv|_a^b$ اختصاری است برای

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

توجه کنید که (۳') از (۳) با گذاردن حدود انتگرالگیری در انتگرالهای نامعین $\int u\,dv$ و $\int v\,du$ و تعویض تابع uv با تفاضل $uv|_a^b$ ، که البته عدد است ، به دست می‌آید .

مثال ۱ . $\int x \sin x\,dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = x, dv = \sin x\,dx$. پس $du = dx, v = -\cos x$ و درنتیجه ، بنابر (۳) ،

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C,$$

که در آن C ثابت انتگرالگیری دلخواه است .

انتخاب مناسب جزءها . در مثال ۱ $u = x$ را به جای $u = \sin x$ اختیار می‌کنیم ، زیــرا x برخلاف $\sin x$ با مشتقگیری ساده می‌شود . تمام نکتهٔ انتگرالگیری جزء به جزء این است که محاسبهٔ $\int v\,du$ باانتخاب "جزءهای" u و dv به‌طور مناسب از انتگرال $\int u\,dv$ آسانتر است ؛ اگر $u = \sin x, dv = x\,dx$ را انتخاب می‌کردیم ، آنگاه $du = \cos x\,dx, v = \frac{1}{2}x^2$ ، و فرمول (۳) ما را به

$$\int x \sin x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

می‌رساند ، که در آن انتگرال سمت راست از انتگرال اصلی سمت چپ مشکلتر است!

در انتگرالگیری جزء به جزء ، برای رفتن از dv به v لازم نیست ثابت انتگرالگیــری اضافی k را واردکنیم (لذا ،درمثال ۱به‌جــای $v = -\cos x + k$ نوشتیم $v = -\cos x$) . در واقع ، این منجر به جملاتی اضافی‌می‌شود که در تشکیل طرفهای‌راست (۳)و (۳') حذف می‌شوند . شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم (v را با $v + k$ عوض‌کرده و ببینید چه رخ می‌دهد) .

مثال ۲ . $\int \ln x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا انتخاب فوری عبارت است از $u = \ln x, dv = dx$ ، و این بی‌درنگ کار می‌کند . در واقــع ، $du = dx/x, v = x$ ، و (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

(و این در مسئلهٔ ۳۱ ، صفحهٔ ۴۹۵ ، پیش‌بینی شد) .

مثال ۳ . $\int x \ln x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا حالات مختلفی وجود دارند . مــی‌تــوان $u = x \ \ dv = \ln x\,dx$ یــا $u = \ln x, dv = x\,dx$ یا حتی $u = \ln x, dv = x\,dx$ را اختیار کرد . تنها انتخاب مناسب $u = x \ln x, dv = dx$ است، زیرا فقط این انتخاب است که $\int v\,du$ را ، با راحت شدن از لگاریتم ، از $\int u\,dv$ ســاده‌تــر می‌کند . در این صورت ، داریم $du = dx/x, v = \frac{1}{2}x^2$ ؛ و

درنتیجه، بنابر (۳)،

$$\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C. \qquad (۴)$$

به بیان معادل، با اختیار دیفرانسیل توابع می‌توان از معرفی صریح متغیرهای کمکی u و v احتراز کرد. لذا،

$$\int x \ln x\,dx = \int \ln x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,d(\ln x)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

که در آن توجه کنید که $d(\frac{1}{2}x^2) = x\,dx,\ d(\ln x) = dx/x$.

مثال ۴. $\int_1^e x \ln x\,dx$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از (۳′) با همان u و dv مثال ۳، داریم

$$\int_1^e x \ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

مثال ۵. $\int_0^1 \arctan x\,dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا تنها امید ما این است که انتخاب $u = \arctan x\ ,\ dv = dx$ مؤثر باشد، که هست. در واقع، داریم $du = dx/(x^2 + 1),\ v = x$ ، و (۳′) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_0^1 \arctan x\,dx = x \arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$
$$= \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

برای محاسبهٔ یک انتگرال، اغلب لازم است بیش از یکبار جزء به جزء انتگرالگیری کرد.

مثال ۶ . $\int x^2e^x\,dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = x^2, dv = e^x\,dx$. پس $du = 2x\,dx, v = e^x$ ، و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx. \tag{۵}$$

برای محاسبهٔ انتگرال سمت راست ، مجدداً ، با انتخاب $u = x, dv = e^x\,dx, du = dx, v = e^x$ جزء به جزء انتگرال می‌گیریم :

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + k \tag{۶}$$

(k دلخواه) . با گذاردن (۶) در (۵) ، خواهیم داشت

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

($C = -2k$ دلخواه) .

گاهی روش انتگرالگیری جزء به جزء به معادله‌ای ختم می‌شود که می‌توان آن را نسبت به انتگرال داده شده حل کرد .

مثال ۷ . $\int \sec^3 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $u = \sec x, dv = \sec^2 x\,dx$. پس $du = \sec x \tan x\,dx, v = \tan x$ ، و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\,dx.$$

چون $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ، این را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\,dx,$$

یعنی ،

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx,$$

که در آن انتگرال $\int \sec^3 x\,dx$ که می‌خواهیم آن را حساب کنیم سمت راست با علامت مخالف

ظاهر شده و می‌توان معادله را نسبت به آن حل کردا با این کار فورا " معلوم می‌شود که

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx.$$

با استفاده از فرمول مربوط به $\int \sec x\,dx$ که قبلا " در مثال۴ ، صفحهٔ ۵۹۵ ، به دست آمد ، بالاخره خواهیم داشت

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C. \tag{۷}$$

مثال ۸ . $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ $(ab \neq 0)$ را حساب کنید .

حل . ابتدا انتخاب می‌کنیم

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \cos bx\,dx, \qquad du = ae^{ax}\,dx, \qquad v = \frac{\sin bx}{b},$$

و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx. \tag{۸}$$

با آنکه انتگرال سمت راست به مشکلی انتگرالی است که می‌خواهیم حساب کنیم ،آن‌را جزء به جزء ، این بار با اختیار

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \sin bx\,dx, \qquad du = ae^{ax}\,dx, \qquad v = -\frac{\cos bx}{b}$$

انتگره می‌کنیم . درنتیجه ، خواهیم داشت

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx, \tag{۸'}$$

و با گذاردن (۸') در (۸) ، نتیجه می‌گیریم که

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

حال می‌توان معادله را نسبت به انتگرال $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ ، که سمت راست تکرارشده‌است، حل کرد و به دست آورد

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{b^2},$$

یا معادلا "

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2} + C, \qquad (۹)$$

که در آن C ثابت دلخواهی است[۱]. به همین نحو، با گذاردن (۸) در (۸') و حل معادلهٔ حاصل نسبت به $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ ، فرمول همتای

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C \qquad (۹')$$

را به دست می‌آوریم .

مسائل

انتگرالهای زیر را با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء حساب کنید .

۱. $\int x\cos x\,dx$

۲. $\int (x-1)\ln x\,dx$

۳. $\int x^2\ln x\,dx$

۴. $\int xe^{-2x}\,dx$

۵. $\int \arcsin x\,dx$

۶. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

۷. $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$

۸. $\int \sinh^{-1} x\,dx$

۹. $\int (\ln x)^2\,dx$

۱۰. $\int x3^x\,dx$

۱۱. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$

۱۲. $\int x^2\sin 2x\,dx$

۱۳. $\int \sin x\cos 2x\,dx$

۱۴. $\int x^5\ln x\,dx$

۱۵. $\int x^3\cos x\,dx$

۱۶. $\int x\csc^2 x\,dx$

---

۱. هر انتگرال نامعین فقط با تقریب ثابت انتگرالگیری دلخواهی تعریف شده است، و اغلب شایسته است که این ثابت را در آخر محاسبات "آورد" (یعنی، اضافه کرد).

۱۷. $\int x \operatorname{sech}^2 x\,dx$

۱۸. $\int x^2 \sinh x\,dx$

۱۹. $\int x\sqrt{2x+3}\,dx$

۲۰. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

۲۱. $\int \csc^3 x\,dx$

۲۲. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$

۲۳. $\int \sin(\ln x)\,dx$

۲۴. $\int x(x+1)^9\,dx$

۲۵. $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

۲۶. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$

۲۷. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx$

۲۸. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\,dx$

۲۹. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$

۳۰. $\int_1^2 x \log_2 x\,dx$

۳۱. $\int_1^e (\ln x)^3\,dx$

۳۲. $\int_0^{\pi/4} y \sec^2 y\,dy$

۳۳. $\int_{-1}^1 \arccos z\,dz$

۳۴. فرض کنید f دارای مشتق دوم پیوستهٔ f'' بر $[a, b]$ باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b xf''(x)\,dx = [bf'(b) - f(b)] - [af'(a) - f(a)].$$

مساحت A ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید.

۳۵. $y = \ln x$ و $y = (\ln x)^2$

۳۶. $y = x \ln x$ و $y = (4 \ln x)/x$

در هر حالت، ناحیهٔ R را رسم نمایید.

۳۷. فرض کنید توابع $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دارای مشتقات پیوستهٔ $u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n)}, v^{(n)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$ از هر مرتبه تا $n + 1$ باشند. نشان دهید که

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v\,dx. \qquad \text{(یک)}$$

۳۸. فرض کنید $u = u(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n بوده، و تابع $v = v(x)$ دارای مشتقات پیوستهٔ $v', v'', \ldots, v^{(n)}, v^{(n+1)}$ از تمام مراتب تا $n+1$ باشد. نشان دهید که

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + C. \qquad \text{(یکُ)}$$

با استفاده از این فرمول، $\int x^4 e^x\,dx$ و $\int x^5 \sin x\,dx$ را حساب کنید.

۳۹. نشان دهید

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx,$$

که در آن m و n اعداد صحیح‌مثبت‌دلخواهی می‌باشند. سپس این انتگرال‌را محاسبه نمایید.

۳۰۷ فرمولهای تحویل

با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء می‌توان *فرمولهای تحویل* را ثابت کرد؛ یعنی، فرمولهایی که در آنها انتگرالهای مستلزم توانهایی‌از یک‌عبارت برحسب‌انتگرالهای‌مستلزم توانهای پایین آن عبارت بیان شده‌اند.

مثال ۱. نشان دهید که

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx \qquad (n = 2, 3, \ldots). \qquad (۱)$$

حل. با اختیار $u = \sin^{n-1} x,\ dv = \sin x\,dx$، جزء به جزء انتگرال می‌گیریم. در این صورت، $du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos x\,dx,\ v = -\cos x$، و

$$\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx.$$

اما $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$؛ درنتیجه،

$$\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx,$$

که در آن جملهٔ آخر سمت راست شامل انتگرالی است که می‌خواهیم حساب کنیم. با بردن

این جمله به طرف چپ معادله و تلفیق دو جملهٔ شامل $\int \sin^n x\,dx$ ، فرمول زیر به‌دست می‌آید :

$$n\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx,$$

که با (۱) معادل است .

مثال ۲ . نشان دهید که

$$(۲)\quad \int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

حل . فرض‌کنیم $u = \cos^{n-1} x,\ dv = \cos x\,dx$ ،و جزء به‌جزء انتگرال می‌گیریم . جزئیات همانند مثال ۱ است ، و به عنوان تمرین گذارده می‌شود .

با کاربرد مکرر فرمولهای‌تحویل (۱) و (۲) ، می‌توان محاسبهٔ انتگرالهای $\int \sin^n x\,dx$ و $\int \cos^n x\,dx$ را به محاسبهٔ یکی از انتگرالهای آسان $\int dx$ ، $\int \sin x\,dx$ ، و $\int \cos x\,dx$ تحویل کرد .

مثال ۳ . $\int \sin^4 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در فرمول (۱) ابتدا $n = 4$ و سپس $n = 2$ را اختیار می‌کنیم ، به دست می‌آید

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$$

و

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int dx.$$

بنابراین ، پس از گذاردن به جای $\int \sin^2 x\,dx$ ،

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}\int dx$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + C.$$

مثال ۴. $\int \cos^5 x\,dx$ را حساب کنید.

حل. در فرمول (۲) ابتدا $n = 5$ و سپس $n = 3$ را اختیار می‌کنیم ،به‌دست می‌آوریم

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

و

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx.$$

بنابراین ، پس از گذاردن به جای $\int \cos^3 x\,dx$ ،

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\int \cos x\,dx\\ &= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + C.\end{aligned}$$

مثال ۵. نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \qquad (۳)$$

که در آن $n = 1, 2, \ldots$ و می‌توان فرض کرد $a > 0$.

حل. با انتخاب

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \qquad dv = dx, \qquad du = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx, \qquad v = x$$

انتگرال سمت *راست* را جزء به جزء انتگره می‌کنیم . این کار نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx.$$

اما $x^2 = (x^2+a^2) - a^2$ ؛ و درنتیجه ،

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx &= \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx\\ &= \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}.\end{aligned}$$

از تلفیق دو معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},$$

که با (۳) معادل می‌باشد.

با کاربرد مکرر فرمول تحویل (۳)، می‌توان محاسبهٔ انتگرال سمت چپ را به‌محاسبهٔ انتگرال معلوم

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \tag{۴}$$

تحویل کرد (ر.ک. ص ۴۷۰). لذا، با انتخاب $n = 1, 2, \ldots$ در فرمول (۳)، خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C, \tag{۵}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a} + C, \tag{۶}$$

و غیره. درواقع، ثابت C در (۵) $1/2a^2$ برابر ثابت C در (۴) است، ثابت C در (۶) $3/4a^2$ برابر ثابت C در (۵) است ولی لازم نیست آن را تصریح کنیم، زیرا هرکدام یک ثابت انتگرالگیری دلخواه است.

مسائل

فرمول تحویل داده شده را، که در آن n عدد صحیح مثبت دلخواهی است، تحقیق کنید.

۱. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

۲. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

۳. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

۴. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$

انتگرالهای زیر را با استفاده از یک فرمول تحویل حساب کنید .

۵ . $\int \cos^4 x\,dx$

۶ . $\int \sin^5 x\,dx$

۷ . $\int x^5 e^x\,dx$

۸ . $\int (\ln x)^3\,dx$

۹ . $\int x^4 \sin x\,dx$

۱۰ . $\int x^6 \cos x\,dx$

۱۱ . $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$

۱۲ . $\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^3}\,dx$

۱۳ . نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح زوج $n > 0$ ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{\pi}{2} \qquad (n = 2, 4, \ldots) \tag{یک}$$

لذا ، مثلا" ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

همچنین ، نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح فرد $n > 1$ ، بدون عاملی از $\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{n-1}{n} \qquad (n = 3, 5, \ldots), \tag{یکَ}$$

لذا ، مثلا" ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} = \frac{16}{35}.$$

۱۴ . با استفاده از مسئلهٔ ۵۶ ، صفحهٔ ۶۰۲ ، نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح نامنفی n ،

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱۵ . $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$

۱۶ . $\int_0^{\pi/2} \cos^{12} x\,dx$

۱۷ . $\int_0^{\pi/4} \sin^5 x \cos^5 x\,dx$

۱۸ . $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{14} t\,dt$

۱۹. $\int_0^{\pi} \sin^{15} u\, du$

۲۰. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^9 v\, dv$

۲۱. فرمول تحویل زیر را تحقیق کنید:

$$\int x^a (\ln x)^n\, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1}\, dx, \qquad \text{(دو)}$$

که در آن $a \neq -1$ و n عدد صحیح مثبت دلخواهی است.

تذکار. حالت $a = -1$ به آسانی اثبات می‌شود، زیرا

$$\int x^{-1} (\ln x)^n\, dx = \int (\ln x)^n\, d(\ln x) = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C.$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (دو) حساب کنید.

۲۲. $\int x^3 (\ln x)^2\, dx$

۲۳. $\int \sqrt{x} (\ln x)^3\, dx$

۲۴. $\int_1^e x (\ln x)^3\, dx$

۲۵. $\int_e^3 x^2 (\ln x)^2\, dx$

۲۶. فرمولهای تحویل زیر را تحقیق کنید:

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx,$$

$$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-1} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx,$$

که در آنها n عدد صحیح دلخواهی بزرگتر از 1 است.

۴.۷ انتگرالهای مثلثاتی

انتگرالدههای به شکل $\sin^p x \cos^q x$. انتگرالهایی که انتگرالده آنها ترکیبی از توابع مثلثاتی‌اند ***انتگرالهای مثلثاتی*** نام دارند، و چندتایی از آنها قبلاً در بخشهای قبل حساب شده‌اند. اکنون به حالتی می‌پردازیم که در آن انتگرالده حاصل‌ضربی از توانهای توابع مثلثاتی است. با انتگرال

$$\int \sin^p x \cos^q x\, dx,$$

مستلزم دو مؤلفهٔ p و q آغاز می‌کنیم. اگر یکی از نماهای p , q عدد صحیح فرد مثبتی باشد، یا هر دو نما اعداد صحیح زوج مثبتی باشند، محاسبهٔ انتگرال فوق آسان است. در

حالت اول ، از یکی از اتحادهای

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \tag{۱}$$

استفاده کرده ، انتگرالده را به شکل $f(\sin x) \cos x$ یا $f(\cos x) \sin x$ درمی‌آوریم و سپس انتگرال را می‌توان با جانشانی $u = \sin x$ یا $u = \cos x$ حساب کرد . در حالت‌دوم از اتحادهای

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \tag{۲}$$

چند بار استفاده کرده ، تمام توانهای بزرگتر از یک $\sin x$ و $\cos x$ را حذف می‌نماییم . مثالهای زیر این تکنیکها را توضیح می‌دهند .

مثال ۱ . $\int \sin^4 x \cos^7 x \, dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا $p = 4$، $q = 7$ ، و q یک عدد صحیح فرد مثبت است . عامل $\cos x$ را از $\cos^7 x$ جدا ، و سپس از دومین فرمول (۱) استفاده کرده ، عامل باقیماندهٔ $\cos^6 x$ را کاملا" برحسب $\sin x$ بیان می‌کنیم . این نتیجه می‌دهد که

$$\int \sin^4 x \cos^7 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^6 x \cos x \, dx$$
$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^3 \cos x \, dx.$$

حال انتگرالده به‌شکل $f(\sin x) \cos x$ است ؛ ودرنتیجه، جانشانی $u = \sin x, du = \cos x \, dx$ موءثر می‌باشد . به‌طور مشروح ،

$$\int \sin^4 x \cos^7 x \, dx = \int u^4(1 - u^2)^3 \, du = \int u^4(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) \, du$$
$$= \int (u^4 - 3u^6 + 3u^8 - u^{10}) \, du$$
$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{3}{7}u^7 + \frac{1}{3}u^9 - \frac{1}{11}u^{11} + C$$
$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{3}{7}\sin^7 x + \frac{1}{3}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + C.$$

مثال ۲. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $p = 5$, $q = -\frac{1}{2}$، و p عدد صحیح فرد مثبتی است. عامل $\sin x$ را از $\sin^5 x$ جدا کرده و سپس، با استفاده از فرمولهای (۱)، عامل باقیماندهٔ $\sin^4 x$ را کاملاً برحسب $\cos x$ بیان می‌کنیم. درنتیجه، خواهیم داشت

$$\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\sqrt{\cos x}} \sin x\, dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\sqrt{\cos x}} \sin x\, dx.$$

حال انتگرالده به‌شکل $f(\cos x) \sin x$ است؛ و درنتیجه، جانشانی $u = \cos x,\ du = -\sin x\, dx$ موءثر است. به‌طور مشروح،

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx &= -\int \frac{(1 - u^2)^2}{\sqrt{u}} du = -\int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{\sqrt{u}} du \\ &= -\int (u^{7/2} - 2u^{3/2} + u^{-1/2})\, du \\ &= -\frac{2}{9} u^{9/2} + \frac{4}{5} u^{5/2} - 2u^{1/2} + C \\ &= -\frac{2}{9} (\cos x)^{9/2} + \frac{4}{5} (\cos x)^{5/2} - 2(\cos x)^{1/2} + C.\end{aligned}$$

مثال ۳. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $p = 2$, $q = 4$، و هر دو نما اعداد صحیح زوج مثبتی هستند. بنابراین، نماهای $\sin^2 x$ و $\cos^4 x$ را با استفاده از فرمولهای (۲) پایین می‌آوریم، به صورت زیر:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2\, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x\, dx \\ &= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x\, dx. \qquad (۳)\end{aligned}$$

دو انتگرال اخیر کمی کار دارند . برای محاسبهٔ $\int \cos^2 2x\,dx$ ، مجدداً " از دومین فرمول (۲) استفاده می‌کنیم . از این نتیجه می‌شود که

$$(۴)\quad \int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x$$

(در آخر محاسبات ثابت انتگرالگیری اضافه خواهد شد) . چون انتگرال $\int \cos^3 2x\,dx$ شامل توان فرد مثبتی از $\cos x$ است ، می‌توان آن را به روش مثال ۱ حساب کرد . لذا ،

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int \cos^2 2x \cos 2x\,dx = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx,$$

و با جانشانی $u = \sin 2x,\ du = 2\cos 2x\,dx$ به دست می‌آوریم

$$(۵)\quad \int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^3 = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x.$$

با گذاردن (۴)و(۵) در (۳) و درج ثابت انتگرالگیری C ، پس از کمی عمل جبری داریم

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

به عنوان تمرین ، نشان دهید که این انتگرال را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\sin x \cos^3 x + \frac{1}{16}\sin^3 x \cos x + \frac{1}{6}\sin^3 x \cos^3 x + C,$$

که در آن سینوس و کسینوسهای سمت راست همه دارای شناسهٔ x می‌باشند .

انتگرالدهها به شکل $\tan^p x \sec^q x$. حال به انتگرال

$$\int \tan^p x \sec^q x\,dx,$$

مستلزم دو نمای p و q می‌پردازیم . محاسبهٔ این انتگرال وقتی p عدد صحیح فرد مثبت یا q عدد صحیح زوج مثبتی باشد آسان است . در حالت اول از اتحاد

$$(۶)\quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

استفاده کرده انتگرالده را به شکل $f(\sec x)\sec x \tan x$ درآورده ، و سپس با جانشانی $u = \sec x$ آن را حساب می‌کنیم . در حالت دوم ، از اتحاد

$$(۷)\quad \sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

استفاده کرده انتگرالده را به شکل $f(\tan x)\sec^2 x$ درمی‌آوریم ، و سپس آن را با جانشانی

$u = \tan x$ حساب می‌کنیم .

مثال ۴ . $\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا $p = \frac{1}{2},\ q = 4$ ، و q عدد صحیح زوج مثبتی است . عامل $\sec^2 x$ را از $\sec^4 x$ جدا کرده و ، با استفاده از فرمول (۷) ، عامل باقیماندهٔ $\sec^2 x$ را برحسب $\tan x$ بیان نمایید . این کار نتیجه می‌دهد که

$$\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\,dx = \int (\sqrt{\tan x}\sec^2 x)\sec^2 x\,dx$$
$$= \int \sqrt{\tan x}(\tan^2 x + 1)\sec^2 x\,dx.$$

با جانشانی $u = \tan x,\ du = \sec^2 x\,dx$ مآلا" خواهیم داشت

$$\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\,dx = \int \sqrt{u}(u^2 + 1)\,du = \int (u^{5/2} + u^{1/2})\,du$$
$$= \frac{2}{7}u^{7/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{7}(\tan x)^{7/2} + \frac{2}{3}(\tan x)^{3/2} + C.$$

مثال ۵ . $\int \tan^3 x\sec^5 x\,dx$ را حساب کنید .

حل . در اینجا $p = 3,\ q = 5$ ، و p عدد صحیح فرد مثبتی است ، ولی q عدد صحیح زوج مثبتی نیست . لذا ، شایسته است عامل $\sec x\tan x$ را از انتگرالده جدا کرده و ، با استفاده از فرمول (۶) ، عامل باقیمانده را کلا" برحسب $\sec x$ بیان کنیم . به‌طور مشروح ،

$$\int \tan^3 x\sec^5 x\,dx = \int \tan^2 x\sec^4 x(\sec x\tan x)\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)\sec^4 x(\sec x\tan x)\,dx$$
$$= \int (\sec^6 x - \sec^4 x)\sec x\tan x\,dx.$$

در این صورت ، جانشانی $u = \sec x,\ du = \sec x\tan x\,dx$ نتیجه می‌دهد که

$$\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx = \int (u^6 - u^4)\, du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C.$$

مثال ۶ . $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$ را حساب کنید .

حل . نکات فوق در اینجا به کار نمی‌آیند ، زیرا $p = 2$ زوج و $q = 3$ فرد است ،ولی ابزار محاسبهٔ انتگرال در دست ماست . ابتدا ملاحظه می‌کنیم که ، به کمک فرمول (۶) ،

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\, dx$$
$$= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx. \qquad (۸)$$

برای محاسبهٔ انتگرال $\int \sec^5 x\, dx$ ، با انتخاب $u = \sec^3 x,\ dv = \sec^2 x\, dx$ جزء به جزء انتگرالگیری می‌کنیم . در این صورت ،

$$du = 3\sec^3 x \tan x\, dx, \qquad v = \tan x,$$

و

$$\int \sec^5 x\, dx = \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx, \qquad (۹)$$

که در آن انتگرال مورد محاسبه مجددا " سمت راست ظاهر می‌شود با گذاردن (۹) در (۸) و حل نسبت به این انتگرال ، داریم

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \frac{1}{4}\int \sec^3 x\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \frac{1}{8}\sec x \tan x$$
$$-\frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C,$$

که در آخرین مرحله از مثال ۷ ، صفحهٔ ۶۰۶ ، استفاده کرده‌ایم . به عنوان تمرین ، همین جواب را با اعمال فرمول تحویل $\int \sec^n x\, dx$ داده شده درمسئلهٔ ۲۶ ، صفحهٔ ۶۱۵ ، به دست آورید .

به‌خاطر توازی موجود بین خواص توابع $\sec x$، $\tan x$ و نیز بین $\csc x$، $\cot x$، اساسا" همین تکنیکها را می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int \cot^p x \csc^q x \, dx,$$

به کمک فرمولهای

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1, \qquad (۶')$$

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1 \qquad (۷')$$

به کار برد.

مثال ۷. $\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx$ را حساب کنید.

حل. داریم

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx &= \int \cot^2 x \csc^2 x (\csc x \cot x) \, dx \\
&= -\int (\csc^2 - 1) \csc^2 x \, d(\csc x) \\
&= -\int (\csc^4 x - \csc^2 x) \, d(\csc x) \\
&= -\frac{1}{5} \csc^5 x + \frac{1}{3} \csc^3 x + C,
\end{aligned}$$

که در آن تمام عبارت $\csc x$ را متغیر انتگرالگیری گرفته، بدین وسیله از جانشانی صریح $u = \csc x$ احتراز نموده‌ایم.

انتگرالگیری از حاصلضرب سینوسها و کسینوسها با شناسه‌های مختلف

انتگرالهای مثلثاتی

$$\int \sin ax \cos bx \, dx, \qquad \int \cos ax \cos bx \, dx, \qquad \int \sin ax \sin bx \, dx$$

در مسائل کار بستهٔ مربوط به پدیده‌های نوسانی، مانند ارتعاشات مکانیکی و امواج رادیویی، مکرر ظاهر می‌شوند. برای محاسبهٔ انتگرالهای از این نوع، اتحادهای مثلثاتی زیر را به

کار می‌گیریم :

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

که فورا" از قوانین جمع برای توابع سینوس و کسینوس نتیجه می‌شوند (ر.ک.ص ۹۵) .

مثال ۸ . $\int \sin 2x \cos 5x\, dx$ را حساب کنید .

حل . به کمک اولین اتحاد فوق داریم

$$\int \sin 2x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(2+5)x + \sin(2-5)x]\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x\, dx$$
$$= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱ . $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$ ✓

۲ . $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$ ✓

۳ . $\int \sin^3 4x \cos^2 4x\, dx$ ✓

۴ . $\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx$

۵ . $\int \sin^7 x \sqrt{\cos x}\, dx$ ✓

۶ . $\int (\sin x)^{2/3} \cos^5 x\, dx$ ✓

۷ . $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx$ ✓

۸ . $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$ ✓

۹ . $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ ✓

۱۰ . $\int_0^{\pi/6} \sin^3 s \cos^3 s\, ds$ ✓

۱۱. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^4 t\, dt$

۱۲. $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos^5 u}{\sin^4 u}\, du$

۱۳. $\int \tan^3 2x \sec 2x\, dx$

۱۴. $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$

۱۵. $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$

۱۶. $\int \tan^3 x\, dx$

۱۷. $\int \cot^2 x \csc^4 x\, dx$

۱۸. $\int \sec^4 x\, dx$

۱۹. $\int \tan^4 3x\, dx$

۲۰. $\int \cot^3 x \csc x\, dx$

۲۱. $\int \cot^3 x\, dx$

۲۲. $\int_0^{\pi/4} (\tan s)^{3/2} \sec^4 s\, ds$

۲۳. $\int_0^{\pi/3} \tan^3 t \sec t\, dt$

۲۴. $\int_{1/6}^{5/6} \cot^2 \pi u \csc^2 \pi u\, du$

۲۵. $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$

۲۶. $\int \cos 4x \cos 5x\, dx$

۲۷. $\int \sin 3x \sin 6x\, dx$

۲۸. $\int \sin \pi x \cos 2\pi x\, dx$

۲۹. $\int \cos \frac{2x}{3} \cos \frac{x}{3}\, dx$

۳۰. $\int \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2}\, dx$

۳۱. $\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 4x\, dx$

۳۲. $\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin 6y \sin 9y\, dy$

۳۳. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2z \cos 4z\, dz$

۳۴. فرض کنید m و n اعداد صحیح ناصفر دلخواهی باشند. فرمولهای زیر را که در ریاضیات کار بسته اهمیت زیادی دارند تحقیق کنید:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 \text{، اگر } m \neq n \\ \pi \text{، اگر } m = n \end{cases}$$

نشان دهید که این فرمولها در اثر تعویض حدود انتگرالگیری $0, 2\pi$ با $-\pi, \pi$ نیز برقرارند.

۵.۷ جانشانیهای مثلثاتی و هذلولوی

مثالهای زیر ما را با نوع جانشانیهای این بخش آشنا می‌سازند.

مثال ۱. انتگرال نامعین

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (a > 0)$$

را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $x = a \sin u$، که در آن $-\pi/2 \le u \le \pi/2$. پس $dx = a \cos u\, du$، و

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\sqrt{\cos^2 u} = a \cos u,$$

زیرا $\cos u$ به ازای مقادیر داده شده از u نامنفی است. بنابراین،

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 u\, du.$$

اما

$$\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\int (\cos 2u + 1)\, du = \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{2}u + k$$
$$= \frac{1}{2}\sin u \cos u + \frac{1}{2}u + k,$$

که در آن k ثابت انتگرالگیری دلخواهی است؛ درنتیجه،

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}a^2 \sin u \cos u + \frac{1}{2}a^2 u + C, \qquad (۱)$$

که در آن ثابت $C = a^2 k$ نیز دلخواه است. به‌علاوه،

$$\sin u = \frac{x}{a}, \qquad u = \arcsin\frac{x}{a},$$

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

و با گذاردن این عبــارات $\sin u$ ، $\cos u$ ، و u در (۱) ، مآلا" خواهیم داشت

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+C. \qquad (۲)$$

جالب است که از طرف راست (۲) مشتق گرفته و دید که چگونه سه جملهٔ حاصل تلفیق و $\sqrt{a^2-x^2}$ تشکیل می‌شود .

مثال ۲ . انتگرال معین

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (۳)$$

حساب کنید .

حل . از رابطهٔ (۲) معلوم می‌شود که

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^2\arcsin 1=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi a^2$$

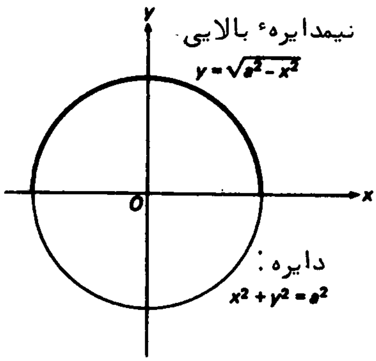
(در مرحلهٔ دوم معلوم می‌شود که سه جمله صفرند) . همچنین ، می‌توان (۳) را مستقیما" بدون محاسبهٔ انتگرال نامعین (۲) حساب کرد . در واقع ، باهمان‌جانشانی $x=a\sin u$ $(-\pi/2\le u\le\pi/2)$ مثـــال ۱ و توجه به اینکه $x=0$ ایجاب می‌کند که $u=0$ در حالی که $x=a$ ایجاب می‌کند که $u=\pi/2$ (جانشانی یک به یک است) ، به دست می‌آوریم

$$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\left[\frac{1}{4}\sin 2u+\frac{1}{2}u\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}\pi a^2.$$

راه حتی ساده‌تر برای‌محاسبهٔ انتگرال (۳)تشخیص این است که (۳) مساحت تحت منحنی $y=\sqrt{a^2-x^2}$ درربع اول و مساوی‌یکچهارم مساحت A ی محصور به‌دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ به شعاع a و مرکز مبداء است (ر.ک. شکل۱) . اما $A=\pi a^2$ ؛ و لذا ، انتــگرال مسـاوی $\frac{1}{4}\pi a^2$ می‌باشد .

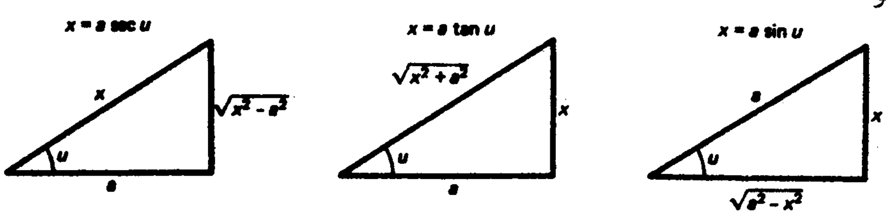
جانشانیهای $x=a\sin u$ ، $x=\tan u$ ، و $x=a\sec u$. به‌طورکلی ، هر انتگرال شامل یکی از عبارات گنگ

$$\sqrt{a^2-x^2},\qquad\sqrt{x^2+a^2},\qquad\sqrt{x^2-a^2}\qquad(a>0) \qquad (۴)$$



شکل ۱

را غالبا" می‌توان با یک *جانشانی مثلثاتی*، یعنی جانشانی $x = x(u)$ شامل یک تابع مثلثاتی، حساب کرد. شکل ۲ جانشانیهای مناسب این سه حالت را نشان می‌دهد. توجه کنید که در هر قسمت شکل، x و a طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، و طول ضلع دیگر یکی از عبارات فوق است، و متغیر جدید u یکی از زوایای مثلث (به رادیان) است. در هر مثلث $0 < u < \pi/2$ ،ولی جانشانیهای مذکور به ازای مقادیر دیگری از u نیز کارسازند (ر.ک. زیر). پس از آنکه انتگرال داده شده برحسب متغیر جدید u حساب شد، همان مثلث جانشانیهای لازم برای بازگشت به متغیر اصلی x را پیشنهاد می‌کند. در اینجا فرض می‌کنیم جانشانی $x = x(u)$ یک به یک است، و این با تجدید مناسب مقادیر u تضمین خواهد شد.



(پ) (ب) (آ)

شکل ۲

مثلثهای شکل ۲ راه مناسبی برای به‌خاطر آوردن اطلاعات مفصلتر زیرند.

(یک) در یک انتگرال شامل $\sqrt{a^2 - x^2}$ جانشانی $x = a \sin u$ را انجام دهید که در آن $-\pi/2 \le u \le \pi/2$. در این صورت، $dx = a \cos u\, du$، و

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\sqrt{\cos^2 u} = a \cos u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\cos u \geq 0$.اگر عبارت $\sqrt{a^2 - x^2}$ در مخرج انتگرالده ظاهر شود ، باید u را به بازهٔ باز $-\pi/2 < u < \pi/2$ تحدید کنیم ، زیرا به‌ازای $u = \pm\pi/2$ ، $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos u$ مساوی صفر است .

(دو) در یک انتگرال شامل $\sqrt{x^2 + a^2}$ جانشانی $x = a\tan u$ را انجام دهید ، که‌در آن $-\pi/2 < u < \pi/2$ (توجه کنید که $\tan u$ به ازای $u = \pm\pi/2$ تعریف نشده است) . در این صورت ، $dx = a\sec^2 u\, du$ ، و

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 u + a^2} = a\sqrt{\tan^2 u + 1} = a\sqrt{\sec^2 u} = a\sec u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\sec u \geq 0$.

(سه) در یک انتگرال شامل $\sqrt{x^2 - a^2}$ جانشانی $x = a\sec u$ را انجام دهید که در آن $0 \leq u < \pi/2$ (توجه کنید که $\sec u$ به ازای $u = \pi/2$ تعریف نشده است) . در این صورت ، $dx = a\sec u \tan u\, du$ ، و

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 u - a^2} = a\sqrt{\sec^2 u - 1} = a\sqrt{\tan^2 u} = a\tan u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\tan u \geq 0$. همچنین ، u می‌تواند مقادیر $\pi/2 < u \leq \pi$ را بگیرد ، ولی در این صورت ، $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\tan^2 u} = -a\tan u$ ، زیرا به ازای این مقادیر u ، $\tan u \leq 0$.اگر عبارت $\sqrt{x^2 - a^2}$ در مخرج انتگرالده ظاهرشود ،باید مقادیر $u = 0$ و $u = \pi$ را مستثنی‌کنیم ،زیرا $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan u$ به ازای این مقادیر u مساوی صفر است .

باید توجه داشت‌که در هر حالت‌مقادیر u چنان محدود شده‌اند که تابع $x = x(u)$ یک به یک است . لذا ، در (یک) تابع $x = a\sin u$ درصورتی یک به یک با معکوس $u = \arcsin(x/a)$ است که $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ ، در (دو) تابع $x = a\tan u$ درصورتی یک به یک با معکوس $u = \arctan(x/a)$ است که $-\pi/2 < u < \pi/2$ ، و در (سه) تابع $x = a\sec u$ درصورتی یک به یک با معکوس $u = \operatorname{arcsec}(x/a)$ است که $0 \leq u < \pi/2$ یا $\pi/2 < u \leq \pi$.

جانشانیهای $x = a\sinh u$ و $x = a\cosh u$. اولین عبارت (۴) را می‌توان با جا نشانی $x = a\cos u$ ،دومین عبارت‌رابا $x = a\cot u$ ،و سومین عبارت را با $x = a\csc u$ نیز ساده کرد (این حکم را ثابت کنید) . اما این جانشانیها زایدند ، زیرا هرکاری‌که‌اینها بتوانند انجام دهند را می‌توان ساده‌تر با جانشانیهای $x = a\sin u$ ، $x = a\tan u$ ،و

$x = a\sec u$ صورت داد . آنچه جالبتر است جانشانیهای هذلولوی $x = a\sinh u$ و $x = a\cosh u$ هستند ، که در ساده‌کردن عبارات $\sqrt{x^2+a^2}$ و $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$ به خوبی جانشانیهای مثلثاتی $x = a\tan u$ و $x = a\sec u$ می‌باشند . در واقع ، هرگاه $x = a\sinh u$ که در آن $-\infty < u < \infty$ ، آنگاه $dx = a\cosh u\,du$ ، و

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\sinh^2 u + a^2} = a\sqrt{\sinh^2 u + 1} = a\sqrt{\cosh^2 u} = a\cosh u,$$

زیرا $\cosh u > 0$ ، حال آنکه اگر $x = a\cosh u$ که در آن $0 \le u < \infty$ ، داریم $dx = a\sinh u\,du$ ، و

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2 u - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 u - 1} = a\sqrt{\sinh^2 u} = a\sinh u,$$

چرا که اگر u نامنفی باشد ، $\sinh u \ge 0$.

مثال ۳. انتگرال زیر را با استفاده از جانشانی هذلولوی حساب کنید :

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \qquad (a>0)$$

حل. فرض کنیم $x = a\sinh u$ ؛ درنتیجه ، $dx = a\cosh u$ ، $\sqrt{x^2+a^2} = a\cosh u$ ، و

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = a^2\int \cosh^2 u\,du.$$

اما

$$\int \cosh^2 u\,du = \frac{1}{2}\int (\cosh 2u + 1)\,du = \frac{1}{4}\sinh 2u + \frac{1}{2}u + C,$$

و لذا ،

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}a^2\sinh u\cosh u + \frac{1}{2}a^2 u + C, \qquad (۵)$$

زیرا $\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u$. به‌علاوه ،

$$\sinh u = \frac{x}{a}, \qquad u = \sinh^{-1}\frac{x}{a},$$

$$\cosh u = \sqrt{\sinh^2 u + 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}.$$

با گذاردن این عبارات به جای $\sinh u$ ، $\cosh u$ ،و u در (۵) ،مآلا" خواهیم داشت

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C. \tag{۶}$$

تشابه بین فرمولهای (۲) و (۶) قابل توجه است . با استفاده از فرمول (۳')، صفحهٔ ۵۷۴، می‌توان (۶) را ، پس از جذب $-\frac{1}{2}a^2 \ln a$ در ثابت انتگرالگیری دلخواه C ، به شکل معادل زیر نوشت :

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C. \tag{۶'}$$

مثال ۴. مثال ۳ را با جانشانی *مثلثاتی* حل کنید .

حل . فرض کنیم $x = a \tan u, dx = a \sec^2 u\, du$ ؛ درنتیجه ، $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec u$ ، و ، به کمک مثال ۷ ، صفحهٔ ۶۰۶ ،

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = a^2 \int \sec^3 u\, du$$
$$= \frac{1}{2} a^2 \sec u \tan u + \frac{1}{2} a^2 \ln |\sec u + \tan u| + C.$$

باتوجه به شکل ۲ (ب) ، که در آن $\tan u = x/a$ ، معلوم می‌شود که

$$\sec u = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

بنابراین ،

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left|\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

و مجددا" ، پس از جذب $-\frac{1}{2}a^2 \ln a$ در C ، رابطهٔ (۶') را خواهیم داشت . (چرا حذف علامت قدرمطلق مجاز است ؟)

مثال ۵ . $\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^{3/2}}$ را حساب کنید .

حل . این بار فرض می‌کنیم $x = \frac{2}{3}\tan u$ ؛ درنتیجه ، $dx = \frac{2}{3}\sec^2 u\,du$ ، و

$$(9x^2 + 4)^{3/2} = (4\tan^2 u + 4)^{3/2} = 8\sec^3 u.$$

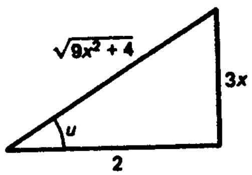
در این صورت ،

$$\int \frac{dx}{(9x^2+4)^{3/2}} = \int \frac{\frac{2}{3}\sec^2 u}{8\sec^3 u}\,du = \frac{1}{12}\int \frac{du}{\sec u}$$

$$= \frac{1}{12}\int \cos u\,du = \frac{1}{12}\sin u + C.$$

معاینهٔ شکل ۳ ، که در آن $\tan u = 3x/2$ ، نشان می‌دهد که

$$\sin u = \frac{3x}{\sqrt{9x^2+4}}.$$



شکل ۳

بنابراین ،

$$\int \frac{dx}{(9x^2+4)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{9x^2+4}} + C.$$

به عنوان تمرین ، نشان دهید که جانشانی هذلولوی $x = \frac{2}{3}\sinh u$ به همین جواب ختم می‌شود .

مثال ۶ . انتگرال

$$\int \frac{dx}{(16x^2 - 25)^{3/2}} \qquad (۷)$$

را حساب کنید .

حل . فرض کنیم $x = \frac{5}{4}\sec u$ $(0 < u < \pi/2)$ ؛ درنتیجه ، $dx = \frac{5}{4}\sec u\tan u\,du$ ، و

$$(16x^2 - 25)^{3/2} = (25\sec^2 u - 25)^{3/2} = 125\tan^3 u.$$

در این صورت،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = \int \frac{\frac{5}{4}\sec u \tan u}{125\tan^3 u}\,du = \frac{1}{100}\int \frac{du}{\cos u \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}}$$

$$= \frac{1}{100}\int \frac{1}{\sin u}\frac{\cos u}{\sin u}\,du = \frac{1}{100}\int \csc u \cot u\,du$$

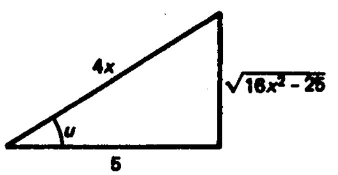
$$= -\frac{1}{100}\csc u + C.$$

با توسل به شکل ۴، که در آن $\sec u = 4x/5$ ، معلوم می‌شود که

$$\csc u = \frac{4x}{\sqrt{16x^2-25}},$$

و لذا،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = -\frac{1}{25}\frac{x}{\sqrt{16x^2-25}} + C,$$



شکل ۴

مشروط براینکه $x > \frac{5}{4}$. به‌عنوان تمرین، نشان دهید که همین فرمول به ازای $x < -\frac{5}{4}$ برقرار است.

مثال ۷. مثال ۶ را با جانشانی هذلولوی حل کنید.

حل. فرض کنیم $x = \frac{5}{4}\cosh u$ $(0 \le u < \infty)$؛ درنتیجه، $dx = \frac{5}{4}\sinh u\,du$ ، و

$$(16x^2-25)^{3/2} = (25\cosh^2 u - 25)^{3/2} = 125\sinh^3 u.$$

در این صورت،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = \int \frac{\frac{5}{4}\sinh u}{125\sinh^3 u}\, du = \frac{1}{100}\int \frac{du}{\sinh^2 u}$$
$$= \frac{1}{100}\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\frac{1}{100}\coth u + C$$
$$= -\frac{1}{100}\frac{\cosh u}{\sinh u} + C.$$

اما

$$\cosh u = \frac{4x}{5}, \qquad \sinh u = \frac{\sqrt{16x^2-25}}{5},$$

و درنتیجه ، مثل قبل ،

$$\int \frac{dx}{(16x^2-25)^{3/2}} = -\frac{1}{100}\frac{4x}{5}\frac{5}{\sqrt{16x^2-25}} + C = -\frac{1}{25}\frac{x}{\sqrt{16x^2-25}} + C.$$

این حالت $x > \frac{5}{4}$ را سامان می‌دهد ،وحالت $x < -\frac{5}{4}$ را می‌توان‌باجانشانی $x = -\frac{5}{4}\cosh u$ سامان داد (بیشتر توضیح دهید) .

مثال ۸ . $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ را حساب کنید .

حل . در اینجا زیر رادیکال توان اول x وجود دارد ، ولی می‌توان آن را با کامل‌کردن‌مربع از بین برد . در واقع ،

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = y^2 + \frac{3}{4},$$

که در آن $y = x + \frac{1}{2}$ ؛ و درنتیجه ،

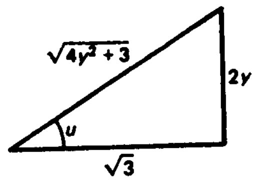
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}}$$

$(dx = dy)$. برای محاسبهٔ انتگرال طرف راست ، قرار می‌دهیم $y = (\sqrt{3}/2)\tan u$. در این صورت ، $\sqrt{y^2+\frac{3}{4}} = (\sqrt{3}/2)\sec u$, $dy = (\sqrt{3}/2)\sec^2 u\, du$ و ، به کمک مثال ۴ ، صفحهٔ ۵۹۵ ،

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}} = \int \frac{\sec^2 u}{\sec u}\, du = \int \sec u\, du = \ln|\sec u + \tan u| + C.$$

معاینهٔ شکل ۵ ، که در آن $\tan u = 2y/\sqrt{3}$ ، نشان می‌دهد که

$$\sec u = \frac{\sqrt{4y^2+3}}{\sqrt{3}},$$



شکل ۵

و درنتیجه ، پس از جذب $-\ln\sqrt{3}$ در ثابت دلخواه انتگرالگیری C ،

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|\frac{\sqrt{4y^2+3}}{\sqrt{3}} + \frac{2y}{\sqrt{3}}\right| + C = \ln\left(\sqrt{4y^2+3} + 2y\right) + C$$

(حذف علامت قدرمطلق را توجیه کنید) . با مراجعه به متغیر اصلی x ، داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \ln\left[\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+3} + 2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C\\ &= \ln\left[\sqrt{4x^2+4x+4} + 2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + C\\ &= \ln\left(\sqrt{x^2+x+1} + x + \frac{1}{2}\right) + \ln 2 + C.\end{aligned}$$

بالاخره ، با جذب $\ln 2$ در C ، به دست می‌آوریم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left(\sqrt{x^2+x+1} + x + \frac{1}{2}\right) + C.$$

مثال ۹ . $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$ را حساب کنید .

حل . عبارت $4x - x^2$ را مربع کامل می‌کنیم ، به دست می‌آید

$$4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4 - y^2,$$

که در آن $y = x - 2$. در این صورت ، $x = 2 + y,\ dx = dy$ ، و

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{2+y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy$$
$$= 2\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} + \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}\,dy.$$

دومین انتگرال مجموع سمت راست مساوی صفر است، زیرا انتگرالده فرد بوده و بازهٔ انتگرالگیری نسبت به مبداء متقارن است. برای محاسبهٔ انتگرال اول، از فرمول (۲')، صفحهٔ ۴۶۸، استفاده کرده به دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \left[\arcsin\frac{y}{2}\right]_{-1}^1 = 2\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

لذا، بالاخره،

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \frac{2\pi}{3}.$$

در بعضی حالات، انتگرالی که قابل محاسبه با جانشانی مثلثاتی یا هذلولوی است را می‌توان با جانشانی جبری ساده‌تری حساب کرد، و لازم است همیشه آمادهٔ این امکان باشیم. مثلاً، با جانشانی مثلثاتی $x = 2\sin u$ معلوم می‌شود که

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = 8\int \cos^2 u \sin u\,du$$
$$= -\frac{8}{3}\cos^3 u + C = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C,$$

ولی جانشانی جبری $u = 4 - x^2$ سر راست‌تر، و درنتیجه ارجح، می‌باشد:

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= -\frac{1}{3}u^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + C.$$

لازم است متذکر شویم که یک جانشانی مثلثاتی یا هذلولوی اغلب به کشف فرمولی منتهی می‌شود که از قبل معلوم است. مثلاً، با جانشانی مثلثاتی $x = \sin u$ معلوم می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos u}{\cos u}\,du = \int du = u + C = \arcsin x + C,$$

که همان فرمول (۲)، صفحهٔ ۴۶۸، است، حال آنکه جانشانی مثلثاتی $x = \tan u$ نتیجه

می‌دهد که

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}\, du = \int du = u + C = \arctan x + C,$$

که همان‌فرمول (۶) ،صفحهٔ ۴۷۰،می‌باشد .به‌همین نحو ، جانشانی هذلولوی $x = 3\sinh u$ نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3\cosh u}{3\cosh u}\, du = \int du = u + C = \sinh^{-1}\frac{x}{3} + C,$$

که حالت خاصی از فرمول (۲')، صفحهٔ ۵۷۴ ، می‌باشد . لذا ، اغلب طرق مختلفی بـرای محاسبهٔ یک انتگرال وجود دارد ، و باید راهی را اختیار کنید که از همه موءثـرتـر باشد . همواره می‌توان با مشتقگیری تحقیق کرد که انتگرال درست حساب شده است یا نه .

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱. $\int \sqrt{1-9x^2}\, dx$ ✓

۲. $\int \sqrt{4x^2+25}\, dx$ ✓

۳. $\int \sqrt{16x^2-1}\, dx$ ✓

۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ ✓

۵. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+64}}$ ✓

۶. $\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2-49}}$ ✓

۷. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-3x^2}}\, dx$ ✓

۸. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}\, dx$ ✓

۹. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ ✓

۱۰. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-100x^2}}$ ✓

۱۱. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2}}$ ✓

۱۲. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

۱۳. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\, dx$

۱۴. $\int (1-x^2)^{3/2}\, dx$

۱۵. $\int (x^2-1)^{3/2}\, dx$

۱۶. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\, dx$

۱۷. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}\, dx$

۱۸. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{5/2}}$

۱۹. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

۲۰. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

۲۱. $\displaystyle\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

۲۲. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

۲۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

۲۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2+8x-1)^{3/2}}$

۲۵. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \sqrt{x^2-x+1}\,dx$

۲۶. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{4-2s-s^2}}$

۲۷. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{t}{\sqrt{t^2+2t+5}}\,dt$

۲۸. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{12+4x-x^2}}\,dx$

۲۹. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{ds}{s^2\sqrt{9-s^2}}$

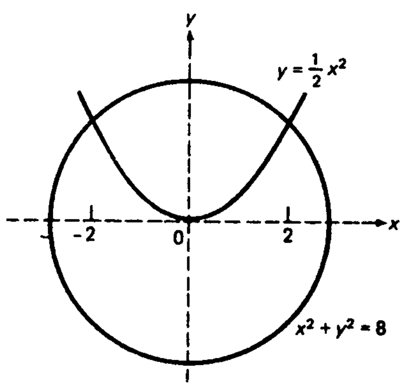
۳۰. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{dt}{t(t^2+1)}$

۳۱. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}-1}}\,du$

۳۲. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin v}{\sqrt{\cos^2 v+1}}\,dv$

۳۳. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{\sec^2 w}{\sqrt{4-\tan^2 w}}\,dw$

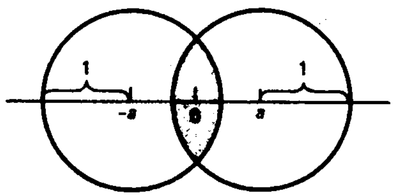
۳۴. مساحات دو ناحیه‌ای را بیابید که سهمی $y=\frac{1}{2}x^2$ درون دایرهٔ $x^2+y^2=8$ را تقسیم می‌کند (ر.ک. شکل ۶).



شکل ۶

۳۵. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصلهٔ $2a$ از هم قرار دارند $(0 \le a \le 1)$.

مساحت A ی ناحیه‌ای را بیابید که دو قرص روی هم قرار گرفته‌اند (ناحیهٔ لنــزی شکل ۷) .



شکل ۷

۳۶. نشان دهید که به ازای $|x| \geq a > 0$ ،

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

۳۷. مساحت A ی قطاع هذلولوی POQ نموده شده در شکل ۱۹ (ب) ، صفحهٔ ۵۶۶ ، را بیابید .

راهنمایی . توجه کنید که $A = \frac{1}{2} \cosh \theta \sinh \theta - \int_1^{\cosh \theta} \sqrt{x^2 - 1}\, dx$.

۳۸. با استفاده از جانشانی مثلثاتی ، فرمول تحویل

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

(ر.ک. مثال ۵ ، صفحهٔ ۶۱۲) را از فرمول تحویل

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n - 1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(ر.ک. مثال۲ ، صفحهٔ ۶۱۱) نتیجه بگیرید .

۶.۷ انتگرالگیری از توابع گویا ؛ کسرهای جزئی

توابع گویای حقیقی و مجازی . در این بخش طرز انتگرالگیری توابع گویا را نشان‌می‌دهیم . به یاد آورید که یک تابع گویا به صورت خارج قسمت دو چند جمله‌ای تعریف شده است ؛ یعنی ، تابعی به شکل زیر :

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_N x^N} \qquad (a_n \neq 0, b_N \neq 0). \tag{۱}$$

صورت $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است، زیـــرا $a_n \neq 0$ ، درحالی که مخرج $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ N است، زیرا $b_N \neq 0$. (همواره فرض است که صورت و مخرج عامل مشترک ندارند، زیرا در غیر این صورت می‌توان عوامل مشترک را از اول حذف کرد.) اگــر $n < N$ ، یعنی اگر درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج کمتر باشد، گوییم تابع گویای $R(x)$ حقیقی است. اگر $R(x)$ مجازی باشد، یعنی $n \geq N$ ، می‌توان $Q(x)$ را بر $P(x)$ تقسیم کرده و $R(x)$ را به صورت مجموعی از یک چندجمله‌ای و تابع گویای دیگر $R_1(x)$ با همان مخـــرج $Q(x)$ بیان کرد، که در آن $R_1(x)$ اینک حقیقی می‌باشد. اما چندجمله‌ایها به‌آسانی انتگره می‌شوند (ر.ک. مثال ۶، صفحهٔ ۴۰۳)؛ و درنتیجه، اصل مسئله انتگرالگیـــری از $R_1(x)$ می‌باشد.

مثال ۱. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}\,dx$ را حساب کنید.

حل. انتگرالده تابعی گویاست ولی مجازی است، زیرا درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج متجاوز است. بنابراین، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، به دست می‌آوریم

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ x - 1 & x^2 + x + 1 \\ & \underline{x^2 - x} \\ & \quad 2x + 1 \\ & \quad \underline{2x - 2} \\ & \qquad 3 \end{array}$$

که در آن $x + 2$ خارج‌قسمت و 3 باقیمانده است. لذا،

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{3}{x - 1},$$

و انتگرالده را به صورت مجموع چندجمله‌ای $x + 2$ و تابع‌گویای حقیقی $3/(x - 1)$ بیان کرده‌ایم. پس نتیجه می‌شود که

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}\,dx = \int (x + 2)\,dx + 3\int \frac{dx}{x - 1}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln|x - 1| + C,$$

که در آن C ثابت انتگرالگیری است.

مثال ۲ . $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ را حساب کنید .

حل . انتگرال مجددا" یک تابع گویای مجازی است ، زیرا صورت و مخرج همدرجه‌می‌باشند. این بار با تقسیم متوالی باتوجه‌به اینکه صورت $x^2 - 1$ را می‌توان به شکل $(x^2+1) - 2$ نوشت ، داریم

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1},$$

بنابراین ،

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = x - 2\arctan x + C.$$

چند جمله‌ای درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر . در مثال ۱ صورت $x - 1$ یک چند جمله‌ای خطی است ، حال آنکه در مثال ۲ مخرج $x^2 + 1$ یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم **تحویل‌ناپذیر** می‌باشد ؛ یعنی ، یک‌چندجمله‌ای درجهٔ‌دوم‌که قابل‌تجزیه به‌حاصل ضربی ازچند جمله‌ایهای خطی نیست . برای‌آنکه تحویل‌ناپذیری $x^2 + 1$ را ببینیم ، ملاحظه می‌کنیم‌که‌هرگاه $x^2 + 1$ تجزیه‌ای به صورت زیر می‌داشت :

$$x^2 + 1 = (x-a)(x-b),$$

آنگاه $x^2 + 1$ به‌ازای $x = a$ یا $x = b$ صفرمی‌شد ؛ یعنی ، معادلهٔ‌درجهٔ‌دوم $x^2 + 1 = 0$ جواب می‌داشت . اما این ناممکن است ، زیرا به ازای هر x حقیقی ، $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

به‌طورکلی ، چندجمله‌ای درجهٔ‌دوم $x^2 + px + q$ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 + px + q = 0$ جواب (حقیقی) نداشته باشد . بنابر فرمول ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم ، این برقرار است اگر و فقط اگر $p^2 - 4q < 0$ یا معادلا" $p^2 < 4q$. در واقع ، اگر $p^2 \geq 4q$ ، معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ دارای ریشه‌های $a = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q})$ و $b = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q})$ است ، که درصورت $p^2 = 4q$ یکی می‌باشند ، و در این صورت به آسانی معلوم می‌شود که

$$x^2 + px + q = (x-a)(x-b),$$

ولی هرگاه $p^2 < 4q$ ، آنگاه به ازای هر x حقیقی ،

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \geq q - \frac{p^2}{4} > 0$$

تجزیهٔ $Q(x)$. برای بررسی تابع گویای کلی به شکل (۱) ، قدم اول تجزیهٔ مخرج

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_N x^N \qquad (b_N \neq 0) \tag{۲}$$

است . در اینجا متکی‌به قضیه‌ای از جبر هستیم‌که می‌گوید **هرچند جمله‌ای با ضرایب حقیقی مانند $Q(x)$ را می‌توان به صورت حاصل‌ضربی از عوامل درجهٔ دوم‌خطی و تحویل ناپذیر نوشت** . به‌طورمشروح، هرگاه N درجهٔ $Q(x)$ باشد ، آنگاه

$$Q(x) = a(x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}, \tag{۳}$$

که در آن $k, m, r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_m$ اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری که

$$r_1 + \cdots + r_k + 2s_1 + \cdots + 2s_m = N, \tag{۴}$$

و $a, c_1, \ldots, c_k, p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m$ ثابتهایی حقیقی‌اند به‌طوری که هر جفت p_l, q_l در شرط تحویل‌ناپذیری $p_l^2 < 4q_l$ صدق می‌کند (چرا(۴) برقرار است؟) همچنین ، تجزیهٔ (۳) صرف‌نظر از ترتیب عوامل منحصر به فرد است . البته ، فرض‌است که هیچ دو عامل‌خطی یا عامل درجهٔ دوم در (۳) یکی نیستند .

قضیهٔ زیر ابزار جستجو برای عوامل خطی یک چندجمله‌ای را فراهم می‌سازد .

قضیهٔ ۲ (قضیهٔ عاملی) . چندجمله‌ای $Q(x)$ بر عامل خطی $x - c$ بخشپذیر است اگر و فقط اگر $Q(c) = 0$.

برهان *(اختیاری)* . هرگاه $Q(x)$ بر $x - c$ بخشپذیر باشد ، آنگاه $Q(x) = (x - c)S(x)$ ، که در آن $S(x)$ چندجمله‌ای دیگری است؛ و درنتیجه ،

$$Q(c) = (c - c)S(c) = 0.$$

به عکس، هرگاه $Q(x)$ با (۲) داده شده باشد و $Q(c) = 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x) - Q(c) \\ &= (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_N x^N) - (b_0 + b_1 c + b_2 c^2 + \cdots + b_N c^N) \\ &= b_1(x - c) + b_2(x^2 - c^2) + \cdots + b_N(x^N - c^N). \qquad (۵) \end{aligned}$$

اما

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \cdots + xc^{n-2} + c^{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N).$$

بنابراین ، $x - c$ عامل هر جملهٔ سمت راست (۵) است؛ و درنتیجه ، عاملی از چند جمله‌ای $Q(x)$ نیز هست .

مثال ۳ . $Q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ را تجزیه کنید .

حل . پس‌از کمی آزمایش‌معلوم می‌شودکه $Q(2) = 0$. بنابراین ، $Q(x)$ بر $x - 2$ بخشپذیر است . با تقسیم متوالی معلوم می‌شود که $Q(x) = (x-2)S(x)$ ، که در آن

$$S(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2.$$

با آزمایش بیشتر معلوم می‌شود که $S(-1) = 0$ ؛ درنتیجه ، $S(x)$ بر $x + 1$ بخشپذیر است . این بار با تقسیم خواهیم داشت

$$S(x) = (x+1)(x^2 + 2x + 2),$$

که در آن عامل درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر است (چرا؟) . لذا ، بالاخره ،

$$Q(x) = (x-2)S(x) = (x-2)(x+1)(x^2 + 2x + 2),$$

که به شکل (۳) است با $k = 2, m = 1, r_1 = r_2 = s_1 = 1\ (N = 4), a = 1,\ c_1 = 2,$ $c_2 = -1, p_1 = q_1 = 2\ (p_1^2 < 4q_1)$

بسط به صورت کسر جزئی . وقتی مخرج $Q(x)$ تابع گویای داده شدهٔ $R(x)$ تجزیه شد ، می‌توان با استفاده از قضیهٔ زیر (که برهانش حذف شده زیرا نسبتاً" فنی بوده و بیشتر جبری است تا متعلق به حساب دیفرانسیل و انتگرال) آمادهٔ انتگرالگیری‌شد . اما صورت و معنی قضیه به‌قدر کافی ساده‌اند . ایده نمایش $R(x)$ به صورت مجموعی از توابع گویای ساده ، به نام *کسرهای جزئی* ، است . این توابع به شکل زیر می‌باشند :

$$\frac{A}{(x-c)^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

یا

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} \qquad (p^2 < 4q, n = 1, 2, \ldots),$$

و همانطور که ذیلاً" می‌بینیم ، انتگرال آنها را می‌توان فوراً" حساب کرد . مجموع کسرهای جزئی نمایش $R(x)$ را *بسط به‌صورت کسری جزئی* $R(x)$ می‌نامند .

قضیهٔ ۳ (بسط به صورت کسری جزئی یک تابع گویا) . *فرض‌کنیم $R(x)$ یک تابع گویای حقیقی با مخرج*

$$Q(x) = a(x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

باشد ، که در آن هیچ دو عامل خطی یا درجهٔ دوم یکسان نبوده و عوامل درجهٔ دوم همه

تحویل ناپذیرند. در این صورت، $R(x)$ مجموع k قالب از جملات به شکل زیر است[۱]:

$$\frac{A_1}{x-c_i}+\frac{A_2}{(x-c_i)^2}+\cdots+\frac{A_{r_i}}{(x-c_i)^{r_i}}, \tag{۶}$$

برای هر عامل خطی متمایز $x-c_i$ یکی، و m قالب به شکل

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_ix+q_i}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_ix+q_i)^2}+\cdots+\frac{B_{s_i}x+C_{s_i}}{(x^2+p_ix+q_i)^{s_i}}, \tag{۷}$$

برای هر عامل درجهٔ دوم متمایز $x^2+p_ix+q_i$ یکی. ضرایب $A_1,\ldots,A_{r_i},B_1,\ldots,B_{s_i},$ $C_1,\ldots,C_{s_i}$ ثابتهایی حقیقی بوده و منحصراً بوسیلهٔ تابع $R(x)$ معین می‌شوند.

قالب (۶) فقط از یک جمله، اولی اگر $r_i=1$، تشکیل شده‌است و همین امر درمورد قالب (۷) اگر $s_i=1$ درست است. چندجمله‌ای $Q(x)$ معمولاً معدودی عامل دارد، و برای ضرایب می‌توان نمادساده‌تری را پذیرفت. ما از حروف بزرگ $A, B, C, D, E, F,\ldots$ بدون زیرنویس استفاده خواهیم کرد.

یکسانی چندجمله‌ایها. پیش از چند مثال از کاربرد قضیهٔ ۳ باید آخرین ابزار جبری را به دست آوریم.

قضیهٔ ۴ (چندجمله‌ایهای یکسان ضرایب یکسان دارند). *هرگاه دوچندجمله‌ای از x متحداً مساوی باشند، آنگاه چندجمله‌ایها درجهٔ یکسان داشته و توانهای یکسان از x ضرایب یکسان خواهند داشت. به عبارت دیگر، هرگاه*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\equiv b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_Nx^N, \tag{۸}$$

که در آن $a_n\neq 0, b_N\neq 0$، آنگاه

$$n=N,\ a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ldots,a_n=b_n$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم $n\neq N$. در این صورت، اگر $n>N$، از اتحاد (۸) n بار مشتق می‌گیریم تا به دست آید $n!a_n=0$ (ر.ک. مثال ۳، صفحهٔ ۲۲۵)، حال آنکه اگر $n<N$، از (۸) N بار مشتق گرفته به دست می‌آوریم $N!b_N=0$. لذا، اگر $n\neq N$، $a_n=0$ یا $b_N=0$ که با فرض متناقض است. پس نتیجه می‌شود که $n=N$؛ درنتیجه، (۸) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\equiv b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n. \tag{۸'}$$

---

۱. برای زیاد نشدن نمادها، تمایزی بین ضرایب قالبها به‌شکل (۶) یا (۷) نخواهیم گذاشت.

با فرض $x = 0$ در (۸') فورا" نتیجه می‌شود $a_0 = b_0$. به‌علاوه، با n بار مشتقگیری از (۸') و گذاردن $x = 0$ در معادلات حاصل (جز آخری) به دست می‌آوریم $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.

مثال ۴. تابع گویای

$$\frac{x^2 + 2}{(x-2)(x+1)^2}$$

را به صورت کسرهای جزئی بسط داده، و سپس انتگرال آن را بیابید.

حل. با اعمال قضیهٔ ۳، می‌بینیم که این تابع گویا مجموعی از تنها جملهٔ

$$\frac{A}{x-2}$$

نظیر به عامل $x - 2$ در مخرج، و قالب دوجمله‌ای

$$\frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

نظیر به عامل دیگر $(x+1)^2$ می‌باشد. بنابراین،

$$\frac{x^2 + 2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}, \tag{۹}$$

که در آن، به خاطر سادگی، ضرایب را با حروف متوالی A ، B ، و C نشان می‌دهیم.

برای تعیین ضرایب، طرفین معادلهٔ (۹) را در $(x-2)(x+1)^2$ ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$x^2 + 2 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2), \tag{۱۰}$$

یا معادلا"

$$x^2 + 2 = (A + B)x^2 + (2A - B + C)x + (A - 2B - 2C). \tag{۱۰'}$$

هرگاه (۱۰) یا (۱۰') به‌ازای هر x برقرار باشد، آنگاه مسلما" (۹) به ازای هر x جز مقادیر $x = 2$ و $x = -1$ ، کـه مخرجها را صفر می‌کنند، برقرار است. با اعمال قضیهٔ ۴ براتحاد چندجمله‌ای (۱۰')، معلوم می‌شود که ضرایب x^2 در طرفین چپ و راست (۱۰') باید مساوی‌باشند، وهمین‌امر بایددر مورد ضرایب x وجملات ثابت درست باشد (جملات اخیر را می‌توان ضرایب x^0 درنظر گرفت). این ما را فورا" به دستگاه سه معادلهٔ خطی زیرازسه

مجهول A ، B ، و C می‌رساند[۱]:

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ 2A - B + C &= 0, \\ A - 2B - 2C &= 2. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

با حل این دستگاه معلوم می‌شود که

$$A = \frac{2}{3}, \qquad B = \frac{1}{3}, \qquad C = -1.$$

در واقع ، با افزودن دوبرابر معادلهٔ دوم به معادلهٔ سوم خواهیم‌داشت $5A - 4B = 2$ ، که همراه بـــا $A + B = 1$ یا $B = 1 - A$ ایجاب می‌کند که

$$5A - 4(1 - A) = 2, \quad 9A = 6, \quad A = \tfrac{2}{3}, \quad B = \tfrac{1}{3}, \quad C = B - 2A = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3} = -1.$$

با گذاردن این مقادیر از ضرایـب A, B, C در (۹) ، معلوم می‌شود که تابع گویای داده شده دارای بسط به صورت کسر جزئی زیر است:

$$\frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x - 2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x + 1}\right) - \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

حال می‌توان تابع گویا را به آسانی انتگره کرد:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2}\,dx &= \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x - 2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2}{3}\ln|x - 2| + \frac{1}{3}\ln|x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

راه مؤثرتر دیگری برای تعیین ضرایب A, B, C در مثال ۴ وجود دارد ، که در آن لزومی به حل دستگاه (۱۱) نیست . این روش مبتنی بر این امر است که اگر دوچندجمله‌ای از x متحداً" مساوی باشند ، مقادیرشان باید به ازای هر x یکسان باشند . اما با نگاهی به (۱۰) معلوم می‌شود که عبارت سمت راست به ازای $x = 2$ یـا $x = -1$ شـکل سادهٔ‌ای می‌یابد ، زیرا در هر حالت دوجمله از سه‌جمله صفر می‌باشند . مثلاً" ، با قرار دادن $x = 2$

---

۱. منظور از یک معادلهٔ خطی از n متغیر (یا " مجهول ") $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یعنی معادله‌ای درجهٔ اول نسبت به متغیرها ؛ یعنی ، معادله‌ای به شکل $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ که در آن $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ ثابت‌اند . بعضی از این ثابتها ممکن است صفر باشند، و معادلهٔ خطی را همگن گوییم اگر $b = 0$.

در (۱۰) فورا" داریم $9A = 6$ یا $A = \frac{2}{3}$ ، و با قرار دادن $x = -1$ به دست می‌آوریم $-3C = 3$ یا $C = -1$. پس از معادلهٔ اول (۱۱) معلوم می‌شود که $B = \frac{1}{3}$. به صورت دیگر، می‌توان با قرار دادن $A = \frac{2}{3}, C = -1, x = 0$ در (۱۰) به دست آورد $2 = \frac{2}{3} - 2B + 2$ ، که $B = \frac{1}{3}$ را به ما خواهد داد.

مثال ۵. تابع گویای

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}$$

را به صورت کسرهای جزئی بسط داده، و سپس انتگرال آن را بیابید.

حل. چون $x^2 + 2$ تحویل ناپذیر است، از قضیهٔ ۳ معلوم می‌شود که تابع گویای داده شده مجموع تنها جملهٔ

$$\frac{A}{x},$$

نظیر به عامل x در مخرج، و قالب دوجمله‌ای

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2},$$

نظیر به عامل دیگر $(x^2 + 2)^2$ ، است. بنابراین،

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2}, \qquad (۱۲)$$

که در آن این بار ضرایب با حروف A ، B ، C ، D ، و E نموده شده‌اند. با ضرب (۱۲) در $x(x^2 + 2)^2$ به دست می‌آوریم

$$3x^2 + x + 4 = A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x^2 + 2)x + (Dx + E)x,$$

یا معادلا"

$$3x^2 + x + 4 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (4A + 2B + D)x^2 + (2C + E)x + 4A. \qquad (۱۳)$$

با اعمال قضیهٔ ۴ بر این اتحاد، دستگاهی از پنج معادلهٔ خطی از پنج مجهول A ، B ، C ، D ، و E به دست می‌آید:

$$A + B = 0,$$
$$C = 0,$$
$$4A + 2B + D = 3,$$

$$2C + E = 1,$$
$$4A = 4.$$

این دستگاه معادلات ، به خلاف ظاهر پیچیده‌اش، با کمی زحمت حل می‌شود . در واقع ، معادلات پنجم و دوم فورا" به ما می‌گویندکه $A = 1,\ C = 0$ ، و سپس از معادلات دیگر بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $B = -A = -1,\ D = 3 - 4A - 2B = 1,\ E = 1$. لذا ،

$$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 0, \qquad D = 1, \qquad E = 1,$$

و با گذاردن این مقادیر از ضرایب در (۱۲) معلوم می‌شود که تابع گویای ما دارای بسط به صورت کسر جزئی زیر است:

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2}$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^2}.$$

انتگرالگیری از تابع گویا آسان است . درواقع ، .

$$\int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 2}\,dx + \int \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\,dx + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right) + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

برای محاسبهٔ آخرین انتگرال، در فرمول (۵) ، صفحهٔ ۶۱۳ ، قرار می‌دهیم $a = \sqrt{2}$ تا به دست آید

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2 + 2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

بنابراین ، مآلا" داریم

$$\int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2 + 2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln \frac{x^2}{x^2 + 2} + \frac{x - 2}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

مثال ۶ . $\int \frac{3x}{x^3-1}dx$ را حساب کنید .

حل . مخرج انتگرالده را تجزیه می‌کنیم :

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

که در آن چندجمله‌ای درجهٔ دوم x^2+x+1 تحویل‌ناپذیر است (چرا ؟) . از اینرو ، بنابر قضیهٔ ۳ ،

$$\frac{3x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

با ضرب طرفین این معادله در x^3-1 ، خواهیم داشت

$$3x=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1). \qquad (۱۴)$$

با اختیار $x=1$ معلوم می‌شود که $3A=3$ یا $A=1$. با این مقدار A ، (۱۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$3x-(x^2+x+1)=-x^2+2x-1=(Bx+C)(x-1),$$

که ایجاب می‌کند که

$$Bx+C=\frac{-x^2+2x-1}{x-1}=\frac{(x-1)(-x+1)}{x-1}=-x+1.$$

لذا ، بسط انتگرالده به صورت کسر جزئی عبارت است از

$$\frac{3x}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{-x+1}{x^2+x+1}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\int\frac{3x}{x^3-1}dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-x+1}{x^2+x+1}dx=\ln|x-1|+\int\frac{-x+1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$
$$=\ln|x-1|+\int\frac{-y+\frac{3}{2}}{y^2+\frac{3}{4}}dy$$
$$=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2)}{y^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}},$$

که در آن $y=x+\frac{1}{2}$ ؛ و درنتیجه ، به کمک فرمول (۶′) ، صفحهٔ ۴۷۰ ،

$$\int \frac{3x}{x^3-1}\,dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(y^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C,$$

این بخش را با نشان دادن اینکه روش کسرهای جزئی به ما توان محاسبهٔ انتگرال یک تابع گویای *دلخواه*، دست کم به‌طور نظری، می‌بخشد به پایان می‌بریم .

اختیاری. بنابرقضیهٔ ۳ ، انتگرال یک کسر جزئی نظیر به یک عامل خطی در مخرج یک تابع گویای حقیقی به شکل زیر است :

$$\int \frac{A}{(x-c)^n}\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{۱۵}$$

حال آنکه انتگرال هر کسر جزئی نظیر به یک عامل درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر به شکل زیر می‌باشد :

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx \qquad (p^2 < 4q,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{۱۶}$$

می‌توان (۱۵) را فورا" حساب کرد : با جانشانی $u = x - c$ داریم

$$\int \frac{A}{x-c}\,dx = A\int\frac{du}{u} = A\ln|u| = A\ln|x-c|$$

اگر $n = 1$ ، و

$$\int \frac{A}{(x-c)^n}dx = A\int\frac{du}{u^n} = A\int u^{-n}\,du = A\left(\frac{u^{-n+1}}{-n+1}\right) = -\frac{A}{(n-1)(x-c)^{n-1}}$$

اگر $n > 1$. به خاطر سادگی، در نوشتن انتگرال کسرهای جزئی ثابتهای انتگرالگیری را حذف می‌کنیم ، با این فرض که یک ثابت انتگرالگیری در پایان تمام محاسبات خواهدآمد.

برای محاسبهٔ (۱۶) ، ابتدا در مخرج مربع را کامل می‌کنیم . از این نتیجه می‌شود که

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = u^2 + a^2,$$

که در آن

$$u = x + \frac{p}{2}, \qquad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

لذا ، اگر $n = 1$ ، داریم

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{Bu + [C - (Bp/2)]}{u^2 + a^2}\,du = \frac{B}{2}\int \frac{2u}{u^2 + a^2}\,du$$

$$+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(u^2 + a^2) + \frac{1}{a}\left(C - \frac{Bp}{2}\right)\arctan\frac{u}{a}$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}}\arctan\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}. \qquad (۱۷)$$

اگر $n > 1$ ، خواهیم داشت

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}\,dx = \int \frac{Bu + [C - (Bp/2)]}{(u^2 + a^2)^n}\,du$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{2u}{(u^2 + a^2)^n}\,du + \left(C - \frac{Bp}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}.$$

برای محاسبهٔ انتگرال دوم ، فرمول تحویل ثابت شده در مثال ۵ ، صفحهٔ ۶۱۲ ، را به‌کار می‌بریم ، حال آنکه در محاسبهٔ انتگرال اول از جانشانی $v = u^2 + a^2$ استفاده‌می‌کنیم :

$$\int \frac{2u}{(u^2 + a^2)^n}\,du = \int \frac{dv}{v^n} = \int v^{-n}\,dv = \frac{v^{-n+1}}{-n + 1} = -\frac{1}{(n - 1)(u^2 + a^2)^{n-1}}.$$

بقیهٔ محاسبات صرفا" جبر بوده و چیزی بیش از بیان u و a برحسب x ، p ، و q ، مثل حالت $n = 1$ ، نخواهد بود .

مسائل

چندجمله‌ای داده‌شده را به‌صورت حاصل ضربی از عوامل خطی و درجه‌ٔدوم تحویل‌ناپذیر بیان نمایید .

۱. $x^4 - x^3 + x^2 - x$

۲. $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$

۳. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

۴. $x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

۵. $x^4 - x^3 - 91x^2 + x + 90$

۶. $x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$

۷. در صفحهٔ ۴۹۹ نشان داده شد که

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C \qquad (a \neq b).$$

این فرمول را با استفاده از کسرهای جزئی به دست آورید .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۸. $\int \frac{x}{x-2}\,dx$

۹. $\int \frac{8x-3}{4x+1}\,dx$

۱۰. $\int \frac{dx}{x^2+4x-77}$

۱۱. $\int \frac{dx}{(x+2)(3x+4)}$

۱۲. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx$

۱۳. $\int \frac{x}{x^2-x-6}\,dx$

۱۴. $\int \frac{x}{(2x+1)(2x+3)}\,dx$

۱۵. $\int \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 dx$

۱۶. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

۱۷. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

۱۸. $\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\,dx$

۱۹. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx$

۲۰. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$

۲۱. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$

۲۲. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

۲۳. $\int \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

۲۴. $\int \frac{x^3}{(x^2+9)^3}\,dx$

۲۵. $\int \frac{32x}{(2x-1)(2x-3)(2x-5)}\,dx$

۲۶. $\int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,dx$

۲۷. $\int \frac{x+2}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx$

۲۸. $\int \frac{2x^7+3x^4+x-6}{x^3-1}\,dx$

۲۹. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$

۳۰. $\int \frac{6-9x-3x^2}{x^4-5x^2+4}\,dx$

۳۱. $\int \frac{x^2}{x^4-16}\,dx$

۳۲. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1}\,dx$

۳۳. $\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2}\,dx$

حل. فرض کنیم $u = e^x$. پس $du = e^x\,dx,\ dx = du/u$؛ درنتیجه،

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 2}\,dx = \int \frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)}\,du,$$

و مسئله به انتگرالگیری از یک تابع گویا از u با بسط به صورت کسرهای جزئی

$$\frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{u - 3}{u^2 - u + 2}\right)$$

تحویل شده است. بنابراین، به کمک فرمول (۱۷)، صفحهٔ ۶۴۹،

$$\int \frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{u - 3}{u^2 - u + 2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{4}\ln(u^2 - u + 2) + \frac{5}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{2u - 1}{\sqrt{7}} + C,$$

با مراجعه به متغیر x، معلوم می‌شود که

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(e^{2x} - e^x + 2) + \frac{5}{2\sqrt{7}}\arctan\frac{2e^x - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

انتگرالگیری از توابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$. منظور از *چندجمله‌ای از دو متغیر* x و y یعنی مجموع تعدادی متناهی جمله به شکل ax^my^n که در آن m و n اعداد صحیح نامنفی بوده و a ثابت دلخواهی می‌باشد. به عنوان مثال،

$$\sqrt{5} + 7xy^2 + 9x^2y^3 - \frac{1}{2}y^4$$

یک چندجمله‌ای از x و y است. خارج‌قسمت

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

دو چندجمله‌ای $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ از x و y را یک *تابع گویا از* x و y می‌نامند[1]. یک مثال از این نوع توابع عبارت است از

$$\frac{x - y}{1 - 2x^2 + 3xy}. \qquad (۲)$$

هرگاه $R(x, y)$ تابع گویایی از x و y باشد، آنگاه $R(\sin x, \cos x)$ یک *تابع گویا از* $\sin x$

---

۱. در نوشتن $P(x, y)$، $Q(x, y)$، و $R(x, y)$، نماد توابع دو متغیره پیش‌بینی شده است (ر. ک. بخش ۱۳.۱).

و $\cos x$ نام دارد . لذا ، از تعویض x با $\sin x$ و y با $\cos x$ در (۲) ، تابع گویای زیر از $\sin x$ و $\cos x$ به دست می‌آید :

$$\frac{\sin x - \cos x}{1 - 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x}. \qquad (۲')$$

همانطور که اینک نشان می‌دهیم ، انتگرال هر تابع گویا از $\sin x$ و $\cos x$ راهمیشه‌می‌توان به کمک یک جانشانی گویاساز مناسب محاسبه نمود .

قضیهٔ ۵ (انتگرالگیری از یک تابع گویـا از $\sin x$ و $\cos x$) . فرض‌کنیم $R(\sin x, \cos x)$ *یک تابع گویا از* $\sin x$ و $\cos x$ بوده ، و

$$u = \tan\frac{x}{2} \qquad (-\pi < x < \pi). \qquad (۳)$$

در این صورت ،

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_1(u)\,du,$$

که در آن $R_1(u)$ *تابع گویایی از تنها متغیر* u *است . بخصوص ، چون انتگرال سمت راست‌را همیشه می‌توان به روش کسرهای جزئی حساب کرد ، همین امر در مورد انتگرال سمت چپ نیز صادق خواهد بود .*

برهان . ابتـدا $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب متغیر جدید u بیان می‌کنیم . بنابر فرمولهـای زاویهٔ مضاعف برای سینوس و کسینوس، همراه با اتحـاد $\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2) = 1$ ، داریم

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

که در آخرین مرحلهٔ محاسبه‌صورت ومخرج‌را بـر $\cos^2(x/2)$ تقسیم کرده‌ایم .این فرمولها

پس از جانشانی (۳) ، که به جانشانی نصف زاویه معروف است ، به صورت زیر درمی‌آیند :

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \tag{۴}$$

مبین آنکه $\sin x$ و $\cos x$ هر دو توابع گویایی از u اند . مشتق dx/du نیز تابع گویایی از u است . در واقع ، (۳) معادل است با

$$x = 2 \arctan u, \tag{۳'}$$

و مشتقگیری از (۳') فورا " نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}. \tag{۵}$$

حال ، به کمک (۴) و (۵) ، انتگرال $R(\sin x, \cos x)$ را به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\begin{aligned}\int R(\sin x, \cos x)\, dx &= \int R(\sin x, \cos x) \frac{dx}{du}\, du \\ &= \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}\, du = \int R_1(u)\, du,\end{aligned}$$

که در آن

$$R_1(u) = R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}$$

یک تابع گویا از تنها متغیر u است . این امر از این نتیجه می‌شود که خارج قسمت دو چند جمله‌ای در $2u/(1+u^2)$ و $(1-u^2)/(1+u^2)$ پس از ضرب صورت و مخرج در توان مناسبی از $1+u^2$ به صورت تابع گویایی از u در می‌آید (بیشتر توضیح دهید) .چون $R_1(u)$ تابعی گویاست ، می‌توان آن را به روش توابع جزئی انتگره کرده به انتگرالی مانند $I_1(u)$ رسید که عموما " مجموعی است از توابع گویا ، لگاریتمها ، و تانژانتهای معکوس . در این صورت ، انتگرال $R(\sin x, \cos x)$ ، پس از بازگشت به متغیر اصلی x ، مساوی است با

$$I_1\left(\tan \frac{x}{2}\right).$$

مثال ۴ . $\displaystyle\int \frac{dx}{3 \sin x + 2 \cos x + 2}$ را حساب کنید .

حل . با استفاده از جانشانی نصف زاویهٔ (۳) و فرمولهای (۴) و (۵) ، معلوم می‌شود که

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2} = \int \frac{1}{\dfrac{6u}{1+u^2} + 2\dfrac{1-u^2}{1+u^2} + 2} \frac{2}{1+u^2}\, du$$

$$= \int \frac{2}{6u + 2(1-u^2) + 2(1+u^2)}\, du = \int \frac{du}{3u+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3u+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|3\tan\frac{x}{2} + 2\right| + C.$$

مثال ۵ . $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx$ را حساب کنید .

حل . این بار داریم

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx = \int \frac{1 - \dfrac{2u}{1+u^2}}{1 + \dfrac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\, du = \int \frac{1+u^2-2u}{1+u^2}\, du$$

$$= \int \left(1 - \frac{2u}{1+u^2}\right) du = u - \ln(1+u^2) + C$$

$$= \tan\frac{x}{2} - \ln\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) + C = \tan\frac{x}{2} - \ln\left(\sec^2\frac{x}{2}\right) + C,$$

یا معادلا "

$$\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\, dx = \tan\frac{x}{2} + \ln\left(\cos^2\frac{x}{2}\right) + C.$$

بنابر قضیهٔ ۵ ، جانشانی نصف‌زاویهٔ (۳) عمومی است‌بدین معنی که اصولا "می‌توان از آن برای انتگرالگیری از یک تابع گویای دلخواه از $\sin x$ و $\cos x$ استفاده کرد . با اینحال ، در عمل ، اغلب جانشانیهای دیگر مناسبترند ، و این امر را مثالهای زیر نشان خواهند داد .

مثال ۶ . $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\, dx$ را حساب کنید .

حل . باتوجه به اینکه

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 2} \sin x\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 2} \sin x\, dx,$$

جانشانی $u = \cos x$ را انجام می‌دهیم . پس $du = -\sin x\, dx$ ، و

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\, dx = \int \frac{u^2 - 1}{u + 2}\, du = \int \left(u - 2 + \frac{3}{u + 2}\right) du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 - 2u + 3 \ln |u + 2| + C$$

$$= \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln (\cos x + 2) + C$$

(چرا می‌توان علامت قدرمطلق را انداخت ؟) فرض کنید به جای جانشانی $u = \cos x$ از جانشانی نصف زاویهٔ (۳) استفاده کرده باشیم . در این صورت ، به جای انتگرالدهٔ نسبتاً" سادهٔ $(u^2 - 1)/(u + 2)$ ، انتگرالدهٔ پیچیدهٔ زیر را می‌داشتیم :

$$\frac{16u^3}{(u^2 + 3)(u^2 + 1)^3},$$

که انتگرالگیری از آن بسیار مشکلتر است (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵) .

مثال ۷. انتگرال

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

را ، که در آن a و b ثابتهای مثبت دلخواهی هستند ، حساب کنید .

حل. از تقسیم صورت و مخرج بر $a^2 \cos^2 x$ داریم

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{1}{a^2 \cos^2 x}}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{b^2}{a^2}}\, dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + \dfrac{b^2}{a^2}}\, dx,$$

که از آن در این حالت آشکار است که جانشانی گویاساز مناسب ، به جای جانشانی نصف زاویهٔ $u = \tan (x/2)$ ، جانشانی $u = \tan x$ می‌باشد . در واقع ، هرگاه $u = \tan x$ ، آنگاه $du = \sec^2 x\, dx$ ، و

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{b} \arctan \frac{au}{b}\right) + C$$

$$= \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C.$$

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۱. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + 1}$

۲. $\int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

۳. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$

۴. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx$

۵. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

۶. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$

۷. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

۸. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

۹. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

۱۰. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

۱۱. $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx$

۱۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

۱۳. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$

۱۴. $\int \frac{dx}{3-\sin x}$

۱۵. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

۱۶. $\int \frac{dx}{1-\sin x+\cos x}$

۱۷. $\int \frac{\cos^3 x}{2\sin x - 1}\,dx$

۱۸. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

۱۹. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x - \cos x}\,dx$

۲۰. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

۲۱. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x - 2\sin x}$

۲۲. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$

۲۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+b\tan x}$ $(ab \neq 0)$

۲۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$

۲۵. مثال ۶ را با راه مشکل جانشانی $u = \tan(x/2)$ حل کنید.

۲۶. با استفاده از جانشانی

$$x = a\cos^2 u + b\sin^2 u \qquad (0 < u < \pi/2)$$

نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C \qquad (a < x < b).$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۲۷. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

۲۸. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{9\sin^2 x + \cos^2 x}$

۲۹. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

۳۰. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{ds}{2+\tan s}$

۳۱. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2-\sin t + \cos t}$

۳۲. $\displaystyle\int_2^5 \frac{du}{\sqrt{(u-1)(6-u)}}$

۸.۷ انتگرالگیری تقریبی و قاعدهٔ سیمپسون[1]

مسئلهٔ محاسبهٔ انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

از تابع پیوستهٔ f را درنظر می‌گیریم. ساده‌ترین راه محاسبهٔ I استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است، که می‌گوید

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

که در آن F یک پاد مشتق (یا معادلا "انتگرال نامعین) انتگرالده f می‌باشد. اما اینک می‌دانیم که ممکن است یافتن فرمول صریحی برای F، ولو اینکه وجود F را قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۴۰۵، تضمین می‌کند، مشکل یا حتی غیرممکن باشد.

1. Simpson

قاعدهٔ نقطهٔ میانی . معهذا ، در این حالات هنوز می‌توان انتگرال I را با هردقت مطلوب حساب کرد . ایده تقریب I به وسیلهٔ مجموع مناسبی است . (این امر تعجبی ندارد ، زیرا انتگرال I ابتدا به صورت مقدار حدی مجموع ریمان f وقتی ماکزیمم طول زیربازه‌های بازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$ کوچک‌شود تعریف شد .) در واقع ، عدد زوج مثبت $N = 2n$ را اختیار کرده و بازهٔ $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم *متساوی‌الفاصله*

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \qquad (i = 0, 1, \ldots, N)$$

به فاصلهٔ

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

از هم افراز می‌کنیم (توجه کنید که $x_0 = a, x_N = b$) . در این صورت ، از سه روش انتگرالگیری تقریبی یا عددی توصیف شده در این بخش ، اولی به‌نام *قاعدهٔ نقطهٔ میانی* چیزی جز تقریب I به وسیلهٔ مجموع ریمانی به شکل

$$\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right)(x_{2i} - x_{2i-2}), \tag{۲}$$

مستلزم n زیربازهٔ $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ ، هر یک به‌طول $x_{2i} - x_{2i-2}$ مساوی

$$2h = \frac{b-a}{n}$$

نیست .

نقطهٔ

$$\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

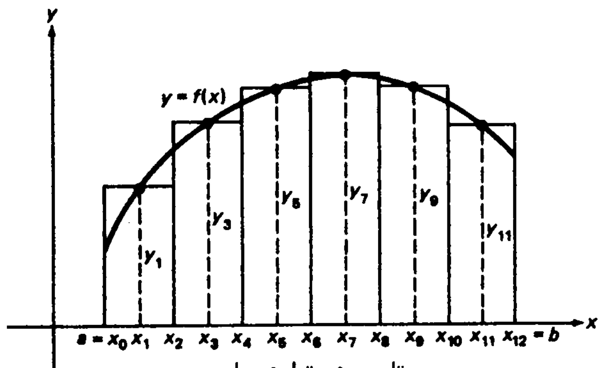
نقطهٔ میانی x_{2i-1} بازهٔ $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ بوده و می‌توان (۲) را به شکل زیر نوشت :

$$2h \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}, \tag{۲'}$$

که در آن $y_{2i-1} = f(x_{2i-1})$ مقدار تابع f در x_{2i-1} است . لذا ، قاعدهٔ نقطهٔ میانی عبارت است از تقریب

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}), \tag{۳}$$

به‌طور هندسی، این یعنی تعویض مساحت تحت منحنی $y=f(x)$ با مجموع مساحات n مستطیل، که هر مستطیل به عرض $2h=(b-a)/n$ بوده ومستطیل i م به ارتفاع y_{2i-1} و مساحت $2hy_{2i-1}$ می‌باشد، و این در شکل ۸ برای حالت 6 مستطیل $(n=6, N=12)$ توضیح داده شده است.



قاعدهٔ نقطهٔ میانی

شکل ۸

خطای E_M قاعدهٔ نقطهٔ میانی عددی است مانند E_M که باید به طرف راست (۳) افزود تامعادلهٔ دقیق به دست آید؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+E_M.$$

واضح است که E_M تابعی از n، یعنی تعداد زیربازه‌ها، است و براین امر می‌توان بانوشتن $E_M=E_M(n)$ تأکید نمود. فرض کنیم f دارای مشتق دوم f'' پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ باشد. می‌توان (بااستدلالی‌که خیلی تکنیکی است) نشان داد که به ازای نقطه‌ای چون c در $[a, b]$،

$$E_M=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(c) \qquad (۴)$$

بخصوص، (۴) ایجاب می‌کند

$$|E_M|\le\frac{(b-a)^3}{24n^2}\max|f''|, \qquad (۴')$$

که در آن $\max|f''|$ مقدار ماکزیمم $|f''(x)|$ بر بازهٔ $[a, b]$ است. ویژگی کلیدی‌فرمول(۴) این است که E_M به‌طور معکوس با مربع n متناسب است. لذا، می‌توان خطای E_M را با انتخاب n بزرگ، یعنی، یک‌تقسیم به‌قدرکافی‌ظریف‌ازبازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$، به قدر

مطلوب کوچک کرد .

مثال ۱ . با استفاده از قاعدهٔ نقطهٔ میانی به ازای $n = 10$ ، انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

را تقریب نمایید ، دقت تقریب چقدر است ؟

حل . چون از قبل می‌دانیم که $I = \ln 2 = 0.693147\ldots$ ، هدف این مثال نشان دادن قدرت قاعدهٔ نقطهٔ میانی است . در اینجا $a = 1, b = 2, f(x) = 1/x, N = 2n = 20$ ، و زیر بازه‌ها عبارتنداز $[1.0, 1.1], [1.1, 1.2], \ldots, [1.9, 2.0]$ با نقاط میانی $x_1 = 1.05,$ $x_3 = 1.15, \ldots, x_{19} = 1.95$. عرضهای نظیر $y_1, y_3, \ldots, y_{19}$ را تا چهار رقم اعشار حساب می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 1.05 & y_1 = 0.9524 \\
x_3 = 1.15 & y_3 = 0.8696 \\
x_5 = 1.25 & y_5 = 0.8000 \\
x_7 = 1.35 & y_7 = 0.7407 \\
x_9 = 1.45 & y_9 = 0.6897 \\
x_{11} = 1.55 & y_{11} = 0.6452 \\
x_{13} = 1.65 & y_{13} = 0.6061 \\
x_{15} = 1.75 & y_{15} = 0.5714 \\
x_{17} = 1.85 & y_{17} = 0.5405 \\
x_{19} = 1.95 & \underline{y_{19} = 0.5128} \\
 & \text{مجموع} = 6.9284
\end{array}$$

بنابراین ، طبق رابطهٔ (۳) ،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{10}(y_1 + y_3 + \cdots + y_{19}) = \frac{6.9284}{10} = 0.69284.$$

برای تعیین دقت این تقریب ، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{x} = \frac{2}{x^3}.$$

لذا ، فرمول (۴) به صورت زیر درمی‌آید :

$$|E_M| \le \frac{1}{24n^2} \max\left|\frac{2}{x^3}\right|,$$

یا

$$|E_M| \le \frac{1}{12n^2}, \tag{۵}$$

زیرا ماکزیمم $|2/x^3|$ بر $[1, 2]$ مساوی 2 است که در نقطهٔ $x = 1$ گرفته می‌شود. در واقع، با استفاده از فرمول (۴) و این امر که f'' بر $[1, 2]$ مثبت است، می‌بینیم که E_M نیز مثبت است. بنابراین، (۵) را می‌توان با

$$0 < E_M \le \frac{1}{12n^2} \tag{۵'}$$

عوض کرد. لذا، در این حالت، قاعدهٔ نقطهٔ میانی مقدار انتگرال I را تخمین نقصانی می‌زند. با گذاردن $n = 10$ در (۵')، معلوم می‌شود که

$$0 < E_M \le \frac{1}{1200} < 0.00084.$$

هر یک از عرضهای y_i تا چهار رقم اعشار حساب شده بود؛ و لذا، دارای خطای گردشدهٔ کمتر از 0.00005 است. اما کمیت 6.9284/10 متوسط ۱۰ عرض $y_1, y_3, \dots, y_{19}$ است؛ و درنتیجه، خطای گرد شدهٔ آن از 0.00005 نیز کمتر می‌باشد (چرا؟). این امر، همراه با تخمین خطای E_M، نشان می‌دهد که I بین $0.69284 - 0.00005 = 0.69279$ و $0.69284 + 0.00005 + 0.00084 = 0.69373$ قرار دارد. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب 0.001، $I = 0.693$ (یا حتی با تقریب 0.0005، $I = 0.69325$).

قاعدهٔ ذوزنقه. حال به روش انتگرالگیری تقریبی دیگری می‌پردازیم که به *قاعدهٔ ذوزنقه* معروف است. در این روش ایده تقریب انتگرال دادهٔ شدهٔ I به وسیله مجموعی به شکل

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1}) \tag{۶}$$

است که مستلزم نقاط تقسیم متساوی‌الفاصلهٔ

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \qquad (i = 0, 1, \dots, n)$$

و n زیر بازهٔ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ هر یک به طول $x_i - x_{i-1}$ مساوی

$$h = \frac{b-a}{n}$$

می‌باشد. (نمادگذاری (۶) از قاعدهٔ نقطهٔ میانی (۲) ساده‌تر است، زیرا نیازی به نقاط تقسیم اضافی برای نقاط میانی زیر بازه‌ها وجود ندارد.) توجه کنید که هر جمله در

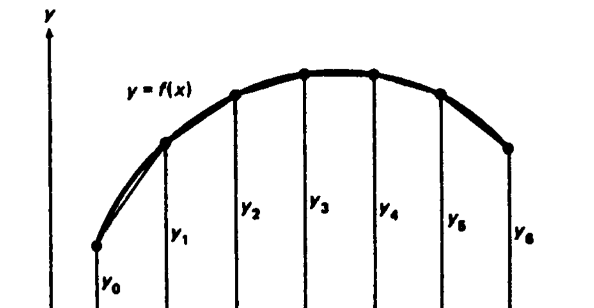
مجموع (۶) شامل متوسط دو مقدار از تابع f است، یعنی مقادیر در نقاط انتهایی یک زیر بازه، حال آنکه هر جمله در مجموع (۲) مستلزم فقط یک مقدار از f، یعنی مقدارش در نقطهٔ میانی یک زیر بازه، می‌باشد. همچنین، (۶) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)]=\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i), \tag{۶'}$$

که در آن $y_i=f(x_i)$. لذا، قاعدهٔ ذوزنقه عبارت است از تقریب

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n) \tag{۷}$$

(هر عرض y_i جز y_0 و y_n به صورت جفت در جملات متوالی $y_{i-1}+y_i$ ظاهر می‌شود؛ و لذا، در مجموع سمت راست ضریبی برابر 2 دارد). به‌طور هندسی، (۷) عبارت است از تعویض مساحت تحت منحنی $y=f(x)$ با مجموع مساحات n ذوزنقه، که در آن هر ذوزنقه به عرض $h=(b-a)/n$ بوده و ذوزنقهٔ i ام اضلاع موازی y_{i-1}, y_i داشته و، بنابر فرمول آشنایی از هندسهٔ مقدماتی، مساحت $h(y_{i-1}+y_i)/2$ را دارد. در شکل ۹ این تقریب برای حالت شش ذوزنقه $(n=6)$ توضیح داده شده است.



شکل ۹

خطای $E_T=E_T(n)$ قاعـدهٔ ذوزنقه مساوی عدد E_T تعریف می‌شود که باید به‌طرف راست (۷) افزوده شود تا معادلهٔ دقیق به دست آید؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n)+E_T.$$

فرض کنیم f بر بازهٔ $[a, b]$ مشتق دوم f'' پیوسته داشته باشد. در این صورت، می‌توان

نشان داد که به ازای نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ ،

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \tag{۸}$$

بخصوص، (۸) ایجاب می‌کند که

$$|E_T| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max |f''|, \tag{۸'}$$

که در آن $\max |f''|$ ماکزیمم $|f''(x)|$ بر بازهٔ $[a, b]$ است. واضح است که هرقدر n بزرگتر باشد، خطای E_T کوچکتر است؛ و در واقع، با عکس n^2 متناسب می‌باشد.

مثال ۲. انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \qquad (= \ln 2)$$

را با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه به ازای $n = 10$ تقریب کنید. خطای تقریب چقدر است؟

حل. در اینجا، مثل مثال ۱، $a = 1, b = 2, f(x) = 1/x, n = 10$ ، و زیر بازه‌ها مجددا" $[1.0, 1.1], [1.1, 1.2], \ldots, [1.9, 2.0]$ با نقاط انتهایی $x_0 = 1.0, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, \ldots, x_9 = 1.9, x_{10} = 2.0$ می‌باشند. با محاسبهٔ عرضهای نظیر $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_9, y_{10}$ تا چهار رقم اعشار، به دست می‌آوریم

$x_1 = 1.1$	$y_1 = 0.9091$	$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.0000$
$x_2 = 1.2$	$y_2 = 0.8333$	$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 0.5000$
$x_3 = 1.3$	$y_3 = 0.7692$		مجموع $= 1.5000$
$x_4 = 1.4$	$y_4 = 0.7143$		
$x_5 = 1.5$	$y_5 = 0.6667$		
$x_6 = 1.6$	$y_6 = 0.6250$		
$x_7 = 1.7$	$y_7 = 0.5882$		
$x_8 = 1.8$	$y_8 = 0.5556$		
$y_9 = 1.9$	$y_9 = 0.5263$		
	مجموع $= 6.1877$		

بنابراین، طبق (۷)،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2(10)} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_9 + y_{10})$$

$$= \frac{1}{20}[(y_0 + y_{10}) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_9)]$$

$$= \frac{1}{20}[1.5000 + 2(6.1877)] = \frac{13.8754}{20} = 0.69377.$$

برای تعیین دقت این تقریب ، ملاحظه‌می‌کنیم که بار دیگر $f''(x) = 2/x^3, \max|f''|$ $= 2, n = 10$. لذا ، از (۸) و (۸') نتیجه می‌شود که $E_T < 0$ و

$$|E_T| \le \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{600} < 0.00167.$$

توجه کنید که در این حالت قاعدهٔ ذوزنقه مقدار I را تخمین *اضافی* می‌زند . خطای گرد شدهٔ هر عرض از حیث قدرمطلق از 0.00005 کمتر است؛ و درنتیجه ، همین امر در مورد کمیت $13.8754/20$ درست‌است (توجه‌کنید که مجموع $\frac{1}{20}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_9 + y_{10})$ در واقع متوسط 20 عدد $y_0, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_9, y_9, y_{10}$ است که هر یک از اعداد $y_1, y_2, \ldots, y_9$ دوبار ظاهر شده است) . این امر ، همراه با تخمین ما از خطای E_T ، نشان می‌دهد که I بین $0.69377 - 0.00005 - 0.00167 = 0.69205$ و $0.69377 + 0.00005 = 0.69382$ قرار دارد . لذا ، می‌توان نتیجه گرفت که ، درست مثل مثال ۱ ، با تقریب 0.001 ، $I = 0.693$.

قاعدهٔ سیمپسون . قاعدهٔ سیمپسون مبتنی بر تقریب انتگرال

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

روی هر یک از n زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ سازندهٔ بازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$ به وسیلهٔ مساحت تحت نمودار یک‌تابع خطی $y = Ax + B$ ، یعنی پاره خط واصل‌بین‌دونقطهٔ (x_{i-1}, y_{i-1}) و (x_i, y_i) که $y_i = f(x_i)$ می‌باشد . حال به روش بسیار تواناتری از انتگرالگیری عددی به نام *قاعدهٔ سیمپسون* رومی‌آوریم . در اینجا شایسته است‌ازهمان‌نمادهای‌قاعدهٔ‌نقطهٔ‌میانی استفاده کنیم ، زیرا لازم است نقاط میانی زیربازه‌ها و نقاط‌انتهایی آنها را شماره گذاری کنیم . لذا ، با انتخاب عدد زوج مثبت $N = 2n$ ، نقاط تقسیم متساوی‌الفاصلهٔ

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i \qquad (i = 0, 1, \ldots, N),$$

به فاصلهٔ

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

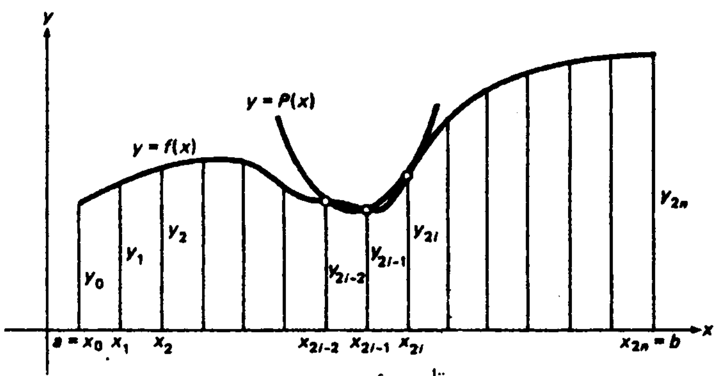
از یکدیگر، مثل صفحهٔ ۶۶۰، را معرفی می‌کنیم. نقاط $a = x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n} = b$ بازهٔ $[a, b]$ را به n زیربازه هر یک به طول $2h$ تقسیم می‌کنند، که x_{2i-1} نقطهٔ میانی $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ می‌باشد. سپس انتگرال داده شده را به صورت

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\,dx \qquad (9)$$

می‌نویسیم، و هر انتگرال مجموع سمت راست را با مساحت تحت نمودار تابع درجهٔ دوم

$$y = P(x) = A + Bx + Cx^2$$

تقریب می‌کنیم، که در آن ضرایب A، B، و C چنانند که منحنی $y = P(x)$ از سه نقطهٔ (x_{2i-2}, y_{2i-2})، (x_{2i-1}, y_{2i-1})، و (x_{2i}, y_{2i}) می‌گذرد. هرگاه این نقاط غیر همخط باشند، آنگاه $C \neq 0$، و منحنی $y = P(x)$ سهمیی است که محور تقارنش مثل شکل ۱۰ قائم می‌باشد.



شکل ۱۰

حال، با فرض $r = x_{2i-2}$ و $s = x_{2i}$ جهت اختصار، درمی‌یابیم که

$$\int_r^s P(x)\,dx = \int_r^s (A + Bx + Cx^2)\,dx = \left[Ax + \frac{1}{2}Bx^2 + \frac{1}{3}Cx^3\right]_r^s$$

$$= A(s - r) + \frac{1}{2}B(s^2 - r^2) + \frac{1}{3}C(s^3 - r^3)$$

$$= \frac{s - r}{6}[6A + 3B(r + s) + 2C(r^2 + rs + s^2)].$$

بنابراین ، پس از کمی عمل جبری ،

$$\int_r^s P(x)\,dx$$
$$= \frac{s-r}{6}\left[A + Br + Cr^2 + 4A + 4B\left(\frac{r+s}{2}\right) + 4C\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 + A + Bs + Cs^2\right]$$

و درنتیجه ،

$$\int_r^s P(x)\,dx = \frac{s-r}{6}\left[P(r) + 4P\left(\frac{r+s}{2}\right) + P(s)\right] \qquad (۱۰)$$

چون $s - r = x_{2i} - x_{2i-2} = 2h$ و $\frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}(x_{2i-2} + x_{2i}) = x_{2i-1}$ ،فرمول (۱۰) برحسب x_{2i-2} ، x_{2i-1} ، و x_{2i} به صورت زیر درمی‌آید :

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x)\,dx = \frac{h}{3}[P(x_{2i-2}) + 4P(x_{2i-1}) + P(x_{2i})].$$

اما $f(x)$ و $P(x)$ به ازای $x = x_{2i-2}$ ، $x = x_{2i-1}$ ، و $x = x_{2i}$ یکی هستند ، زیرا منحنی $y = P(x) = A + Bx + Cx^2$ طوری اختیار شده است که از نقاط (x_{2i-2}, y_{2i-2}) ، (x_{2i-1}, y_{2i-1}) ، و (x_{2i}, y_{2i}) می‌گذرد . لذا ،

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$
$$= \frac{b-a}{6n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

(توجه کنید که لازم نیست ضرایب A ، B ، و C صریحا" تعیین شوند) . با تقریب هریک از n انتگرال سمت راست (۹) با عبارتی از این نوع (مساحت تحت یک سهمی) ،بالاخره قاعدهٔ سیمپسون به دست می‌آید :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}), \qquad (۱۱)$$

یا معادلا"

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1})].$$
(۱۱')

خطای $E_S = E_S(n)$ قاعدهٔ سیمپسون مساوی عدد E_S تعریف می‌شود که باید به طرف راست (۱۱) افزود تا معادلهٔ دقیق به دست آورد؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}) + E_S.$$

فرض کنیم f دارای مشتق چهارم $f^{(4)}$ بر بازهٔ $[a, b]$ باشد. در این صورت، می‌توان با استدلالی پیشرفته نشان داد که به ازای نقطه‌ای چون c در $[a, b]$،

$$E_S = -\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} f^{(4)}(c) \qquad (۱۲)$$

بخصوص، (۱۲) ایجاب می‌کند که

$$|E_S| \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \max |f^{(4)}|, \qquad (۱۲')$$

که در آن $|f^{(4)}|$ ماکزیمم $|f^{(4)}(x)|$ بر بازهٔ $[a, b]$ است. ویژگی اصلی فرمول (۱۲) این است که E_S با توان چهارم n نسبت‌عکس دارد؛ درنتیجه، E_S با افزایش n به‌طوربسیار سریع به صفر نزدیک می‌شود.

مثال ۳. انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \qquad (= \ln 2)$$

را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون به ازای $n = 5$ تقریب کنید. خطای‌تقریب چقدر است؟

حل. همانند مثالهای ۱و۲، $a = 1,\ b = 2,\ f(x) = 1/x$، ولی دراینجازیربازه‌هاعبارتنداز $[1.0, 1.2], [1.2, 1.4], \ldots, [1.8, 2.0]$ با نقاط‌انتهایی $x_0 = 1.0,\ x_2 = 1.2,\ x_4 = 1.4, \ldots, x_8 = 1.8,\ x_{10} = 2.0$ و نقاط میانی $x_1 = 1.1,\ x_3 = 1.3, \ldots, x_9 = 1.9$. اگر عرضهای نظیر را تا پنج رقم اعشار حساب کنیم، به دست می‌آوریم

$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.00000$	$x_1 = 1.1$	$y_1 = 0.90909$
$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 0.50000$	$x_3 = 1.3$	$y_3 = 0.76923$
	مجموع $= 1.50000$	$x_5 = 1.5$	$y_5 = 0.66667$
		$x_7 = 1.7$	$y_7 = 0.58824$
		$x_9 = 1.9$	$y_9 = 0.52632$
			مجموع $= 3.45955$

$$\begin{array}{ll} x_2 = 1.2 & y_2 = 0.83333 \\ x_4 = 1.4 & y_4 = 0.71429 \\ x_6 = 1.6 & y_6 = 0.62500 \\ x_8 = 1.8 & y_8 = 0.55556 \\ \hline & \text{مجموع} = 2.72818 \end{array}$$

بنابراین، طبق (۱۱') به ازای $n = 5$ ،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{6(5)} [(y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

$$= \frac{1}{30} [1.500000 + 2(2.72818) + 4(3.45955)] = \frac{20.79456}{30} = 0.693152.$$

برای تعیین دقت این تقریب، ملاحظه‌می‌کنیم‌که مشتق چهارم انتگرالده $f(x) = 1/x$ مساوی است با

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{x} = \frac{24}{x^5}.$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۱۲)، $E_S < 0$ ؛ درنتیجه، قاعدهٔ سیمپسون در این حالت مقدار I را *تخمین اضافی* می‌زند. به‌علاوه، طبق (۱۲')،

$$|E_S| \le \frac{24}{180(10)^4} = \frac{1}{75000} < 0.000014,$$

زیرا ماکزیمم $|24/x^5|$ بر بازهٔ $[1, 2]$ مساوی 24 است که در نقطهٔ $x = 1$ گرفته می‌شود. هر عرض تا پنج رقم اعشار حساب شده است؛ ولذا، خطای گرد شده از 0.000005 کمتر است. از اینرو، خطای گرد شدهٔ کمیت 20.79456/30 نیز از 0.000005 کمتر می‌باشد (20.79456/30 را به عنوان متوسط 30 عدد تعبیر کنید). این امر، همراه با تخمین ما از خطای E_S ، نشان می‌دهد که I بین $0.693152 - 0.000005 - 0.000014 = 0.693133$ و $0.693157 = 0.693152 + 0.000005$ قرار دارد. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب 0.000012، $I = 0.693145$. درواقع، همانطور که قبلاً گفته شد، $I = \ln 2 = 0.693147\ldots$.

مقایسهٔ مثالهای ۱ تا ۳ قدرت عظیم قاعدهٔ سیمپسون را آشکار می‌سازد. در واقع، در محاسبهٔ انتگرال $\int_1^2 dx/x$ ، قاعدهٔ سیمپسون فقط با پنج زیربازه خیلی از قواعدنقطهٔ میانی یا ذوزنقه با دوبرابر این تعداد زیربازه دقیقتر است؟

مثال ۴. انتگرال

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون تقریب کنید.

حل. همانطورکه‌درصفحهٔ ۵۹۱ گفته‌شد، انتگرال‌نامعین $\int e^{-x^2}dx$ یک تابع مقدماتی نیست. لذا، باید I را به‌وسیلهٔ انتگرالگیری تقریبی حساب کنیم. برای این کار قاعدهٔ سیمپسون را به ازای $n = 5$ به‌کار می‌بریم. ماکزیمم قدر مطلق مشتق چهارم انتگرالده e^{-x^2} بربازهٔ $[0, 1]$ مساوی 12 است (ر.ک. مسئلهٔ ۲۳)؛ و درنتیجه، بنابر تخمین (۱۲')،

$$|E_S| \le \frac{12}{180(10)^4} = \frac{1}{150000} < 0.000007.$$

با استفاده از ماشین حساب، عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{array}{llcll}
x_0 = 0.0 & y_0 = 1.00000 & & x_1 = 0.1 & y_1 = 0.99005 \\
x_{10} = 1.0 & y_{10} = 0.36788 & & x_3 = 0.3 & y_3 = 0.91393 \\
 & \text{مجموع} = 1.36788 & & x_5 = 0.5 & y_5 = 0.77880 \\
 & & & x_7 = 0.7 & y_7 = 0.61263 \\
 & & & x_9 = 0.9 & y_9 = 0.44486 \\
 & & & & \text{مجموع} = 3.74027
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x_2 = 0.2 & y_2 = 0.96079 \\
x_4 = 0.4 & y_4 = 0.85214 \\
x_6 = 0.6 & y_6 = 0.69768 \\
x_8 = 0.8 & y_8 = 0.52729 \\
 & \text{مجموع} = 3.03790
\end{array}$$

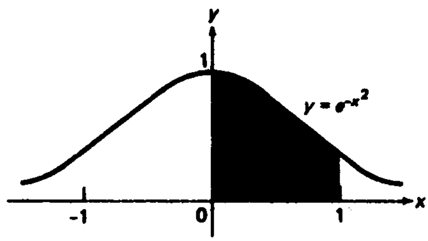
بنابراین، طبق همان صورتی از قاعدهٔ سیمپسون که در مثال ۳ به کار رفت،

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{30}[1.36788 + 2(3.03790) + 4(3.74027)]$$

$$= \frac{22.40476}{30} = 0.746825.$$

پس از احتساب خطای گرد شده و تخمین ما از $|E_S|$، معلوم می‌شود که در اینجا I فقط با تقریب $0.000007 + 0.000005 = 0.000012$ معلوم است. لذا، فقط می‌توان از چهار رقم

اول اعشار مطمئن بود ، ولی محاسبات دقیقتر نشان می دهند که تقریب $I \approx 0.746825$ در واقع با تقریب 0.000001 درست است . در شکل ۱۱ منحنی $y = e^{-x^2}$ را کشیده‌ایم که



شکل ۱۱

" زنگدیس " است . انتگرال I مساحت ناحیهٔ سایه‌دار تحت منحنی از $x = 0$ تا $x = 1$ است . (برای راه دیگر تقریب I ، ر.ک. مثال ۹ ، صفحهٔ ۸۵۷ .)

تبصره . تابع غیرمقدماتی

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \qquad (۱۳)$$

اهمیت زیادی در ریاضیات ، بخصوص در نظریهٔ احتمال و کاربردهای آن ، دارد . تابع

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt, \qquad (۱۳')$$

که با (۱۳) در عامل $2/\sqrt{\pi}$ اختلاف دارد ، **تابع خطا** نام دارد . انتگرال (۱۳) وقتی $x \to \infty$ ، به $\sqrt{\pi}/2$ نزدیک می‌شود (ر.ک. مثال ۳ ، صفحهٔ ۱۳۹۹) ؛ و درنتیجه ، عامل $2/\sqrt{\pi} = 1.128379\ldots$ در (۱۳′) سبب می‌شود که وقتی $x \to \infty$ ، $\operatorname{erf} x$ به 1 نزدیک شود.

مسائل

انتگرال داده شده را ابتدا با قاعدهٔ نقطهٔ میانی و سپس قاعدهٔ ذوزنقه به‌ازای n مشخص شده ، یعنی تعداد زیربازه‌ها ، تقریب کنید . مقادیر عرضها را تا چهار رقم اعشار حساب کرده ، و جواب را تا سه رقم (بدون تلاش در تخمین خطا) بیان نمایید .

۱ . $\int_0^2 \sqrt{x^4 + 1}\,dx, n = 4$

۲ . $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}, n = 4$

۳ . $\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\,dx, n = 5$

۴ . $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx, n = 5$

۵. $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx,\ n=5$ ۶. $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx,\ n=10$

در مسئلهٔ ۴، مقدار انتگرالده در $x=0$ مساوی 1 گرفته شده است.

۷. فرض کنید M_n تقریب انتگرال $I=\int_a^b f(x)\,dx$ مبتنی بر قاعدهٔ نقطهٔ میانی با n زیربازه بوده، و T_n تقریب I مبتنی بر قاعدهٔ ذوزنقه با n زیربازه باشد. T_{2n} را برحسب T_n و M_n بیان کنید.

۸. نشان دهید که مجموع (۶) مذکور در قاعدهٔ ذوزنقه در واقع مجموع ریمانی برای تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ است.

۹. با استفاده از فرمول (۴′)، تعداد n زیربازه‌هایی را بیابید که خطای E_M حاصل از تقریب انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ بوسیلهٔ قاعدهٔ نقطهٔ میانی ازحیث قدر مطلق از 0.0001 کوچکتر باشد. با استفاده از فرمول (۸′)، همین کار را برای قاعدهٔ ذوزنقه انجام دهید.

۱۰. نشان دهید که هر دو قاعدهٔ نقطهٔ میانی و قاعدهٔ ذوزنقه درصورتی مقدار دقیق انتگرال $I=\int_a^b f(x)\,dx$ را به دست می‌دهند که انتگرالده یک تابع خطی مانند $f(x)=Ax+B$ باشد ولی اگر یک تابع درجهٔ دوم باشد $f(x)=A+Bx+Cx^2\ (C\neq 0)$ این طور نخواهد بود.

۱۱. برای خطاهای $E_M=E_M(n)$ و $E_T=E_T(n)$ حاصل در قواعد نقطهٔ میانی و ذوزنقه برای تقریب انتگرال $I=\int_{-1}^{1}|x|\,dx$ عبارات دقیق پیدا کنید.

۱۲. فرض کنید $I=\int_a^b f(x)\,dx$، که در آن f دارای مشتق دوم f'' پیوسته بر $[a, b]$ است که در هر نقطه از $[a, b]$ ناصفر می‌باشد. نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ به بالا مقعر باشد، آنگاه قاعدهٔ نقطهٔ میانی I را تخمین نقصانی زده و قاعدهٔ ذوزنقه I را تخمین اضافی می‌زند، حال آنکه اگر f بر $[a, b]$ به پایین مقعر باشد، قاعدهٔ نقطهٔ میانی I را تخمین اضافی و قاعدهٔ ذوزنقه I را تخمین نقصانی می‌زند.

۱۳. نشان دهید که فرمول منشور

$$\int_r^s P(x)\,dx=\frac{s-r}{6}\left[P(r)+4P\left(\frac{r+s}{2}\right)+P(s)\right] \qquad \text{(یک)}$$

به ازای هر چندجمله‌ای $P(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3$ از درجهٔ نابیشتر از 3 معتبر است. (به ازای $D=0$، فرمول (یک) قبلاً درحین اثبات قاعدهٔ سیمپسون ثابت شده است.) با مثال، شکست فرمول منشور را برای یک چندجمله‌ای درجهٔ 4 نشان دهید.

۱۴ . نشان دهید که اگر انتگرالده تابعی مکعبی چون $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ باشد، قاعدهٔ سیمپسون مقدار دقیق انتگرال $I = \int_a^b f(x)\,dx$ را به ما می‌دهد، ولی درصورتی که $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ $(E \neq 0)$ این‌طور نخواهد بود .

راهنمایی . از فرمول (۱۲) استفاده کنید .

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول منشور (یک) حساب کنید .

۱۵ . $\int_0^2 (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx$

۱۶ . $\int_{1/2}^{3/2} (8x^3 - 4x^2 + 2x - 1)\,dx$

۱۷ . جدول مقادیر

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

تمام چیزی است که از تابع f می‌دانیم . انتگرال $\int_{1.05}^{1.35} f(x)\,dx$ را بااستفاده‌ازقاعدهٔ سیمپسون تخمین بزنید .

۱۸ . مقدار دقیق انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

را یافته ، و تحقیق کنید که تقریب I با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون با فقط دو زیر بازه به اندازهٔ 0.00001 دقیق است .

انتگرال داده شده را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون با مقدار ذکر شدهٔ n که تعداد زیر بازه‌هاست تقریب نمایید . مقادیر عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب کرده ، و جواب را (بدون سعی در تخمین خطا) تا چهار رقم اعشار بیان نمایید .

۱۹ . $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx,\ n = 3$

۲۰ . $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x},\ n = 4$

۲۱ . $\int_1^2 \sqrt{\ln x}\,dx,\ n = 4$

۲۲ . $\int_0^2 \sin \frac{\pi x^2}{2}\,dx,\ n = 8$

۲۳ . اگـر $f(x)=e^{-x^2}$ ، نشان دهید که قدرمطلق مشتق چهارم $f^{(4)}(x)$ بـر بـازهٔ $[0, 1]$ از 12 تجاوز نمی‌کند . آیا $f^{(4)}$ بر $[0, 1]$ علامت ثابت دارد ؟

۹.۷ انتگرالهای مجازی

در معرفی مفهوم انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ از آغاز فرض‌شد که بازهٔ‌انتگرالگیری $[a, b]$ بسته و *کراندار* است . به‌علاوه ، انتگرالده f باید بر $[a, b]$ *کراندار* باشد ، زیرا در غیر ایـن صورت حد معرف انتگرال موجود نیست (ر.ک . مسئلهٔ ۳۳، صفحهٔ ۳۸۱) .لذا ، در حال حاضر ، انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \tag{1}$$

بی‌معنی است ، زیرا بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران است . انتگرال

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{2}$$

نیز بی‌معنی است ، زیرا انتگرالده $1/\sqrt{x}$ وقتی $x \to 0^+$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود؛ ولذا، بر بازهٔ $[0, 1]$ بی‌کران می‌باشد .

تبصره . تابع $1/\sqrt{x}$ درنقطهٔ $x=0$ تعریف نشده‌است ، ولی در کنار دلیل عدم‌وجود (۲) که بی‌کرانی $1/\sqrt{x}$ بر بازهٔ انتگرالگیری است ، تصادفی می‌باشد . مثلا" ،

$$f(x)=\begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{اگر } x>0 \\ 0 & \text{اگر } x=0 \end{cases}$$

نیز بر $[0, 1]$ بی‌کران و درنتیجه انتگرال‌ناپذیر است ،اگرچه در هرنقطه از $[0, 1]$ تعریف شده است .

هر انتگرال با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران یا انتگرالدهٔ بی‌کران (یا هر دو) را ، به خلاف انتگرالهای معمولی یا حقیقی که تا بحال دیده‌ایم ، **مجازی** می‌نامند . همانطور کـه اینک نشان می‌دهیم ، راهی برای انتساب مقدار عددی به انتگرالهای مجازی ، بخصوص انتگرالهای (۱) و (۲) ، وجود دارد .

بازه‌های انتگرالگیری بی‌کران . ابتدا انتگرالهـایی مجازی مانند انتگرال (۱) ، با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران ،رادرنظر می‌گیریم . فرض کنیم f بر بازهٔ نامتناهی $[a, \infty)$ پیوستـه بوده ، و حد

$$\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx \qquad (u>a) \tag{3}$$

موجود و متناهی باشد . (چون تابع f بر $[a, \infty)$ پیوسته است ،بر هرزیر بازهٔ $[a, u]$ پیوسته و درنتیجه انتگرالپذیر است .) در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{۴}$$

همگرا است ، و مقدار (۳) را به آن نسبت می‌دهیم . اما ، اگر حد (۳) نامتناهی بوده یا وجود نداشته باشد ، گوییم انتگرال (۴) *واگرا* است . به همین نحو ، فرض کنیم f بر بازهٔ $(-\infty, b]$ پیوسته بوده ، و حد

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)\,dx \qquad (u < b) \tag{۳'}$$

موجود و متناهی باشد . در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{۴'}$$

همگراست و به آن مقدار (۳') را نسبت می‌دهیم ، ولی انتگرال (۴') را واگرا گوییم اگرحد (۳') نامتناهی بوده یا موجود نباشد .

همچنین ، انتگرالهای مجازی از نوع

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \tag{۵}$$

وجود دارند ، که در آن هر دو حد انتگرالگیری نامتناهی بوده و f بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ پیوسته است . فرض کنیم هر دو انتگرال (مجازی)

$$I_2 = \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{و} \quad I_1 = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

همگرا باشند ، که درآنها a عدد حقیقی دلخواهی است . در این صورت ، گوییم انتگرال (۵) *همگرا* است و به آن مقدار $I_1 + I_2$ نسبت می‌دهیم ؛ یعنی ،

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx, \tag{۶}$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۵) *واگرا* می‌باشد . به عنوان تمرین ، نشان دهیدکه‌انتخاب خاص عدد a بر همگرایی یا واگرایی I_1 و I_2 ، یا مقدار $I_1 + I_2$ در حالت همگرایی،تأثیر ندارد ؛ درنتیجه ، می‌توان مثلاً " $a = 0$ را اختیار کرد .

مثال ۱. انتگرال مجازی

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2},$$

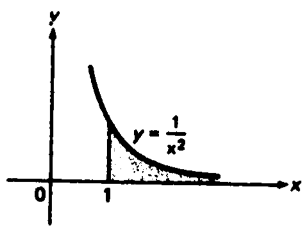
که در آغاز بخش مطرح شد ، همگراست . در واقع ،

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = \lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right) = 1,$$

و لذا ،

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^2} = 1.$$

با تعمیم طبیعی تعریف مساحت تحت یک منحنی در حالت بازهٔ انتگرالگیری کراندار ، می‌توان مقدار این انتگرال مجازی ، یعنی عدد ۱ ، را مساحت تحت منحنی $y = 1/x^2$ از $x = 1$ تا $x = \infty$ گرفت.[1] لذا ، ممکن است برای یک ناحیهٔ بی‌کران ، در اینجا ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۲ " که تا بی‌نهایت گسترش یافته " ، مساحت متناهی داشته باشیم .



شکل ۱۲

از نظر تکنیکی ، یک‌ناحیه را *کراندار* یا *متناهی* گوییم اگر کاملا " داخل دایرهٔ (به‌قدر کافی بزرگی) به مرکز مبداء قرار داشته باشد . در غیر این صورت گوییم ناحیه *بی‌کران* یا *نامتناهی* است . به عبارت دیگر ، یک ناحیهٔ بی‌کران شامل نقاطی است که بدلخواه‌ازمبداء دور می‌باشند .

مثال ۲. انتگرال مجازی

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

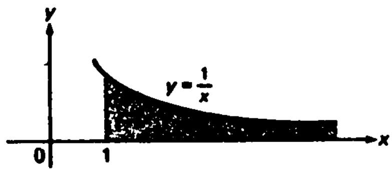
---

۱ . در نگارش $x = \infty$ قید قبلی (برای گذاردن علامت ∞ یا $-\infty$ بعد از علامت تساوی) را برمی‌داریم تا نمادها یکنواخت باشند .

واگراست ، زیرا

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u\to\infty} \ln x\Big|_1^u = \lim_{u\to\infty} \ln u = \infty.$$

لذا ، مساحت تحت‌منحنی $y = 1/x$ از $x = 1$ تـا $x = \infty$ ،یعنی مساحت‌ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران در شکل ۱۳ ، را باید نامتناهی درنظر گرفت .



شکل ۱۳

مثال ۳. چون تابع

$$\int_0^u \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^u = 1 - \cos u$$

وقتـی $u \to \infty$ ، بین مقادیر 0 و 2 جلو و عقب می‌رود ، فورا" می‌بینیم که حد

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u \sin x\,dx$$

وجـود ندارد . لذا ، انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \sin x\,dx$$

واگرا می‌باشد .

مثال ۴. انتگرال مجازی

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$$

همگراست . در واقع ،

$$\int_0^\infty e^{-|x|}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{u\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^u = \lim_{u\to\infty}(1 - e^{-u}) = 1,$$

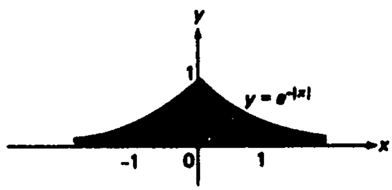
زیرا به ازای $x \geq 0$ ، $|x| = x$ و وقتی $u \to \infty$ ، $e^{-u} \to 0$ ، حال آنکه

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{u\to-\infty} e^{x}\Big|_{u}^{0} = \lim_{u\to-\infty}(1-e^{u}) = 1,$$

زیرا به ازای $x \leq 0$ ، $|x| = -x$ و وقتی $u \to -\infty$ ، $e^{u} \to 0$. بنابراین ، طبق‌رابطهٔ (۶) به ازای $a = 0$ ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = 1 + 1 = 2.$$

لذا ، می‌توان عدد 2 را مساحت‌ناحیهٔ سایه‌دار نامتناهی‌شکل۱۴ تحت منحنی $y = e^{-|x|}$ از $x = -\infty$ تا $x = \infty$ درنظر گرفت .



شکل ۱۴

انتگرالدههای بی‌کران . حال انتگرالهای مجازی ، مانند انتگرال (۲) ، باانتگرالده‌بی‌کران را درنظر می‌گیریم . فرض‌کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ نیمباز $[a, b)$ باشد که‌وقتی $x \to b^-$ به‌بی‌نهایت (∞ یا $-\infty$) نزدیک می‌شود ، و نیز حد

$$\lim_{u\to b^-}\int_{a}^{u} f(x)\,dx \qquad (a < u < b) \tag{۷}$$

موجود و متناهی باشد . (چرا f بر هر زیر بازهٔ $[a, u]$ انتگرالپذیر است ؟) دراین‌صورت گوییم انتگرال مجازی

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{۸}$$

همگرا است ، و به‌آن مقدار (۷) را نسبت می‌دهیم . اما ، اگر حد (۷) نامتناهی بوده یا وجود نداشته باشد ، گوییم انتگرال (۸) *واگرا* می‌باشد . به همین نحو ، فرض‌کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر $(a, b]$ باشد که‌وقتی $x \to a^+$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود ، و نیز حد

$$\lim_{u\to a^+}\int_{u}^{b} f(x)\,dx \qquad (a < u < b) \tag{۷'}$$

موجود و متناهی باشد . در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی (۸) همگراست و مقدار (۷') را به آن نسبت می‌دهیم ، ولی انتگرال (۸) واگراست اگر حد (۷') نامتناهی بوده‌یاوجود نداشته باشد .

همچنین ، حالتی وجود دارد که در آن $f(x)$ با نزدیک شدن x به نقطهٔ درونی c از $[a, b]$ بی‌نهایت می‌شود . به‌طور دقیقتر ،فرض‌کنیم $f(x)$ در دوطرف c ، یعنی بربازه‌های $[a, c)$ و $(c, b]$ ، پیوسته بوده ، و وقتی x از یک یا دوطرف به c نزدیک شود ، $f(x)$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود . در این صورت ، اگر هر دو انتگرال

$$I_1 = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad I_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

همگرا باشند (یا یکی همگرا و دیگری حقیقی باشد) ، گوییم انتگرال (۸) همگراست و مقدار $I_1 + I_2$ را به آن نسبت می‌دهیم ؛ یعنی ،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۸) واگراست .

مثال ۵. انتگرال مجازی

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

مطرح شده در آغاز بخش، همگراست . در واقع ،

$$\lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_u^1 = \lim_{u\to 0^+} (2 - 2\sqrt{u}) = 2,$$

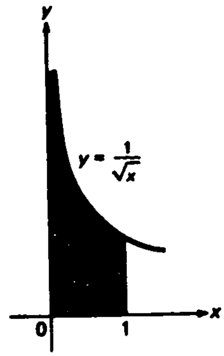
و درنتیجه ،

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

لذا ،می‌توان‌عدد 2 را مساحت‌تحت‌منحنی $y = 1/\sqrt{x}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ گرفت (مساحت ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران در شکل ۱۵) . این مثال دیگری است از یک ناحیهٔ نامتناهی با مساحت متناهی .

مثال ۶. انتگرال مجازی

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \qquad (۹)$$

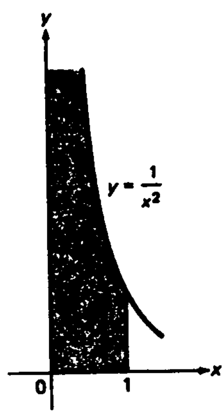


شکل ۱۵

واگراست ، زیرا

$$\lim_{u\to 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{u\to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_u^1 = \lim_{u\to 0^+} \left(\frac{1}{u} - 1\right) = \infty.$$

لذا ، مساحت تحت منحنی $y = 1/x^2$ از $x = 0$ تا $x = 1$ (مساحت ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران شکل ۱۶) را باید نامتناهی گرفت .



شکل ۱۶

مثال ۷. چون انتگرال (۹) واگراست ، انتگرال

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

نیز چنین است (ر.ک. بحث پیش از مثال ۵) . فرض کنیم در محاسبهٔ صوری این انتگرال

اشتباه کرده، این امر را که انتگرالده در مبداء $x = 0$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود نادیده بگیریم . در این صورت ، نتیجهٔ پوچ

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$$

را به دست می‌آوریم که تابع مثبتی با انتگرال منفی را نشان می‌دهدا

مثال ۸. انتگرال مجازی

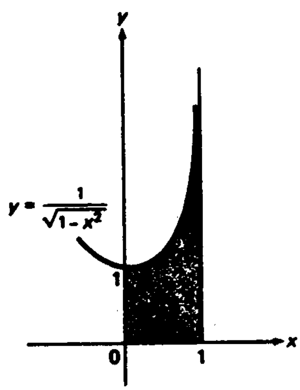
$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

همگرا و مساوی $\pi/2$ است . در واقع ، بنابر پیوستگی سینوس معکوس،

$$I = \lim_{u \to 1^-} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{u \to 1^-} \arcsin x \Big|_0^u$$

$$= \lim_{u \to 1^-} \arcsin u = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

از نظر هندسی ، I مساحت ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران شکل ۱۷ است .



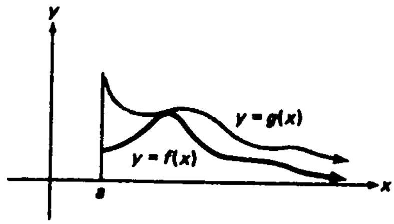
شکل ۱۷

قضیهٔ زیر یک ابزار قوی برای بررسی انتگرالهای مجازی به ما می‌دهد .

قضیهٔ ۶ (آزمون مقایسه برای انتگرالهای مجازی) . *فرض کنیم f و g توابع پیوسته‌ای باشند به طوری که به ازای هر $x \ge a$ ، $0 \le f(x) \le g(x)$. در این صورت ،*

(یک) اگر $\int_a^\infty g(x)\,dx$ همگرا باشد ، $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز چنین است ؛
(دو) اگر $\int_a^\infty f(x)\,dx$ واگرا باشد ، $\int_a^\infty g(x)\,dx$ نیز چنین است .

با آنکه برهان قضیهٔ ۶ مستلزم تکنیکهایی است ، و لذا حذف شده است ، مضمون شهودی قضیه از شکل ۱۸ واضح است : هرگاه مساحت‌تحت منحنی بالایی $y = g(x)$ متناهی



مقایسهٔ دو تابع بر یک بازهٔ بی‌کران

شکل ۱۸

باشد ، آنگاه مساحت تحت منحنی پایینی $y = f(x)$ نیز چنین است ، زیرا دومی نمی‌تواند از اولی متجاوز باشد . از آن سو ، اگر مساحت تحت منحنی پایینی نامتناهی باشد ، مساحت تحت منحنی بالایی نیز چنین است ، زیرا دومی نمی‌تواند از اولی تجاوز کند . توجه کنید که چون توابع f و g نامنفی‌اند ، نوسانات شبیه مثال ۳ نمی‌توانند در اینجا رخ دهند ، و واگرایی انتگرالهای $\int_a^\infty f(x)\,dx$ و $\int_a^\infty g(x)\,dx$ فقط می‌تواند به معنی

$$\lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx = \infty \quad , \quad \lim_{u\to\infty} \int_a^u g(x)\,dx = \infty$$

باشد .

مشابه‌های آزمون مقایسه برای انواع دیگر انتگرالهای مجازی وجود دارند . مثلاً ، فرض کنیم f و g توابع پیوسته‌ای باشند به‌طوری که

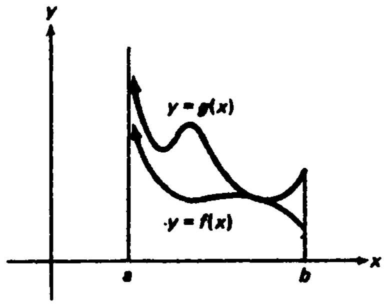
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty,$$

و فرض می‌کنیم به ازای هر $a < x \le b$ ، $0 \le f(x) \le g(x)$. در این صورت ،
(یکʼ) اگر $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرا باشد ، $\int_a^b f(x)\,dx$ نیز چنین است ؛
(دوʼ) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرا باشد ، $\int_a^b g(x)\,dx$ نیز چنین است .
باتوجه به شکل ۱۹ ، قسمتهای (یکʼ) و (دوʼ) را تعبیر هندسی کنید .

مثال ۹. نشان دهید که انتگرال مجازی

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

همگراست .



مقایسهٔ دو تابع بی‌کران

شکل ۱۹

حل . چون I مجموع انتگرال حقیقی

$$\int_0^{1} e^{-x^2}\,dx$$

و انتگرال مجازی

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad (۱۰)$$

است ، کافی است نشان دهیم که انتگرال (۱۰) همگراست . با توجه‌به $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$ به ازای هر $x \ge 1$ (ولی نه به ازای $0 < x < 1$)، و اعمال قضیهٔ ۶، می‌توان همگرایی انتگرال " مشکل " (۱۰) را از انتگرال خیلی "آسانتر"

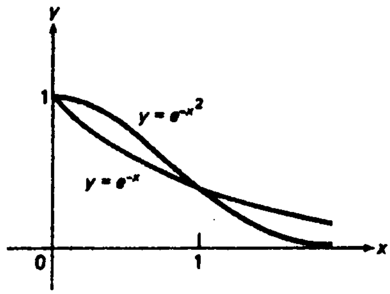
$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^{u} e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty} (-e^{-x})\Big|_1^{u}$$
$$= \lim_{u\to\infty} (e^{-1} - e^{-u}) = e^{-1}$$

نتیجه گرفت . شکل ۲۰ معنی هندسی آزمون مقایسه ، به کار رفته در این مثال ، را نشان می‌دهد . همانطور که در تبصرهٔ صفحهٔ ۶۷۲ گفتیم ، معلوم می‌شود که $I = \sqrt{\pi}/2$.

مثال ۱۰ . نشان دهید که انتگرال مجازی

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \sin x}$$

واگراست .



شکل ۲۰

حل . لازم نیست انتگرال را حساب کنیم . ابتدا ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر $0 < x \leq \pi/2$ ،

$$\frac{1}{x \sin x} \geq \frac{1}{x} > 0$$

(چرا ؟) ، و سپس اینکه انتگرال

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{u \to 0^+} \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{x} = \lim_{u \to 0^+} \ln x \Big|_u^{\pi/2} = \lim_{u \to 0^+} \left(\ln \frac{\pi}{2} - \ln u \right) = \infty.$$

حال واگرایی I نتیجه‌ای است از آزمون مقایسه به شکل (دو′) .

همچنین ، انتگرالهای مجازی " از نوع مخلوط " ، که در آنها بازهٔ انتگرالگیری و انتگرالده هر دو بی‌کرانند ، نیز وجود دارند . مثلاً ، فرض کنیم $f(x)$ بر بازهٔ (a, ∞) پیوسته بوده و وقتی $x \to a^+$ به بی‌نهایت نزدیک شود ، و نیز هر دو انتگرال مجازی

$$I_1 = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad I_2 = \int_c^\infty f(x)\,dx \qquad (a < c < \infty)$$

همگرا باشند . در این صورت ، گوییم انتگرال مجازی

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{11}$$

همگراست و به آن مقدار $I_1 + I_2$ را نسبت می‌دهیم؛ یعنی،

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)\,dx, \qquad (۱۲)$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۱۱) واگرا می‌باشد. در اینجا به این مطلب ساده تکیه داریم که همگرایی یا واگرایی انتگرالهای I_1 و I_2، و مقدار مجموع آنها درصورتی‌که هردوهمگرا باشند، به انتخاب نقطهٔ میانی c بستگی ندارد (این مطلب را نشان دهید).

مثال ۱۱. انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$$

واگراست. در واقع، با انتخاب $c = 1$ در (۱۲)، داریم

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

از دو انتگرال سمت راست، دومی طبق مثال ۱ همگراست ولی اولی طبق مثال ۶ واگراست. از اینرو، انتگرال سمت چپ نیز واگرا می‌باشد.

مثال ۱۲. انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

همگراست. برای نشان دادن این، ابتدا می‌نویسیم

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

سپس می‌بینیم که اولین انتگرال سمت راست، از مقایسه با انتگرال همگرای $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$، همگراست (ر.ک. مثال ۵)، حال آنکه دومین انتگرال، از مقایسه با انتگرال همگرای $\int_1^\infty e^{-x}dx = e^{-1}$، همگرا می‌باشد (جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم). لذا، انتگرال سمت چپ نیز همگراست و مقدارش در مسئلهٔ ۴۹ داده شده است.

مسائل

اگر انتگرال مجازی داده شده همگرا باشد، مقدارش را بیابید. در غیر این صورت، بگویید که واگراست.

۱. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$

۲. $\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$

۳. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

۴. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

۵. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1}$

۶. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

۷. $\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

۸. $\int_0^{16} \frac{ds}{\sqrt[4]{s}}$

۹. $\int_{-32}^1 \frac{dt}{\sqrt[5]{t}}$

۱۰. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

۱۱. $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

۱۲. $\int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

۱۳. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۴. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

۱۵. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

۱۶. $\int_{-\infty}^0 \cos x\,dx$

۱۷. $\int_0^{\pi/2} \tan y\,dy$

۱۸. $\int_0^\infty e^{-3z}\,dz$

۱۹. $\int_0^1 \ln x\,dx$

۲۰. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

۲۱. $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$

۲۲. $\int_0^\infty e^{-3x}\cos 2x\,dx$

۲۳. $\int_0^\infty e^{-2x}\sin x\,dx$

۲۴. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

۲۵. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$

۲۶. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

۲۷. $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

۲۸. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

۲۹. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

۳۰. $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

به ازای $a > 0$ ، نشان دهید که

۳۱. $\int_0^a x^p\,dx$ همگراست اگر و فقط اگر $p > -1$.

۳۲. $\int_a^\infty x^p\,dx$ همگراست اگر و فقط اگر $p < -1$.

۳۳. $\int_0^\infty x^p\,dx$ به ازای هر p واگراست .

انتگرالهای زیر را به ازای $a > 0$ داده شده حساب کنید .

۳۴. $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ ✓

۳۵. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ ✓

۳۶. $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ ✓

مساحت A ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید .

۳۷. $y = x^{-1/2}$ و $y = \frac{1}{2}x^{-1/3}$ از $x = 0$ تا $x = 1$. ✓

۳۸. $y = e^{-x}$ و $y = 1/(x^2+1)$ از $x = 0$ تا $x = \infty$. ✓

۳۹. $y = \cosh x$ و $y = \sinh x$ در ربع اول . ✓

در هر حالت ، ناحیهٔ R را رسم نمایید .

همگرایی یا واگرایی انتگرال مجازی داده شده را با آزمون مقایسه تعیین کنید

۴۰. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ ✓

۴۱. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ ✓

۴۲. $\int_0^1 \frac{dx}{x\cos x}$ ✓

۴۳. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\ln x}$ ✓

۴۴. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ ✓

۴۵. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}\,dx$ ✓

۴۶. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$ ✓

۴۷. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4+x^2}}$ ✓

۴۸. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ ✓

با معلوم گرفتن فرمول $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، نشان دهید که

۴۹. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}$ ✓

۵۰. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ✓

عدد x را طوری بیابید که

۵۱. $\int_0^x e^{-t}\,dt = \int_x^\infty e^{-t}\,dt$ ✓

۵۲. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ ✓

۵۳. $\int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \int_x^\infty \frac{dt}{t^2+1}$

۵۴. فرض کنید f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته بوده، و انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشد. نشان دهید که اگر f زوج باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\,dx$$

حال آنکه اگر f فرد باشد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

۵۵. تابع f را طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ واگرا بوده ولی

$$\lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} f(x)\,dx = 0.$$

۵۶. یک مالک، که از مستأجرین خود در سال D دلار اجارهٔ مرکب (به اقساط ماهانه) دریافت می‌کند، ساختمان را به معرض فروش گذارده است. اگر وی معمولاً" به محض دریافت اجاره آن را با نرخ سود سالانهٔ $100r$ درصد و به‌طور پیوسته مرکب سپرده می‌گذارد، چرا D/r دلار را بهای عادلانه می‌داند؟

راهنمایی. با استفاده از یک انتگرال مجازی، ارزش فعلی " جریان درآمد " مرکب از تمام دریافتهای اجارهٔ آینده را تقریب کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرالگیری با جانشانی: $\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du|_{u=u(x)}$

انتگرالگیری جزء به جزء: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

فرمولهای تحویل

انتگرالگیری از حاصل ضرب توانهایی از $\sin x$ و $\cos x$

انتگرالگیری از حاصل‌ضرب توانهایی از $\tan x$ و $\sec x$

انتگرالگیری از حاصل‌ضرب سینوسها و کسینوسها با شناسه‌های مختلف جانشانیهای

$x = a\sin u$، $x = a\tan u$، و $x = a\sec u$

جانشانیهای $x = a\sinh u$ و $x = a\cosh u$

توابع گویای حقیقی و مجازی

تجزیهٔ چندجمله‌ایها با ضرایب حقیقی

بسط تابع گویا به صورت کسرهای جزئی

انتگرالگیری از توابع گویا به کمک کسرهای جزئی

جانشانیهای گویاساز، جانشانی نصف زاویه

انتگرالگیری از توابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$

قاعدهٔ نقطهٔ میانی و خطای آن

قاعدهٔ ذوزنقه و خطای آن

قاعدهٔ سیمپسون و خطای آن

انتگرالهای مجازی با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران

انتگرالهای مجازی با انتگرالده بی‌کران

آزمون مقایسه برای انتگرالهای مجازی

برای مرور فرمولهای اصلی انتگرالگیری، ر.ک. آخر کتاب، شماره‌های ۱ تا ۲۸.

مسائل تکمیلی

انتگرال داده شده را به هر روشی که خواستید حساب کنید.

۱. $\int x^5 e^{x^2}\,dx$

۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$

۳. $\int \frac{x^2}{(x-1)^9}\,dx$

۴. $\int \sin 7x \cos 8x\,dx$

۵. $\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

۶. $\int \frac{ds}{\tan^5 s}$

۷. $\int (x^2+1)^{3/2}\,dx$

۸. $\int \sin^6 t \cos^5 t\,dt$

۹. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

۱۰. $\int \sin^2 x \cot^3 x\,dx$

۱۱. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$

۱۲. $\int x^2 \sinh x\,dx$

۱۳. $\int \sqrt{x^4+x}\,dx$

۱۴. $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

۱۵. $\int \frac{y}{\sqrt{y+1}+1}\,dy$

۱۶. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

۱۷. $\int \tanh^{-1} x\,dx$

۱۸. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(\arccos x)^2}$

۱۹. $\int (1-x^2)^{5/2}\,dx$

۲۰. $\int \frac{\tan^2 z+1}{\tan^2 z-1}\,dz$

۲۱. $\int \operatorname{sech} x\,dx$

۲۲. $\int \operatorname{csch} x\,dx$

۲۳. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$

۲۴. $\int (\arcsin x)^2\,dx$

۲۵. $\int x\coth^2 x\,dx$

۲۶. $\int \sec^2 u\csc^2 u\,du$

۲۷. $\int xe^x\sin x\,dx$

۲۸. $\int v^2\ln\frac{v-1}{v}\,dv$

۲۹. $\int \frac{3x^2-1}{x^4+x^3+2x^2+x+1}\,dx$

۳۰. $\int e^{2x}\sqrt{e^x+2}\,dx$

۳۱. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

۳۲. $\int \cot^4 w\csc^4 w\,dw$

۳۳. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

۳۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[4]{x})^3}$

۳۵. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

۳۶. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

۳۷. $\int (\tan y-\sec y)^2\,dy$

۳۸. $\int \frac{1}{x}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 dx$

۳۹. $\int x\cos\sqrt{x}\,dx$

۴۰. $\int \sin^3 x\tan x\,dx$

۴۱. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$

۴۲. $\int \frac{\ln z}{\sqrt{z}}\,dz$

۴۳. $\int \sin x\sinh x\,dx$

۴۴. $\int \sinh 2x\cosh x\,dx$

۴۵. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

۴۶. $\int \cos \pi v\cos v\,dv$

۴۷. $\int \frac{x^2+x+1}{x^4-x^3-91x^2+x+90}\,dx$

۴۸. $\int \cos^2 x \csc^3 x \, dx$

۴۹. $\int \frac{x + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$

۵۰. $\int \arctan \sqrt{2x - 1} \, dx$

۵۱. $\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} dx$

۵۲. $\int \left(\frac{u}{u \cos u - \sin u}\right)^2 du$

۵۳. $\int \frac{\tan^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$

۵۴. $\int \sqrt{1 - \sin x} \, dx$

۵۵. $\int \cos x \tan^4 x \, dx$

۵۶. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

۵۷. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

۵۸. $\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$

۵۹. $\int \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1} dx$

۶۰. $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$

۶۱. $\int \frac{ds}{e^{3s} - e^s}$

۶۲. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

۶۳. $\int \frac{t^5 + 1}{t^6 + t^4} dt$

۶۴. $\int \cot^6 x \, dx$

۶۵. $\int \frac{\sqrt{\tan z}}{\sin 2z} dz$

۶۶. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx$

۶۷. $\int \frac{dx}{\sin(x+1) \sin(x-1)}$

۶۸. $\int \frac{du}{\sin^3 u \cos^5 u}$

۶۹. $\int y^4 \ln y \, dy$

۷۰. $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

۷۱. $\int \frac{\sin v}{\sin 3v} dv$

۷۲. $\int \tanh^4 x \, dx$

۷۳. $\int \operatorname{sech}^3 x \, dx$

۷۴. $\int \frac{ds}{s\sqrt{s^3 - 1}}$

۷۵. $\int \frac{dt}{2 \sin t + \sin 2t}$

۷۶. $\int \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right)^2 dx$

۷۷. $\int \frac{\sin x}{2 + \sin x + \cos x} dx$

۷۸. $\int \dfrac{dx}{1-\tanh x}$

۷۹. فرض کنید $Q(x)=(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_n)$ ، که در آن $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابتهای متمایزی هستند (یعنی، $c_i \neq c_j$ اگر $i \neq j$) ، و $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n باشد . نشان دهید که

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(c_i)}{Q'(c_i)} \ln|x-c_i| + C. \qquad \text{(یک)}$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (یک) حساب کنید .

۸۰. $\int \dfrac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

۸۱. $\int \dfrac{x^2+5}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx$

۸۲. $\int \dfrac{x^3}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

۸۳. نشان دهید که $\int_0^1 \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \dfrac{1}{8}\pi \ln 2$

انتگرال داده شده را با استفاده از قواعد ذکر شده تقریب کنید ، که در آن n تعداد زیربازه‌ها می‌باشد . مقادیر عرضها را تا چهار رقم اعشار حساب کرده ، و جواب را (بدون تلاش در تخمین خطا) تا سه رقم اعشار بدهید .

۸۴. $\int_1^2 \dfrac{\cos x}{x}\,dx$ ، قواعد نقطهٔ میانی و ذوزنقه ، $n=5$.

۸۵. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx$ ، قواعد نقطهٔ میانی و ذوزنقه ، $n=6$.

۸۶. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ ، قواعد ذوزنقه و سیمپسون ، $n=4$.

۸۷. چه مقدار از n ، یعنی تعداد زیربازه‌ها ، تضمین می‌کند که قدرمطلق خطای E_S ناشی از استفادهٔ قاعدهٔ سیمپسون در تقریب انتگرال مسئلهٔ ۸۶ کوچکتر از 0.00001 باشد .

۸۸. به کمک نامساوی $x^2 \geq 2ax - a^2$ نشان دهید که $\int_3^\infty e^{-x^2}\,dx < 0.00003$. سپس ، با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون به ازای $n=12$ ، انتگرال مجازی $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ را تقریب نمایید . مقادیر عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب کرده و ، با تحلیل خطا ،

مقدار I را که به اندازهٔ 0.0001 دقیق است پیدا نمایید . جواب را به‌وسیلهٔ مقایسه با مقدار دقیق I امتحان کنید .

اگر انتگرال مجازی داده شده همگرا باشد ، مقدار آن را بیابید . در غیر این صورت ، بگویید که واگراست .

۸۹. $\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$

۹۰. $\int_2^\infty \frac{dy}{\ln y}$

۹۱. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$

۹۲. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$

۹۳. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

۹۴. $\int_0^\infty \frac{x}{x^2-1}\,dx$

۹۵. $\int_0^1 \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}$

۹۶. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

۹۷. $\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos t}$

۹۸. $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\cos x\,dx$

۹۹. $\int_0^\infty e^{-2x}\sinh x\,dx$

۱۰۰. $\int_0^\infty e^{-x}\cosh x\,dx$

۱۰۱. نشان دهیدکه انتگرال مجازی

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

همگراست اگر و فقط اگر $p>1$.

۱۰۲. با استفادهٔ مکرر از انتگرالگیری جزء به جزء ، نشان دهید که

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!,$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی می‌باشد .

۱۰۳. با جانشانی $x=\tan t$ نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & ، \quad \text{اگر } n=1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-3}{2n-2}\dfrac{\pi}{2} & ، \quad \text{اگر } n=2,3,\ldots \end{cases}$$

۱۰۴. به کمک مسئلهٔ ۱۰۲ و جانشانی $x = -(m+1)\ln t$ ، نشان دهید

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx = \frac{(-1)^n\, n!}{(m+1)^{n+1}},$$

که در آن m عدد صحیح نامنفی بوده و n عدد صحیح مثبتی میباشد.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۱۰۵. $\int_0^\infty x^6 e^{-x}\, dx$

۱۰۶. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^4}$

۱۰۷. $\int_0^1 x^2 (\ln x)^3\, dx$

۱۰۸. نشان دهید که انتگرال مجازی $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$ همگراست اگر و فقط اگر $x > 0$.

۱۰۹. به ازای x مثبت، انتگرال مسئلهٔ قبل تابعی از x را تعریف میکند که به *تابع گاما* معروف بوده و با $\Gamma(x)$ نموده میشود. لذا،

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (x > 0),$$

که در آن علامت Γ گامای بزرگ یونانی (معادل G انگلیسی) است. نشان دهید که

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (x > 0),$$

و بخصوص

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

۱۱۰. نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx = 0.$$

کاربردهای دیگر انتگرالگیری[۸]

در این فصل کاربردهای انتگرالگیری را که در فصل ۴ آغاز شد دنبال می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان حجم یک جسم، بخصوص جسم دوار، را با انتگرالگیری حساب کرد. سپس مفهوم منحنی را طوری تعمیم می‌دهیم که از قید نسبتاً "غیرواقعی که منحنی نمودار یک تابع است رها گردد. این ما را به مفهوم "منحنی پارامتری" رسانیده، و ما را در وضعی قرار می‌دهد که بتوانیم طول یک منحنی کلی و مساحت یک سطح دوار کلی را محاسبه کنیم. بالاخره، از مسائل هندسه به مسائل فیزیک و مهندسی رفته، و چند مطلب در مکانیک سیالات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۰۸ حجم به روش مقاطع عرضی

در این بخش و بخش بعد، حجم اجسام را با استفاده از انتگرالگیری حساب می‌کنیم. مثل شکل ۱ (آ)، فرض کنیم S یک جسم، یعنی یک ناحیهٔ سه‌بعدی، باشد و L خطی باشد که‌ما آن را محور x می‌گیریم. بعضی از صفحات عمود بر L، S را در نواحی دو بعدی به نام *مقاطع عرضی* S قطع می‌کنند. فرض‌کنیم $A(x)$ مساحت مقطع عرضی S در x باشد، که‌منظور مقطع عرضیی است که از S توسط صفحهٔ عمود بر L در نقطهٔ L به مختص x جدا می‌کند (ر.ک. شکل). همچنین، فرض کنیم

(یک) یک صفحهٔ عمود بر L، S را قطع می‌کند اگر و فقط اگرصفحه L را درنقطه‌ای از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ قطع نماید؛

(دو) تابع $A(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

در این صورت، همانطور که اینک نشان می‌دهیم، تعریف مناسبی از حجم V جسم S را

می‌توان با فرمول

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \tag{۱}$$

داد . دلیل آن تقریبا "به‌موازات ساخت صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹ است که به انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ به عنوان تعریف مناسب مساحت تحت نمودار تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ منجر شد .

فرض کنیم

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b \tag{۲}$$

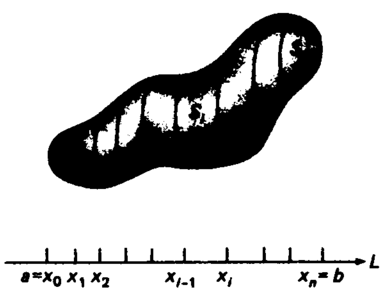
نقاط تقسیم بازهٔ $[a, b]$ صادق در نامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ باشند . این نقاط $[a, b]$ را به n زیر بازهٔ

$$[x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

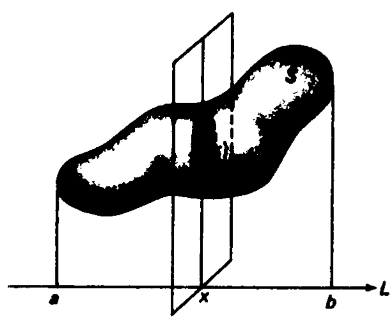
تقسیم می‌کنند ، که در آن $[x_{i-1}, x_i]$ طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ است . طبق معمول فرض کنیم

$$\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

اندازهٔ مش تقسیم (۲) یعنی طول ماکزیمم تمام زیربازه‌ها ، باشد . صفحات عمود بر خط L در نقاط x_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ جسم S را به n برش نازک $S_1, S_2, \dots, S_n$ مطابق شکل ۱ (ب)



(ب)



(آ)

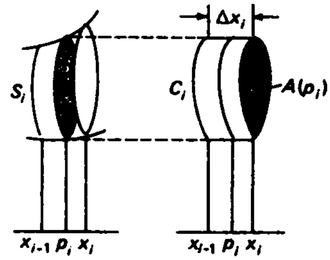
شکل ۱

تقسیم می‌کنند . برش i م به ضخامت Δx_i را درنظر بگیرید . تابع $A(x)$ پیوسته است ؛ و درنتیجه ، اگر مقدار Δx_i به قدرکافی کوچک باشد ، مقدارش بر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ تغییر مختصری می‌کند . لذا ، در محاسبهٔ حجم S ، اگر

(یک) $A(x)$ بر $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار ثابت $A(p_i)$ را داشته باشد که در آن p_i نقطهٔ دلخواهی

از $[x_{i-1}, x_i]$ است[۱]؛

(دو) از این صرف‌نظر شود که اضلاع S_i در حالت‌کلی مثل‌شکل ۲ مایلند و S_i را با استوانهٔ قائم C_i تولید شده به وسیلهٔ حرکت مقطع عرضی S در p_i به فاصلهٔ Δx_i درامتدادخطی



شکل ۲

عمود بر مقطع عرضی، یعنی موازی L، عوض کنیم،
آنگاه تقریب مناسبی برای این حجم خواهیم یافت.

در هندسه حجم یک استوانهٔ قائم با مساحت‌مقطع عرضی A و ارتفاع h مساوی‌حاصل ضرب A و h تعریف می‌شود. بنابراین، اگر V_i حجم استوانهٔ C_i باشد، داریم

$$V_i = A(p_i)\,\Delta x_i. \tag{۳}$$

چون حجم تمام S مساوی مجموع احجام n برش $S_1, S_2, \ldots, S_n$ بوده و حجم هربرش S_i تقریبا" مساوی حجم (۳) استوانهٔ نظیر C_i است، پس

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(p_i)\,\Delta x_i. \tag{۴}$$

می‌بینید که طرف راست (۴) مجموع ریمانی از تابع $A(x)$ بر بازهٔ $[a, b]$ است.

حجم به عنوان انتگرال. قدم آخر به شیوه‌ای برداشته می‌شود که اینک برای ما آشناست. فرض کنیم تمام برشهای S_i، و در نتیجه تمام استوانه‌های تقریب‌ساز C_i، باریکتروباریکتر شوند؛ یعنی، اندازهٔ مش μ به صفر نزدیک شود. در این صورت، انتظار اینکه تقریب (۴) بهتر و بهتر شود معقول است. حال، با توجه به این نکات، می‌توان حجم V جسم S را با حد

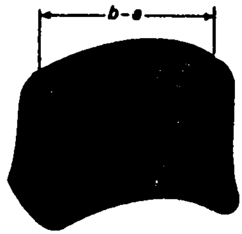
$$V = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(p_i)\,\Delta x_i$$

---

۱. بستگی تقریب به *انتخاب خاصی از نقاط* p_i در حد وقتی $\mu \to 0$ *از بین خواهد رفت.*

تعریف‌کرد . این‌فرمول (۱) راثابت‌می‌کند ،زیرا حد موردنظر چیزی‌جز انتگـرال $\int_a^b A(x)\,dx$ نیست ، که وجود آن را فرض پیوستگی $A(x)$ تضمین می‌کند .

مثال ۱ . فرض‌کنیم مقاطع عرضی جسم S ،مثل‌شکل۳، مساحت مساوی داشته باشند؛ یعنی



شکل ۳

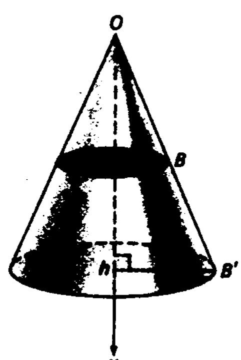
$A(x)$ دارای مقدار ثابت A_0 باشد . در ایـن صـورت ، فرمول (۱) ایجاب می‌کند که

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\int_a^b A_0\,dx=A_0(b-a).$$

این همان حجم استوانهٔ قائم با مساحت قاعدهٔ A_0 و ارتفاع $b-a$ است ، ولی البته S می‌تواند بدون استوانه بودن دارای مساحت مقطع عرضی ثابت باشد .

مثال ۲ . حجم V یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r را بیابید .

حل . مثل شکل۴ ، محور تقارن‌مخروط‌را محور x (به‌سمت‌پایین) و رأس مبدأ O می‌گیریم .



شکل ۴

در این صورت ، $A(x) = \pi y^2$ ، که در آن $y = y(x)$ شعاع مقطع عرضی در x است (یک قرص مستدیر) . مثلثهای قائم OBx و $OB'h$ متشابه‌اند ؛ و درنتیجه ،

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{h}.$$

بنابراین ،

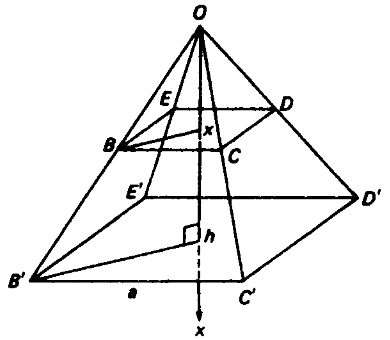
$$y = \frac{r}{h}x, \qquad A(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2,$$

و فرمول (۱) نتیجه می‌دهد که

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \tag{۵}$$

مثال ۳ . حجم V هرم قائم به ارتفاع h را که قاعده‌اش مربعی به طول ضلع a است بیابید .

حل . مثل شکل ۵ ، محور x را خطی می‌گیریم که از رأس هرم به پایین بوده و برقاعدهٔ هرم



شکل ۵

عمود است . فرض کنیم مبداٴ O در رأس بوده ، و h مختص نقطهٔ برخورد محور x با قاعده باشد . مساحت $A(x)$ مقطع عرضی هرم در x مساحت مربع $BCDE$ در شکل است . بنا بر تشابه مثلثهای OBC و $OB'C'$ ، داریم

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}.$$

به‌علاوه ، بنابر تشابه مثلثهای OBx و $OB'h$ ،

$$\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|Ox|}{|Oh|} = \frac{x}{h}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\frac{|BC|}{|B'C'|}=\frac{x}{h},$$

یعنی،

$$|BC|=\frac{|B'C'|}{h}x=\frac{a}{h}x.$$

بنابراین،

$$A(x)=|BC|^2=\frac{a^2}{h^2}x^2,$$

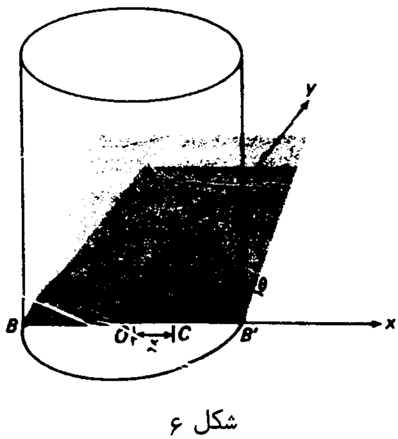
و این بار فرمول (۱) نتیجه می‌دهد که

$$V=\int_0^h A(x)\,dx=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}a^2h. \tag{۶}$$

مساحت قاعدهٔ مخروط مثال ۲ مساوی πr^2 است، حال آنکه در مورد هرم مثال ۳ مساوی a^2 است. لذا، هر دو فرمول (۵) و (۶) برحسب مساحت قاعدهٔ A_0 و ارتفاع h جسم داده شده به شکل $\frac{1}{3}A_0h$ درمی‌آیند. البته، این یک امر تصادفی نیست (ر. ک. مسئلهٔ ۱۹).

مثال ۴. حجم V گوهٔ بریده شده از یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r توسط صفحهٔ مار بر قطری از قاعدهٔ استوانه را که با قاعده زاویهٔ θ می‌سازد پیدا کنید.

حل. مثل شکل ۶، در قاعده یک دستگاه مختصات قائم با محور x در امتداد قطر BB'، مبدأ O در نقطهٔ میانی BB' (بر محور استوانه)، و محور y عمود بر BB' در O درنظر



شکل ۶

می‌گیریم . قاعدهٔ گوه به پاره‌خط BB' و نیمدایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ ، $y \geq 0$ ، محدودبوده و مقطع عرضی در x مثلث قائم CDE به مساحت

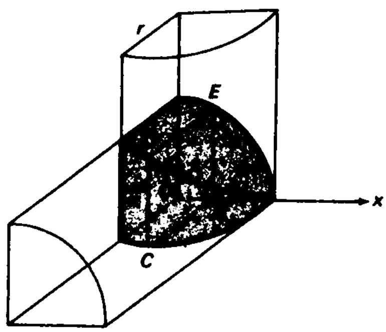
$$A(x)=\frac{1}{2}|CD||DE|=\frac{1}{2}|CD|^2\tan\theta=\frac{1}{2}y^2\tan\theta=\frac{1}{2}(r^2-x^2)\tan\theta$$

می‌باشد . لذا ، با اعمال فرمول (۱) معلوم می‌شود که

$$V=\int_{-r}^{r}A(x)\,dx=\frac{1}{2}\tan\theta\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\tan\theta\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\frac{2}{3}r^3\tan\theta.$$

هرگاه h ارتفاع گوه باشد ، آنگاه $h=|FG|=r\tan\theta$ (ر.ک. شکل)؛ درنتیجه ، حجم گوه را می‌توان به شکل $V=\frac{2}{3}r^2h$ نوشت . .

مثال ۵ . دو استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r یکدیگر را ، مثل شکل ۷ ، در زاویهٔ قائمه‌قطع



شکل ۷

می‌کنند . حجم V جسم S مشترک میان دو استوانه‌را بیابید .

حل . ناحیهٔ سایه‌دار شکل یکهشتم جسم S است . با انتخاب محور x به صورت نموده‌شده و مبداٴ O در نقطهٔ اشتراک محورهای استوانه ، معلوم می‌شود که مقطع جسم S در x مربع $BCDE$ به طول ضلع $|BC|=\sqrt{r^2-x^2}$ است . بنابراین ، $A(x)=r^2-x^2$ ؛ در نتیجه

$$V=8\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}r^3.$$

مسائل

حجم جسم S که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به سهمی $y = x^2 + 1$ ، محورهای مختصات ، و خط $x = 1$ است را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود برمحور x

۱. یک مربع

۲. یک نیمدایره با قطر در صفحهٔ xy

باشد.

قاعدهٔ جسم S ناحیهٔ بین محور x و منحنی $y = \sin x$ از $x = 0$ تا $x = \pi$ است. حجم S را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x

۳. یک مستطیل به ارتفاع ۱

۴. یک مربع

باشد.

حجم جسم S که قاعده‌اش قرص مستدیر $x^2 + y^2 \le 9$ است را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x

۵. یک مربع

۶. یک نیمدایره با قطر واقع در صفحهٔ xy

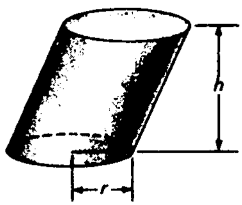
۷. یک مثلث متساوی‌الاضلاع

۸. یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با وتر واقع در صفحهٔ xy

باشد.

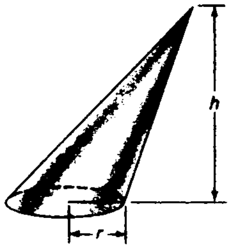
حجم اجسام زیر را بیابید.

۹. یک استوانهٔ مستدیر مایل به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r (ر.ک. شکل ۸).



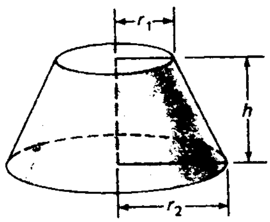
شکل ۸

۱۰. یک مخروط مستدیر مایل به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r (ر.ک. شکل ۹).



شکل ۹

۱۱ . جسم نموده شده در شکل ۱۰ یک **مخروط ناقص** از یک مخروط مستدیر قائم نام دارد . حجم مخروط ناقص را برحسب شعاع قاعدهٔ بالایی r_1 ، شعاع قاعدهٔ پایینی r_2 ، و



شکل ۱۰

ارتفاع h آن بیان کنید .

۱۲ . آب در یک لگن نیمه‌کروی به شعاع r فوت ریخته شده است . حجم آب لگن را وقتی بیابید که آب دارای عمق h فوت باشد . لگن تا چه درصدی باید پر شود تا عمق آب $\frac{1}{2}r$ فوت گردد؟ عمق آب وقتی 75% لگن پر باشد چقدر است؟

قاعدهٔ جسم S ناحیهٔ بین دو سهمی $y = x^2 - 1$ و $y = 1 - x^2$ است . حجم S را در صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x مساوی

۱۳ . یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر واقع درصفحهٔ xy و یک زاویهٔ $30°$

۱۴ . یک شش ضلعی منتظم با یک ضلع واقع در صفحهٔ xy

باشد .

مثل مسائل ۳ و ۴ ، قاعدهٔ جسم S ناحیهٔ بین محور x ومنحنی $y = \sin x$ از $x = 0$ تا $x = \pi$ است . حجم S را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحه‌ای عمودبر محور y مساوی

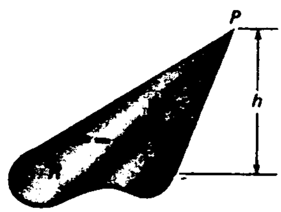
۱۵ . یک مستطیل به ارتفاع ۱

۱۶. یک مربع
باشد.

۱۷. قاعدهٔ جسم S مثلث متساوی‌الاضلاع T به‌ارتفاع h است. فرض کنید هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر ارتفاع ثابت T یک قرص مستدیر به قطر واقع بر T باشد. حجم S را به دو راه بیابید.

۱۸. مقطع عرضی منارهٔ یک کلیسا در فاصلهٔ x فوت از نوک آن با صفحه‌ای عمود برمحور تقارن آن مربعی است‌که طول قطرش $\frac{1}{25}x^2$ فوت است. حجم مناره درصورتی‌که ارتفاع آن 10 فوت باشد، چیست؟

۱۹. فرض کنید R یک ناحیهٔ مسطح به مساحت A_0 بوده، و P نقطه‌ای به فاصلهٔ h از صفحهٔ R باشد. در این صورت، پاره‌خط مرسوم از P تا نقطهٔ R جسم C، به نام *مخروط کلی*، را جارو می‌کند (ر.ک. شکل ۱۱).



شکل ۱۱

نشان دهید که حجم C مساوی $\frac{1}{3}A_0h$ است.

۲۰. فرض کنید S یک **منشورگون** باشد، یعنی جسم محدود به دو وجه مسطح و یک سطح جانبی. وجوه مسطح که لازم نیست چند ضلعی باشند[1]، **قواعد** S نامیده می‌شوند. فرض کنید قاعده‌ها به فاصلهٔ h بوده، و مساحت مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحه‌ای موازی قاعده‌ها یک تابع چند جمله‌ای مانند $A(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ از درجهٔ نابیشتر از 3 باشد، و محور x بر قاعده‌ها عمود بوده، و هر نقطه از محور x را بتوان مبداء گرفت. به کمک فرمول منشور (یک)، صفحهٔ ۶۷۳، نشان دهید که حجم جسم S از فرمول زیر به دست می‌آید:

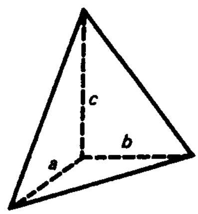
---

۱. *مثلاً"، هر مخروط ناقص یک منشورگون است؛ همچنین، یک قطعهٔ کروی (ر.ک. مسئلهٔ ۲۷). منشورگون را منشور نامند اگر قاعده‌ها چندضلعیهای همنهشت بوده و سطح جانبی از متوازی‌الاضلاعهایی تشکیل شده باشد که رئوس و قواعد نظیر را به هم وصل می‌کنند.*

$$V = \frac{1}{6} h(B_1 + 4B + B_2),$$

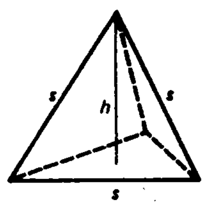
که در آن B_1, B_2 مساحات قاعده‌ها بوده ،و B مساحت مقطع عرضی S به‌وسیله‌ٔ صفحه در وسط قواعد می‌باشد . این فرمول مربوط به V نیز به فرمول منشورگون معروف است (و پیدایش اصطلاح " منشورگون" را توضیح می‌دهد) . با استفاده از آن ، محاسبات مسئلهٔ ۱۱ را ساده کنید .

۲۱ . حجم چهاروجهی (هرم مثلث‌القاعده) با سه وجه دوبدو متعامد و سه ضلع دوبدو متعامد به طولهای a ، b ، و c را بیابید (ر.ک. شکل ۱۲) .



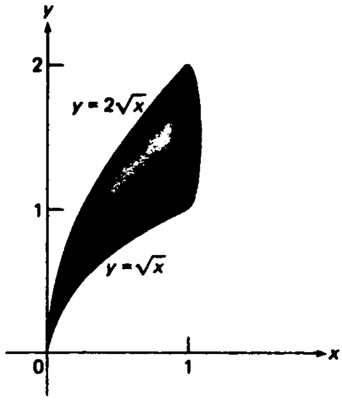
شکل ۱۲

۲۲ . یک چهاروجهی را منتظم گویند اگر وجوه آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند . ارتفاع h و حجم V یک چهاروجهی منتظم به طول ضلع s را بیابید (ر.ک. شکل ۱۳) .



شکل ۱۳

۲۳ . حجم جسم شاخی شکل ۱۴ را بیابید که مقاطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحات عمود بر محور x قرصهای مستدیری می‌باشند . نقاط انتهایی یک قطر هر قرص بر منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = 2\sqrt{x}$ قرار داشته ، و نوک جسم در مبداء صفحهٔ xy بوده و تا مقطع عرضی در $x = 1$ امتداد دارد .



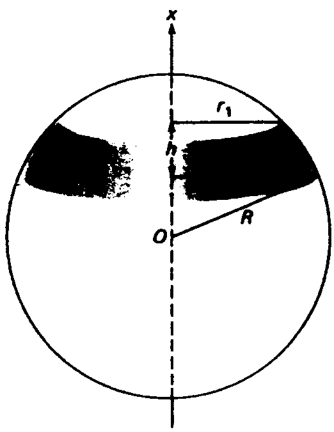
شکل ۱۴

۲۴ . دو جسم بین یک جفت صفحهٔ موازی که به فاصلهٔ h از یکدیگرند قرارداشته،ومقاطع عرضی اجسام به‌وسیلهٔ یک صفحه موازی صفحات داده شده مساحات مساوی دارند . *اصل کاوالیری* را ثابت کنید ، که می‌گوید دو جسم دارای حجم یکسان می‌باشند . (اصل کاوالیری برای مساحت در مسئلهٔ ۲۰ ، صفحهٔ ۳۹۵ ، داده شده است .)

۲۵ . فرض‌کنید یک سوراخ مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و عمق r در امتداد محور تقارن‌یک استوانهٔ مستدیر به شعاع r و ارتفاع r تعبیه شده باشد . نشان دهید که‌جسم حاصل حجمی برابر یک نیمکرهٔ توپر به شعاع r دارد .

۲۶ . حجم گوهٔ مثال ۴ را با استفاده از مقاطع عرضی صفحات عمود بر محور y (به جای محور x) حساب کنید .

۲۷ . جسم S محدود به یک‌کره و دو صفحهٔ موازی‌که کره و درون آن را در قرصهای‌مستدیر



شکل ۱۵

قطع می‌کنند یک **قطعهٔ کروی** با دو قاعده نام دارد ، و قرصها قاعده‌های آن می‌باشند (ر.ک . شکل ۱۵ ،که در آن کره به‌شعاع R و به‌مرکز مبدأ بوده ومحور x قائم می‌باشد). حجم S را درصورتی بیابید که یکی‌از قاعده‌ها به‌شعاع r_1 ، قاعدهٔ دیگر به‌شعاع r_2 ، و فاصلهٔ بین قواعد h باشد .

۲۸ . حجم جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات مثبت و منحنی $y = e^{-x}$ بوده ، و مقاطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحات عمود برمحور x نیمدایره‌هایی به اقطار واقع در صفحهٔ xy می‌باشند .

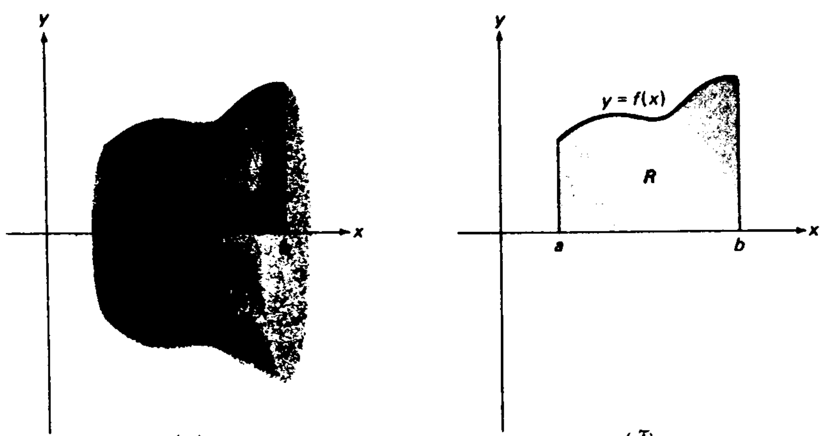
۲۹ . حجم جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات مثبت ، خط $x = 1$ ، و منحنی $y = x^{-1/3}$ بوده ، و مقاطع عرضی‌اش به وسیلهٔ صفحات عمود بر محور x مربع باشند . اگر $y = x^{-1/2}$ ، حجم چقدر خواهد بود ؟

۲۰۸ حجم یک جسم دوار

روش قرصها . اگر ناحیهٔ مسطح R حول خط L در صفحهٔ R دوران کند ، ناحیه جسم S را جارو یا " تولید " می‌کند که آن را یک **جسم دوار** با **محور دوران** L می‌نامند . فرض‌کنیم R ناحیه‌ای از صفحهٔ xy باشد که به نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b),$$

محور x ، و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ محدود شده است مثل شکل ۱۶ (آ) ، و نیز محور x را محور دوران اختیار می‌کنیم . در این صورت ، R جسم دواری مانند شکل ۱۶ (ب) تولید می‌کند که مقطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x در نقطه به مختص x



(ب)   (آ)

شکل ۱۶

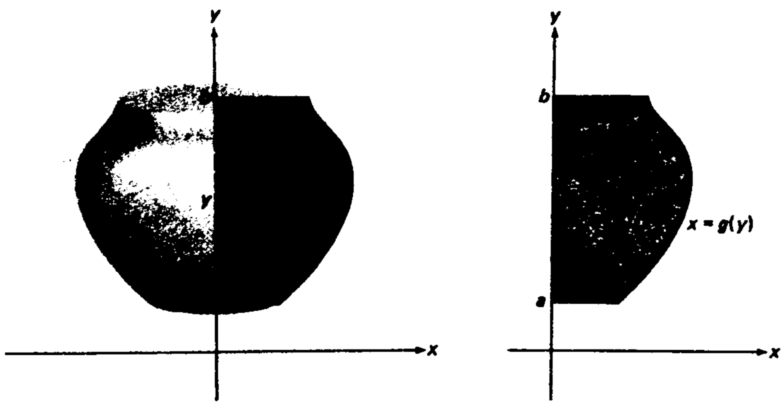
قرص مستدیری به شعاع $y = f(x)$ و مساحت $A(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$ می‌باشد. فرض‌کنیم V حجم جسم S باشد. در این صورت، بنابر روش مقاطع عرضی، $V = \int_a^b A(x)\,dx$؛ ودر نتیجه،

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{۱}$$

گاهی اوقات محور دوران را به جای محور x محور y می‌گیرند. مثلا"، فرض کنید ناحیهٔ R محدود به نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b),$$

به محور y و خطوط افقی $y = a$ و $y = b$، مثل شکل ۱۷ (آ)، حول محور y دوران کرده‌و جسم دوار S به شکل ۱۷ (ب) را تولید نماید.



(ب) (آ)

شکل ۱۷

مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور y در نقطه به مختص y قرص مستدیری‌است به شعاع $x = g(y)$ و مساحت $\pi x^2 = \pi[g(y)]^2$. لذا، طبق روش مقاطع عرضی، حجم V جسم از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_a^b [g(y)]^2\,dy, \tag{۱'}$$

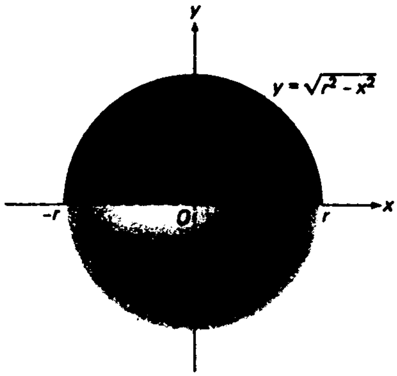
که مشابه فرمول (۱) است. استفاده از فرمول (۱) یا (۱') برای محاسبهٔ حجم یک جسم دوار را روش *قرصها* می‌نامند. این روش در مثال ۲، صفحهٔ ۶۹۹، پیش‌بینی شد ودرآنجا بود که برای محاسبهٔ حجم یک مخروط مستدیر قائم به کار رفت.

مثال ۱. حجم V کرهٔ توپر S به شعاع r را بیابید.

حل. S را می‌توان با دوران ناحیهٔ محدود به محور x و نمودار تابع

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (-r \leq x \leq r)$$

حول محور x تولیدکرد (ر.ک. شکل ۱۸). توجه کنید که در این حالت پاره‌خطهای قائم شکل ۱۶ (آ) به نقاط



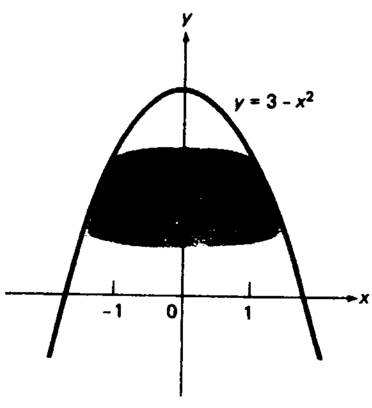
شکل ۱۸

تحویل می‌شوند، زیرا به ازای $x = \pm r$ ، $y = 0$. با اعمال فرمول (۱) فوراً خواهیم داشت

$$V = \pi \int_{-r}^{r} y^2\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

که بدین وسیله فرمولی **ثابت می‌شود** که‌تا کنون آزادانه به کار رفته است.

مثال ۲. حجم V جسم S نموده‌شده‌درشکل۱۹ازدوران‌ناحیهٔ‌محدودبه‌منحنی $y = 3 - x^2$



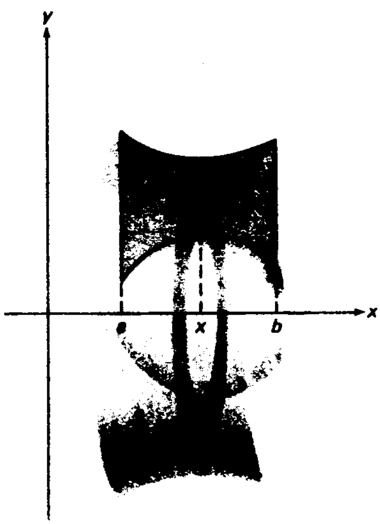
شکل ۱۹.

محور y ، و خطوط $y = 1$ و $y = 2$ حول محور y را بیابید .

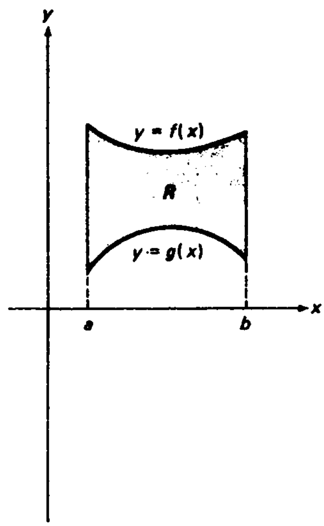
حل . جسم S یک مخروط ناقص جامد است که مرزش سهمی‌گون دوار حاصل از دوران سهمی $y = 3 - x^2$ حول محور y است . (یک مخروط ناقص قسمتی از جسم است که بین دو صفحهٔ موازی قاطع جسم قرار دارد .) چون $y = 3 - x^2$ ، داریم $x^2 = 3 - y$ ، و فرمول (۱۴) نتیجه می‌دهد که

$$V = \pi \int_1^2 x^2\, dy = \pi \int_1^2 (3 - y)\, dy = \pi \left[3y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = \frac{3}{2}\pi.$$

روش واشرها . حال فرض کنیم R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که به‌وسیلهٔ دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، که $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ، و دو خط قائم $x = a$ و $x = b$ $(a < b)$ مطابق شکل ۲۰ (آ) محدود شده است . در این صورت ، از دوران R حول محور x جسم دوار S به شکل ۲۰ (ب) تولید می‌شود که مقطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x در نقطه به مختص x یک طوق یا ناحیهٔ واشری شکل به شعاع خارجی $f(x)$ و شعاع داخلی $g(x)$ مثل شکل ۲۰ (پ) می‌باشد .

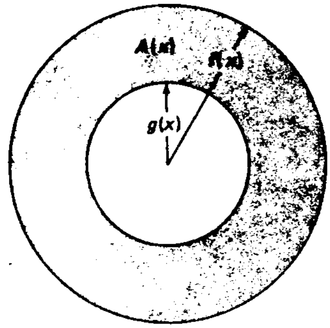


(ب)



(آ)

شکل ۲۰



(پ)

شکل ۲۰

مساحت $A(x)$ این واشر تفاضل مساحت یک قرص مستدیر به شعاع $f(x)$ و مساحت یک قرص متحدالمرکز به شعاع $g(x)$ می‌باشد :

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2.$$

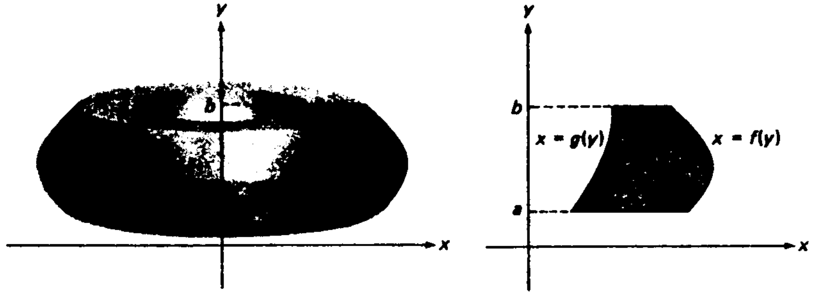
فرض‌کنیم V حجم جسم S باشد . در این صورت ، بنا به روش مقاطع عرضی ،

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx. \qquad (۲)$$

البته ، این فرمول را می‌توان ، بدون توسل صریح به واشرها ، و باتوجه به اینکه‌حجم جسم دوار S در شکل ۲۰ (ب) تفاضل بین حجمهای دو جسم دوار از نوعی که پیشتر مطرح شد ، یعنی یک جسم " خارجی " به حجم $\pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ که از دوران ناحیهٔ محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور x ، و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور x تولید می‌شود ،ویک جسم " داخلی " به حجم $\pi \int_a^b [g(x)]^2\,dx$ که از همین دوران ناحیهٔ محدود به منحنی $y = g(x)$ ، محور x ، و خطوط $x = a$ و $x = b$ تولید می‌شود به‌دست آورد .

مثل قبل ، گاهی محور دوران به جای محور x محور y اختیار می‌شود . لذا ، فرض کنیم R ناحیهٔ محدود به دو منحنی $x = f(y)$ و $x = g(y)$ ، که $f(y) \geq g(y) \geq 0$ ، و دو خط افقی $y = a$ و $y = b$ $(a < b)$ مثل شکل ۲۱ (آ) باشند . در این صورت ،از دوران R حول محور y جسم دوار S به شکل ۲۱ (ب) تولید می‌شود . به‌آسانی معلوم می‌شود که حجم S از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$V = \pi \int_a^b \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}\,dy, \qquad (۲')$$



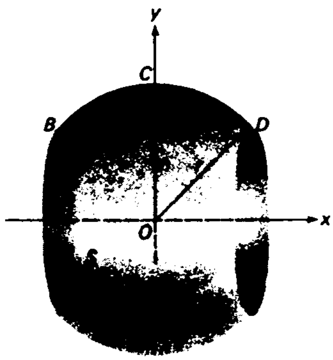
(ب) (آ)

شکل ۲۱

که با (۲) مشابه است. استفاده از فرمول (۲) یا (۲′) برای محاسبهٔ حجم یک جسم دوار روش **واشرها** نام دارد.

مثال ۳. در یک کرهٔ جامد به شعاع r سوراخی به طول $2a$ در امتداد قطر تعبیه شده‌است. حجم V جسم باقیماندهٔ S چقدر است؟ فرض کنید $a < r$.

حل. جسم S نموده شده در شکل ۲۲ مانند یک دستمال سفرهٔ حلقه‌ای است که از دوران



شکل ۲۲

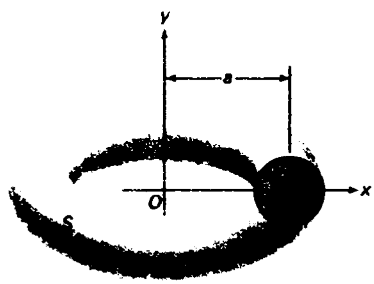
ناحیهٔ محدود به قوس مستدیر BCD و پاره‌خط BD حول محور x تولید می‌شود. قوس BCD نمودار تابع $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ وپاره‌خط BD نمودار تابع ثابت $g(x) = h = \sqrt{r^2 - a^2}$ است. لذا، طبق فرمول (۲)،

$$V = \pi \int_{-a}^{a} [(r^2 - x^2) - (r^2 - a^2)]\, dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

پس حجم جسم S همان حجم کره‌ای به شعاع a است ، و از اندازهٔ کره‌ای که در آن سوراخ تعبیه شده مستقل است فقط مشروط بر اینکه قطر کره از طول سوراخ متجاوز باشد .این‌نتیجه وقتی کمتر تعجب‌آور است که در تعبیه یک سوراخ کوتاه در یک کرهٔ بزرگ متوجه شویم به درلی نیاز داریم که شعاعش فقط کمی از شعاع کره کوچکتر باشد .

مثال ۴. حجم V جسم S حاصل از دوران یک قرص مستدیر حول خطی در صفحهٔ آن که قرص را قطع نمی‌کند پیدا کنید .

حل . فرض کنیم قرص مستدیر ناحیهٔ $(x-a)^2 + y^2 \le r^2$ در صفحهٔ xy بوده ، و محور دوران محور y باشد ؛ r شعاع قرص‌بوده ،و a فاصلهٔ بین مرکز قرص ومحور y باشد ($r < a$ زیرا محور y قرص را قطع نمی‌کند) . پس S مانند نان روغنی شکل ۲۳ است ، به نام حلقهٔ



چنبره

شکل ۲۳

انگشتر یا چنبره . با اعمال فرمول (۲') به ازای

$$f(y) = a + \sqrt{r^2 - y^2}, \qquad g(y) = a - \sqrt{r^2 - y^2},$$

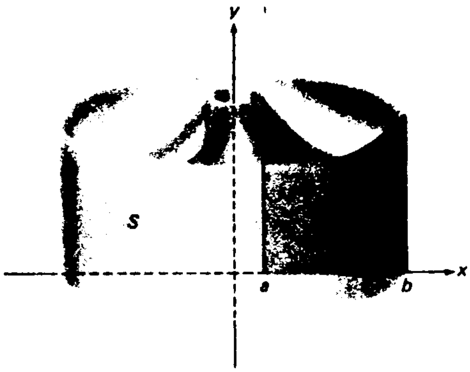
درمی‌یابیم که

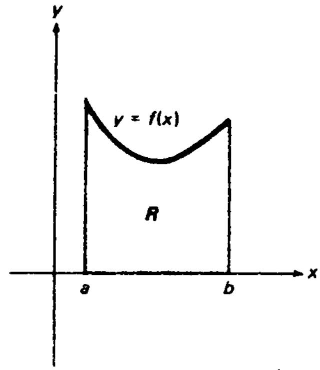
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \{[a + \sqrt{r^2 - y^2}]^2 - [a - \sqrt{r^2 - y^2}]^2\}\, dy$$
$$= 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = 8\pi a \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy,$$

که در آن از زوج بودن انتگرالده در آخرین مرحله استفاده شده است. آخرین انتگرال یک چهارم مساحت یک قرص مستدیر به شعاع r ، یعنی $\frac{1}{4}\pi r^2$ ، است. پس نتیجه می‌شود که

$$V = 8\pi a\left(\frac{1}{4}\pi r^2\right) = 2\pi^2 ar^2.$$

روش غشاءها. حال روش دیگری برای محاسبهٔ حجم یک جسم دوار، به نام *روش غشاءها*، عرضه می‌کنیم. همانطور که از نام برمی‌آید، در این روش جسم به جای قرصهای مستدیر یا واشرها به غشاءهای استوانه‌ای افراز می‌شود. ناحیهٔ R در شکل ۲۴ (آ) را درنظر می‌گیریم که به محور x ، خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ ، و نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ $y = f(x)$ محدود شده است. اگر ناحیهٔ R حول محور y دوران کند، جسم دوار S شکل ۲۴ (ب) را تولید می‌کند. فرض کنیم





شکل ۲۴

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b \qquad (۳)$$

نقاط تقسیم بازهٔ $[a, b]$ باشند که در نامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ صدق می‌کنند. این نقاط $[a, b]$ را به n زیر بازهٔ

$$[x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

تقسیم می‌کنند، که در آن $[x_{i-1}, x_i]$ طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ است. طبق معمول، فرض کنیم

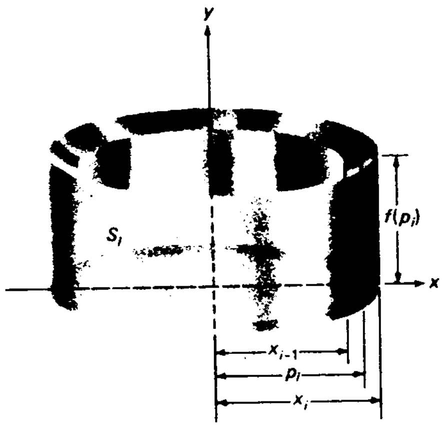
$$\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$$

اندازهٔ مش افراز (۳)، یعنی ماکزیمم طول تمام زیربازه‌ها، باشد. خطوط قائم $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_{n-1}, x = x_n$ ناحیهٔ R را به n نوار باریک $R_1, R_2, \ldots, R_n$

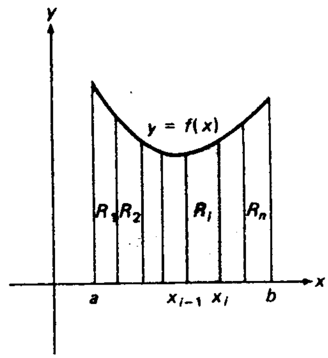
مثل شکل ۲۵ (آ) تقسیم می‌کند . فرض کنیم S_i غشاء استوانه‌ای با بالای خمیده باشدکه از دوران نوار R_i حول محور y مثل شکل ۲۵ (ب) تولید می‌شود . تابع $f(x)$ پیوسته است؛ و درنتیجه ، مقدارش بر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ ، دست کم وقتی Δx_i به قدر کافی کوچک‌باشد، تغییر مختصری می‌کند . لذا ، اگر $f(x)$ را با مقدار ثابت $f(p_i)$ بر $[x_{i-1}, x_i]$ در نظر بگیریم ، که p_i نقطهٔ دلخواهی از $[x_{i-1}, x_i]$ باشد ، تقریب مناسبی خواهیم داشت . به دلیلی که لحظه‌ای دیگر معلوم می‌شود ، p_i را نقطهٔ میانی $[x_{i-1}, x_i]$ اختیار می‌کنیم ؛ درنتیجه ،

$$p_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \qquad (۴)$$

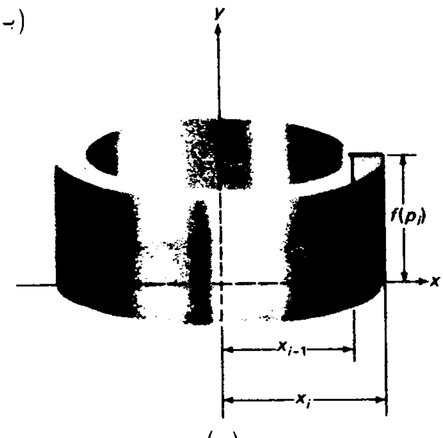
حاصل تعویض $f(x)$ با $f(p_i)$ بر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ و سپس دوران ناحیهٔ مستطیلی حاصل حول محور y عبارت‌است‌از تعویض غشاء استوانه‌ای S_i شکل۲۵ (ب) باغشاء استوانه‌ای



(ب)



(آ)



(پ)

شکل ۲۵

C_i شکل ۲۵ (پ) باهمان شعاع داخلی x_{i-1} و شعاع خارجی x_i منتها با سر تخت‌به‌ارتفاع $f(p_i)$ بـه جای سرخمیده. چون حجم V تمام جسم دوار S مساوی مجموع احجام n غشـاء $S_1, S_2, \ldots, S_n$ با سرهای خمیده است، و چون حجم هر غشاء S_i تقریبا" مساوی حجم V_i غشاء نظیر C_i با سر تخت است، نتیجه می‌شود که

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i. \tag{۵}$$

اما V_i تفاضل بین حجم استوانهٔ مستدیر قائم خارجی به مساحت قاعـدهٔ πx_i^2 و ارتفـاع $f(p_i)$ و استوانهٔ داخلی متحدالمرکز به مساحت قاعدهٔ πx_{i-1}^2 و همان ارتفاع می‌باشد. بنابراین،

$$V_i = \pi f(p_i)(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \pi f(p_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$V_i = 2\pi f(p_i)\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Delta x_i = 2\pi p_i f(p_i)\,\Delta x_i,$$

که در اینجا دلیل انتخاب (۴) واضح است. با گذاردن این عبارت مربوط به V_i در (۵)، به دست می‌آوریم

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi p_i f(p_i)\,\Delta x_i. \tag{۶}$$

طرف راست (۶) یک مجموع ریمان[1] برای تابع $2\pi x f(x)$ بر بازهٔ $[a, b]$ است.

بالاخره، به روشی آشنا، می‌توان اندازهٔ مش μ را به صفر نزدیک ساخت. در این صورت، تمام غشاءهای S_i با سرهای خمیده باریکتر و باریکتر می‌شوند؛ و نیـز غشاء های تقریب‌ساز C_i با سرهای تخت چنین‌می‌کنند. لذا، وقتی $\mu \to 0$، انتظار اینکه تقریب (۶) بهتر و بهتر شود معقول خواهد بود. این نکات پیشنهاد می‌کنند که حجم V جسم S بـا حد

$$V = \lim_{\mu \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i)\,\Delta x_i$$

تعریف شود؛ یعنی،

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xy\,dx, \tag{۷}$$

که در آن وجود انتگرال را پیوستگی $f(x)$، و در نتیجه $xf(x)$، تضمین خواهد کرد. حال

1. Riemann

فرمول (۷) را تعریف حجم گرفته و آن را به روش غشاء محاسبه می‌کنیم .

توجه کنید که حاصلضرب $2\pi x f(x)$ مساحت یک سطح استوانه‌ای به شعاع x وارتفاع $f(x)$ است . بنابراین ، (۷) را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت :

$$V = \int_a^b A(x)\, dx, \tag{۷'}$$

که در آن $A(x)$ مساحت مقطع جسم S به وسیلهٔ سطح استوانه‌ای به شعاع x با محوردوران (در اینجا محور y) به عنوان محور تقارنش می‌باشد . این همان فرمولی است که‌در روش مقاطع عرضی به کار رفت ، ولی در آن روش $A(x)$ مساحت مقطع S به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور دوران در نقطه به مختص x است .

به‌طورکلی ، اگر R ناحیه‌ای از نوع شکل ۲۰ (آ) باشد که به دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، که $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ، و دو خط قائم $x = a$ و $x = b$ $(a < b)$ محدودشده است ، حجم جسم S حاصل از دوران R حول محور y عبارت است از

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx \tag{۸}$$

(چرا؟) . به عنوان تمرین ، درحالتی که S از دوران ناحیه‌ای از نوع شکل ۱۷ (آ) یا ۲۱ (آ) حول محور x بدست آمده است ، فرمولهایی برای V بنویسید .

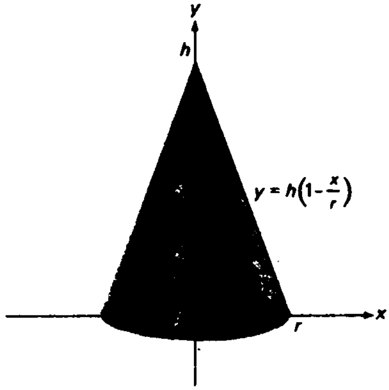
مثال ۵. با استفاده از روش غشاء ، حجم V یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r را پیدا کنید .

حل. ما قبلاً V را در مثال ۲ ، صفحهٔ ۶۹۹ ، به روش قرصها یافتیم . برای محاسبه V به روش غشاء ، ملاحظه‌می‌کنیم‌که مخروط‌را می‌توان از دوران‌ناحیهٔ‌مثلثی محدود به‌محورهای مختصات مثبت و خط $y = h[1 - (x/r)]$ حول محور y تولید کرد (ر.ک. شکل ۲۶) .لذا ، طبق فرمول (۷) ، همانطور که از قبل می‌دانیم ،

$$V = 2\pi h \int_0^r x\left(1 - \frac{x}{r}\right) dx = 2\pi h \int_0^r \left(x - \frac{x^2}{r}\right) dx$$
$$= 2\pi h \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3r}\right]_0^r = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

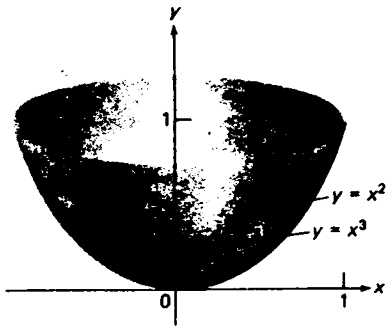
مثال ۶. حجم V جسم S حاصل از دوران ناحیهٔ بین منحنیهای $y = x^2$ و $y = x^3$ حول

محور y را بیابید .



شکل ۲۶

حل . شکل ۲۷ جسم S را که به شکل کاسه است نشان می‌دهد . دو منحنی وقتی متقاطعند



شکل ۲۷

که $x^2 = x^3$ ؛ یعنی ، وقتی $x = 0$ یا $x = 1$. تنها ناحیهٔ متناهی بین منحنیها روی بازهٔ $[0, 1]$ قراردارد ،و براین بازه $y = x^2$ منحنی‌بالایی و $y = x^3$ منحنی پایینی‌است. لذا ، با انتخاب $a = 0, b = 1$ ، $f(x) = x^2$ ، و $g(x) = x^3$ در فرمول (۸) ، بـه دست می‌آید

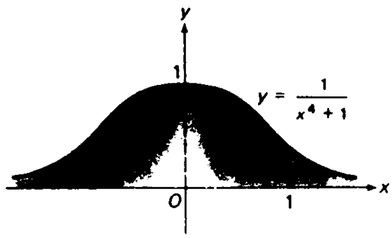
$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

مثال ۷ . ناحیهٔ بی‌کران واقع در ربع اول بین محور x و منحنی

$$y = f(x) = \frac{1}{x^4 + 1} \tag{۹}$$

حول محور y دوران می‌کند. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل S را بیابید.

حل. شکل ۲۸ نشان می‌دهد که جسم S به شکل خاکریز است. بنابر تعمیم طبیعی فرمول



شکل ۲۸

(۷) در حالت بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران، V را به صورت انتگرال مجازی بیان می‌کنیم:

$$V = 2\pi \int_0^\infty xf(x)\, dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{x}{x^4 + 1}\, dx.$$

پس به کمک جانشانی $t = x^2$ خواهیم داشت

$$V = 2\pi \lim_{u \to x} \int_0^u \frac{x}{x^4 + 1}\, dx = \pi \lim_{u \to \infty} \int_0^{u^2} \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \pi \lim_{u \to \infty} \Big[\arctan t \Big]_0^{u^2} = \pi \lim_{u \to \infty} \arctan u^2 = \frac{\pi^2}{2}.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که اگر مخرج (۹) به جای $x^4 + 1$ مساوی $x^2 + 1$ باشد، V نامتناهی می‌باشد.

مثال ۸. ناحیهٔ بی‌کران تحت منحنی $y = f(x) = x^{-3/2}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ حول‌محور y دوران کرده است. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل را بیابید.

حل. این بار داریم

$$V = 2\pi \int_0^1 xf(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 x(x^{-3/2})\, dx = 2\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

که در آن، همانطور که مثال ۵، صفحهٔ ۶۸۰، نشان داده، انتگرال مجازی سمت راست

مساوی 2 می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که

$$V = 2\pi(2) = 4\pi.$$

مسائل

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تحت منحنی داده شده روی بازهٔ ذکر شده حول محور نموده شده را به هر روشی که می‌خواهید (قرصها ، واشرها ، یا غشاءها) بیابید .

۱. $y = x^2$ ، $-2 \leq x \leq 1$ ، محور x

۲. $y = 4 - x^2$ ، $0 \leq x \leq 2$ ، محور y

۳. $y = x^3$ ، $-1 \leq x \leq 1$ ، محور y

۴. $y = |x|$ ، $-1 \leq x \leq 3$ ، محور x

۵. $y = \sqrt{25 - x^2}$ ، $3 \leq x \leq 4$ ، محور y

۶. $y = \cos x$ ، $0 \leq x \leq \pi/2$ ، محور y

۷. $y = \sec x$ ، $0 \leq x \leq \pi/3$ ، محور x

۸. $y = \ln x$ ، $1 \leq x \leq e$ ، محور x

۹. $y = \sinh x$ ، $-1 \leq x \leq 1$ ، محور x

۱۰. $y = \cosh x$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، محور y

۱۱. $y = e^{-x}$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، محور y

۱۲. $y = \arcsin x$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، محور x

۱۳. $y = x^{-4/3}$ ، $0 < x \leq 1$ ، محور y

۱۴. $y = xe^{-x}$ ، $0 \leq x < \infty$ ، محور x

۱۵. $y = e^{-x^2}$ ، $0 \leq x < \infty$ ، محور y

۱۶. $y = (x^2 + 1)^{-3/2}$ ، $0 \leq x < \infty$ ، محور x

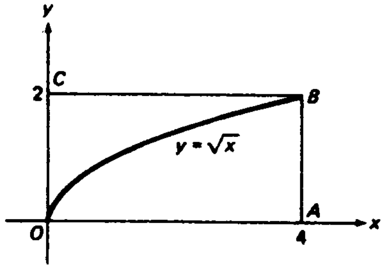
۱۷. حجم V یک کرهٔ توپر به شعاع r را به روش غشاءها بیابید .

۱۸. مثال ۴ را به روش غشاءها حل کنید .

۱۹. مثال ۶ را به روش واشرها حل کنید .

۲۰. مثال ۷ را به روش قرصها حل کنید .

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ داده شدهٔ OAB یا OBC شکل ۲۹ حول محور مشخص شده را حساب کنید . منحنی OB نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ روی بازهٔ $0 \leq x \leq 4$ است . در هر حالت، از هر دو روش قرصها یا واشرها و روش غشاءها استفاده کنید .



شکل ۲۹

۲۱. OAB حول محور x

۲۲. OBC حول محور x

۲۳. OBC حول محور y

۲۴. OAB حول محور y

۲۵. OAB حول خط $x = 4$

۲۶. OBC حول خط $x = 4$

۲۷. OBC حول خط $y = 2$

۲۸. OAB حول خط $y = 2$

سهمی $y = x^2$ مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ ، و $(0, 2)$ را به دو ناحیه تقسیم می‌کنـــد ، یکی بالای سهمی و دیگری پایین سهمی است . حجم جسم تولید شده به‌وسیلهٔ هر یک از نواحی را حول

۲۹. محور x ۳۰. محور y

پیدا کنید .

حجم جسم حاصل از دوران مثلث به رئوس $(1, 0), (3, 1), (2, 2)$ را حول

۳۱. محور x ۳۲. محور y

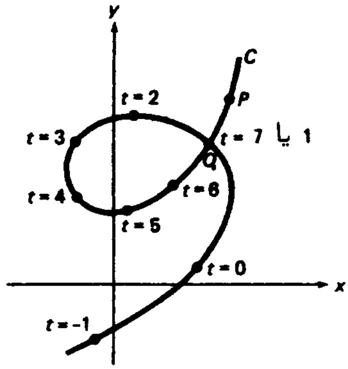
پیدا کنید .

۳۳. حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ را حول خط $y = x$ پیدا کنید .

۳.۸ منحنیها به شکل پارامتری

تاکنون واژهٔ " منحنی " یعنی نمودار تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ ، که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است ، و گاهی به معنی نمودار تابع پیوسته $x = g(y)$ بوده است ، که‌در

آن y متغیر مستقل و x متغیر وابسته می‌باشد . هیچ خط قائمی نمی‌تواند نمودار منحنی به شکل $y = f(x)$ را در بیش‌از یک نقطه قطع کند ؛ و به همین ترتیب هیچ خط افقی نمی‌تواند نمودار منحنی به شکل $x = g(y)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند ؛ این نتیجهٔ فوری تابع بودن f و g می‌باشد . حال می‌خواهیم خود را از این قید رها کنیم ؛ درنتیجه ، مثلا " C ، در شکل ۳۰ (که هر دو خاصیت قائم و افقی را نقض می‌کند) طبق خواستهٔ شهودی مایک



شکل ۳۰

منحنی می‌باشد .

معادلات پارامتری یک منحنی . این معادلات به‌آسانی با گرفتن مختص x و مختص y یک نقطهٔ متغیر C دقیقا " به یک‌صورت و هر دو را تابع متغیر جدید t ، به نام *پارامتر* ، گرفتن به دست می‌آیند . لذا ، از این به بعد منحنی *(به شکل پارامتری)* را نمودار یک جفت معادلهٔ (پارامتری) مانند

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{1}$$

تعریف می‌کنیم ؛ یعنی ، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) که مختصات x و y آنها در (۱) صدق می‌کنند ؛ در اینجا $x(t)$ و $y(t)$ دو تابع پیوسته با قلمرو تعریف یکسان اند ، که همیشه‌بازهٔ I گرفته می‌شود . در معادلات پارامتری از علایم x و y برای نمایش هم متغیرهای‌وابسته‌و هم‌توابع استفاده می‌شود . همچنین ، فرض‌کنیم $x(t)$ و $y(t)$ هر دو توابع ثابت نیستند ، زیرا در غیر این صورت‌منحنی (۱) به‌یک نقطه تحویل می‌شود . وقتی پارامتر t ، که‌می‌توان آن را زمان گرفت ، روی بازهٔ I تغییر کند ، نقطهٔ $P = (x, y)$ مواضع مختلفی در صفحهٔ xy داشته ، و منحنی (پارامتری) (۱) را می‌پیماید . این از شکل ۳۰ برمی‌آید ، که در آن مواضع P به ازای مقادیر مختلف t نموده شده‌اند . حال ، مثل نقطهٔ Q در شکل ، ممکن

است منحنی خودش را قطع کند ، زیرا فقط لازم است دو مقدار مختلف t_1 و t_2 از پارامتر وجود داشته باشند که $x(t_1) = x(t_2)$ و $y(t_1) = y(t_2)$. (این مقادیر در شکل‌عبارتنداز $t_1 = 1$ و $t_2 = 7$.) منظور از یک قوس از منحنی (۱) یعنی منحنیی با همان معادلات پارامتری ولی قلمرو $x(t)$ و $y(t)$ به زیر بازه‌ای از I محدود شده باشد .

مثال ۱ . نمودار تابع پیوستهٔ

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

را می‌توان با گرفتن x به عنوان پارامتر t و نوشتن

$$x = t, \qquad y = f(t) \qquad (a \le t \le b)$$

به شکل پارامتری نمایش داد (در اینجا قلمرو f را بازهٔ بسته گرفته‌ایم ، ولی هرنوع دیگر بازه ، متناهی یا نامتناهی ، به همین خوبی خواهد بود .) برای نمایش نمودار تابع پیوسته

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

به شکل پارامتری ، می‌نویسیم

$$x = g(t), \qquad y = t \qquad (a \le t \le b).$$

لذا ، تعریف جدید ما از منحنی دارای این خاصیت مطلوب‌است‌که تعریف قبلی را به‌عنوان حالتی خاص دربردارد .

مثال ۲ . منحنی

$$x = 1 + 2t, \qquad y = -1 + t \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۲}$$

خط مستقیمی است مار بر نقطهٔ $(1, -1)$ به شیب $\frac{1}{2}$. در واقع ، با حل اولین‌معادلهٔ (۲) نسبت به پارامتر t و گذاردن حاصل در معادلهٔ دوم ، معادلهٔ

$$y = -1 + t = -1 + \frac{1}{2}(x - 1) \tag{۲'}$$

به دست می‌آید که نمودارش خطی است به شیب $\frac{1}{2}$ و ماربر نقطهٔ $(1, -1)$. بابررسی (۲) فورا " معلوم می‌شود که نقطهٔ $(1, -1)$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است . همین خط بـا معادلات پارامتری

$$x = 1 + 2t^3, \qquad y = -1 + t^3 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

نیز نموده می‌شود ، زیرا وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، t^3 نیز چنین می‌کند ، یا با

$$x = 1 + 2\tan t, \qquad y = -1 + \tan t \qquad (-\pi/2 < t < \pi/2)$$

نمایش داده می‌شود ، زیرا وقتی t از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ افزایش یابد ، $\tan t$ از $-\infty$ تا ∞

افزایش خواهد یافت.

تبصره. بی‌نهایت تابع پیوسته $f(t)$ هست‌که، وقتی t بر بازه‌ای چون I افزایش می‌یابد، از $-\infty$ تا ∞ افزایش‌خواهندیافت. لذا، خط مستقیم (۲) بی‌نهایت نمایش پارامتری به شکل زیر دارد:

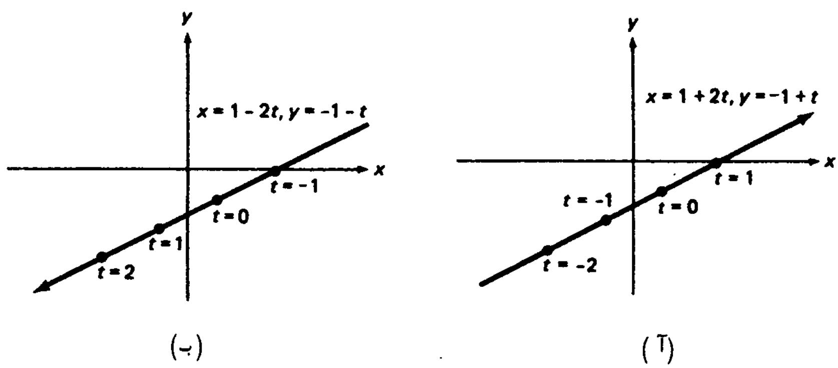
$$x = 1 + 2f(t), \qquad y = -1 + f(t) \qquad (t \text{ در } I)$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که هر منحنی بی‌نهایت نمایش پارامتری دارد.

جهت یک منحنی. منحنیها به شکل پارامتری یک جهت طبیعی مربوط به جهت افزایش t دارند. مثلاً، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد، نقطهٔ متغیر $P = (x, y)$ واقع بر خط (۲) آن را از چپ به راست رو به بالا می‌پیماید[ر.ک. شکل ۳۱ (آ)]. اما، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد، خط

$$x = 1 - 2t, \qquad y = -1 - t \qquad (-\infty < t < \infty),$$

که از همان نقاط خط (۲) تشکیل شده است، جهت مخالف را می‌پیماید؛ یعنی، از راست به چپ رو به پایین می‌رود[ر.ک. شکل ۳۱(ب)].



شکل ۳۱

به عنوان تمرین، نشان دهید که معادلات

$$x = 1 + 2\ln t, \qquad y = -1 + \ln t \qquad (0 < t < \infty)$$

نمایش همان خط L (۲)، با همان جهت است، ولی معادلات

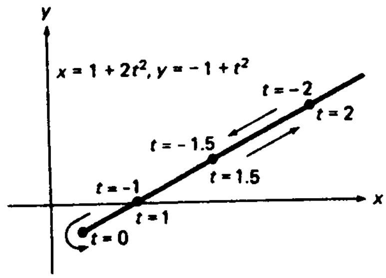
$$x = 1 + 2\cot t, \qquad y = -1 + 2\cot t \qquad (0 < t < \pi)$$

نمایش خط L با جهت مخالف می‌باشد.

مثال ۳. چون t^2 ذاتاً " نامنفی است ، منحنی

$$x = 1 + 2t^2, \qquad y = -1 + t^2 \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۳}$$

همان خط (۲) نبوده ، بلکه یک **شعاع** یا **نیمخط** است که ، همانطور که شکل ۳۲ نشان داده ، فقط از بخشی از خط (۲) تشکیل شده است . فرض کنیم t از $\infty-$ تا ∞ افزایش یابد. در



شکل ۳۲

این صورت ، نقطهٔ $P = (x, y)$ شعاع (۳) را دوبار می‌پیماید ، یکبار در جهت روبه پایین و یکبار در جهت رو به بالا ، و در نقطهٔ $(1, -1)$ که نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است می‌چرخد .

به عنوان تمرین ، نشان دهید که معادلات

$$x = 1 + 2e^t, \qquad y = -1 + e^t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

نمایش همان شعاع **بدون** نقطهٔ $(1, -1)$ است که یکبار در جهت رو به بالا پیموده‌می‌شود .

مثال ۴. به‌طورکلی ، منحنی

$$x = x_1 + at, \qquad y = y_1 + bt \qquad (-\infty < t < \infty, a \neq 0) \tag{۴}$$

خط مستقیمی است مار بر نقطهٔ (x_1, y_1) به شیب b/a . در واقع ، با حل معادلهٔ اول نسبت به t و گذاردن حاصل در معادلهٔ دوم ، به دست می‌آوریم

$$y = y_1 + \frac{b}{a}(x - x_1) = \frac{b}{a}x + \left(y_1 - \frac{b}{a}x_1\right), \tag{۴'}$$

که معادلهٔ خط مستقیم L به شیب b/a است . به‌علاوه ، نقطهٔ (x_1, y_1) بر L قرار دارد ، و این را می‌توان با قرار دادن $t = 0$ در (۴) یا $x = x_1$ در (۴′) دید . توجه کنید که منحنی (۴) درصورتی یک خط **قائم** است که $a = 0$ و $b \neq 0$.

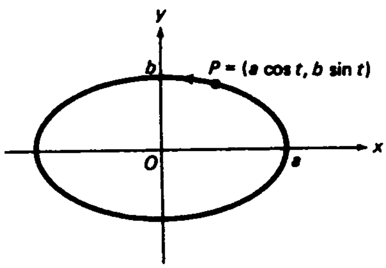
مثال ۵. منحنی

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi) \tag{۵}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $a > 0, b > 0$. چون $x/a = \cos t$ ، $y/b = \sin t$ و $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$ ، به آسانی می‌توان پارامتر t را از دو معادلهٔ پارامتری (۵) حذف کرد. با این کار معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۵'}$$

به دست می‌آید که **معادلهٔ دکارتی** منحنی نام دارد، زیرا تنها متغیرهای ظاهر شده‌درآن مختصات دکارتی یا قائم x و y می‌باشند. (مختصات قائم به افتخار فیلسوف وریاضیدان فرانسوی، رنه دکارت[1] (۱۶۵۰–۱۵۹۶) ، پایه‌گذار هندسهٔ تحلیلی،*مختصات دکارتی* نیز نام یافته‌اند.) نمودار (′۵) یک منحنی است به نام **بیضی** که در شکل ۳۳ به ازای $a > b$ نموده شده است. هر نقطه که مختصاتش در معادلات پارامتری (۵) صدق کنند در معادلهٔ



شکل ۳۳

دکارتی (′۵) نیز صدق می‌کنند؛ و لذا، بر بیضی قرار دارد. به عکس، به ازای هر نقطهٔ (x, y) از بیضی (′۵) ، مقداری مانند t وجود دارد که x و y در (۵) صدق می‌کنند. برای مشاهدهٔ این امر، تحقیق می‌کنیم که، وقتی t از 0 تا 2π افزایش یابد، نقطهٔ متغیر $P = (x, y) = (a\cos t, b\sin t)$ عملاً" تمام بیضی را یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، با شروع و اختتام در نقطهٔ $(a, 0)$ ، می‌پیماید. لذا، معادلات پارامتری (۵) و معادلهٔ دکارتی (′۵) **هم‌کشش** هستند بدین‌معنی‌که نمودارهای (۵) و (′۵) یکی می‌باشند. (این انطباق نمودارها خود بخود نیست، و این امر در مثال بعد روشن خواهد شد.) معادلات پارامتری (۵) ، حتی اگر a و b مجاز به منفی بودن باشند، همان بیضی‌را نمایش

---

1. René Descartes

می‌دهند جز آنکه اگر $ab < 0$ ، P بیضی را در جهت **عقربه‌های ساعت** می‌پیماید (چرا؟).
اگر $a = b$ ، $(5')$ به معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = a^2$$

که دایره به شعاع a و مرکز مبداء است تحویل می‌شود، و معادلات پارامتری‌نظیرعبارتنداز

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

البته، در اینجا پارامتر t زاویهٔ مرکزی نقطهٔ $P = (x, y)$ است؛ یعنی، زاویهٔ‌بین محور x مثبت و خط‌واصل بین مبداء و P که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت‌سنجیده می‌شود، ولی این تعبیر t در حالت بیضی با $a \neq b$ فرو می‌ریزد (دلیلش را توضیح دهید). اگر $a = 0, b \neq 0$ ، منحنی (۵) به پاره خط قائم واصل بین نقاط $(0, -b)$ و $(0, b)$ تحویل می‌شود، ولی اگر $a \neq 0, b = 0$ ، به پاره‌خط‌افقی واصل بین نقاط $(-a, 0)$ و $(a, 0)$ تحویل می‌شود، که وقتی t از 0 تا 2π افزایش یابد، هر دو پاره‌خط دوبارپیموده می‌شوند (این را تحقیق کنید). حالت $a = b = 0$ مستثنی شده است، زیرا در این صورت‌منحنی (۵) به تنها نقطهٔ $(0, 0)$ " تباه خواهد شد ".

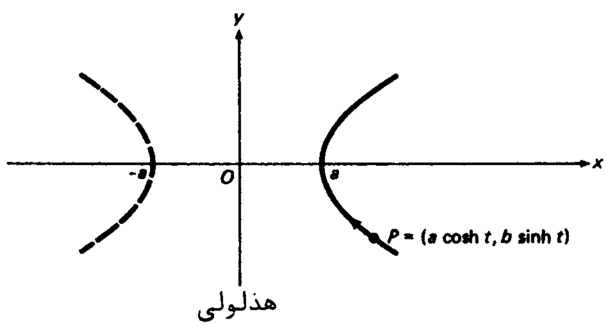
مثال ۶. حال منحنی

$$x = a\cosh t, \qquad y = b\sinh t \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۶}$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن $a > 0, b > 0$. چـون $x/a = \cosh t$ ، $y/b = \sinh t$ ، و $\cosh^2 t - \sinh^2 t \equiv 1$ ، می‌توان پارامتر t را از معادلات (۶) حذف‌کرده‌معادلهٔ‌دکارتی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۶'}$$

را به دست آورد. در شکل ۳۴ نمودار (۶′)، معروف به **هذلولی**، نموده شــده است، و



شکل ۳۴

متشکل است از دو منحنی از هم جدا (یعنی، دو منحنی بدون نقطهٔ مشترک) ، شاخهٔ چپ در نیمصفحهٔ چپ $x < 0$ و شاخهٔ *راست* در نیمصفحهٔ راست $x > 0$ قراردارد. چون هر نقطه از شاخهٔ چپ دارای مختص x منفی است و $a \cosh t$ همواره به ازای $a > 0$ مثبت است ، معلوم می‌شود که (۶) نمی‌تواند شاخهٔ چپ هذلولی را نمایش دهد ، بلکه فقط شاخهٔ راست را نمایش می‌دهد . به‌طور مشخص، از (۶) و خواص آشنای توابع $\cosh t$ و $\sinh t$ معلوم می‌شود که وقتی t از $-\infty$ تا 0 افزایش یابد، x از ∞ تا a کاهش و y از $-\infty$ تا 0 افزایش می‌یابد ، ولی وقتی t از 0 تا ∞ افزایش یابد ، x از a تا ∞ افزایش و y از 0 تا ∞ افزایش‌خواهدیافت. بنابراین، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، نقطهٔ متغیر $P = (x, y) = (a \cosh t, b \sinh t)$ در امتداد شاخهٔ راست هذلولی به بالا حرکت کرده ، و شاخهٔ چپ اصلاً ظاهر نخواهد شد . لذا ، در اینجا ، برخلاف مثال ۵، معادلات پارامتری و معادلهٔ دکارتی حاصل از حذف پارامتر t هم‌کشش **نیستند** .

اگر a مثبت ولی b منفی باشد ، منحنی (۶) مجدداً شاخهٔ راست هذلولی است ، ولی این بار در جهت رو به *پایین* پیموده می‌شود . برای به دست آوردن شاخهٔ چپ هذلولی از (۶) ، باید اجازه دهیم ثابت a منفی شود . در واقع ، اگر $a < 0$ ،منحنی (۶) شاخهٔ چپ هذلولی است (منحنی منقطع در شکل) ، که به ازای $b > 0$ در جهت بالا و به ازای $b < 0$ در جهت پایین پیموده می‌شود .

بحث بیضی و هذلولی در مثالهای ۵ و ۶ فقط یک مرور مقدماتی است . در فصل ۱۰ ، این منحنیهای مهم را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌دهیم .

مثال ۷. فرض‌کنید دایره‌ای به‌شعاع a در امتداد یک‌خط مستقیم افقی بدون‌لغزش‌می‌غلطد . منحنی پیموده شده‌توسط نقطهٔ‌ثابت P از محیط دایره را بیابید . (می‌توان P را سنگریزه‌ای تصور کرد که به شیار لاستیک اتومبیل چسبیده است .)

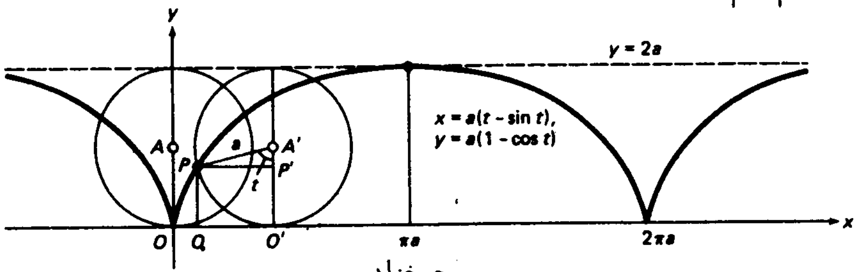
حل. فرض کنیم خط مستقیم محور x بوده ، و t زاویه‌ای به رادیان باشد که دایره ازموضعی که P بر مبداء O منطبق است چرخیده است . در این صورت ، منحنی پیموده شده توسط P به نام *چرخزاد* ، دارای معادلات پارامتری

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۷}$$

می‌باشد . در واقع ، باتوجه به شکل ۳۵ (آ) معلوم می‌شود که P دارای طول

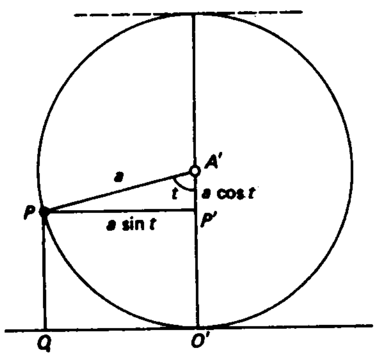
$$x = |OQ| = |OO'| - |QO'| = |OO'| - |PP'|$$

می‌باشد . اما $|OO'|$ مساوی طول قوس $\widehat{O'P}$ است ، زیرا دایره بدون لغزش می غلطد؛ درنتیجه $|OO'| = at$ حال آنکه از شکل ۳۵ (ب) ، که بزرگ‌شدهٔ قسمتی از شکل ۳۵ (آ) است ، می‌توان دید که $|PP'| = a \sin t$.



چرخزاد

(آ)



(ب)

شکل ۳۵

پس نتیجه می‌شود که

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

به همین نحو ، داریم

$$y = |O'A'| - |P'A'| = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

توجه کنید که این منحنی نمودار تابع $y = f(x)$ است ، که در آن f متناوب بادورهٔ تناوب اساسی $2\pi a$ بوده و در هر نقطهٔ

$$x = 2n\pi a \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

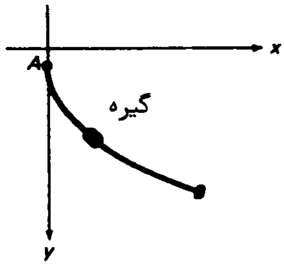
دارای مماس قائم (در واقع ، نقطهٔ بازگشت) است . به‌علاوه ، هر قوس چرخزاد روی یک بازه به شکل

$$(n - 1)\pi \le t \le n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

نمودار تابعی مانند $x = g(y)$ است . دلیلش را توضیح داده ، و بخصوص نشان دهید که روی بازهٔ $0 \le t \le \pi$ ،

$$x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

خواهیم دید که چرخزاد خواص مکانیکی جالبی دارد . سیمی را در صفحهٔ قائم در نظر می‌گیریم که نقطهٔ A را به نقطهٔ B پایین تر از A متصل می‌کند . همانند شکل ۳۶ ،



شکل ۳۶

فرض کنیم A مبداء یک دستگاه مختصات قائم باشد که محور y آن قائم و رو به پایین‌است. فرض کنیم سیم از یک گیرهٔ توخالی بگذرد که در امتداد سیم تحت نیروی ثقل می‌لغزد ،و نیز اصطکاک بین سیم و گیره قابل چشم‌پوشی باشد . می‌توان با روشهای پیشرفته‌نشان داد که قوسی از چرخزاد که بین A و B قرار دارد **کوتاه زمان** است؛ یعنی ، منحنیی است که زمان لازم برای آنکه گیره از A تا B پایین بیاید مینیمم‌است .جالب است که می‌توان نشان داد همین قوس از چرخزاد **همزمان** نیز هست؛ یعنی ، زمان لازم برای لغزیدن‌گیره‌به‌پایین از نقطهٔ P قوس به پایین‌ترین نقطهٔ B ، چه P بالاترین نقطهٔ A یا هر نقطهٔ بین A و B باشد ، یکسان است!

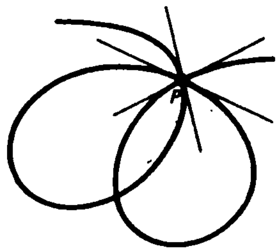
خط مماس بر یک منحنی پارامتری. یک منحنی پارامتری ، یعنی یک منحنی با معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (I \text{ در } t) \tag{۸}$$

داده شده است ، که در آن I یک بازه بوده ، a یک نقطهٔ درونی I است ،ومشتقات $x'(a)$ و $y'(a)$ هر دو موجود و متناهی‌اند و $x'(a) \neq 0$. در این صورت ، منحنی در نقطهٔ $P = (x(a), y(a))$ (خط) مماس داشته ، و شیب مماس مساوی است با

$$m = \frac{y'(t)}{x'(t)}\bigg|_{t=a} = \frac{y'(a)}{x'(a)}. \tag{۹}$$

طبق معمول، m نیز شیب منحنی در P نام دارد؛ توجه کنید که اگر منحنی به‌ازای مقادیر پارامتری دیگری مجدداً از P بگذرد، شیب منحنی در P ممکن است مقدار متفاوتی با m را بگیرد، و منحنی در چنین نقطه می‌تواند دو یا چند مماس داشته باشد (شکل ۳۷ این



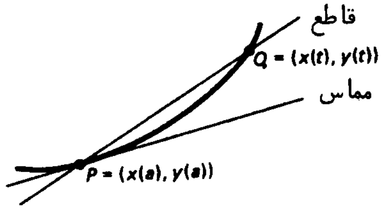
سه مماس در نقطهٔ P

شکل ۳۷

امکان را نشان می‌دهد). برای اثبات (۹) از تعریف m که در صفحهٔ ۱۸۷ داده شد شروع کرده، ملاحظه می‌کنیم که

$$m = \lim_{t\to a} \frac{y(t) - y(a)}{x(t) - x(a)}, \tag{۱۰}$$

زیرا خارج قسمت سمت راست شیب خط قاطع ماربر نقطهٔ $P = (x(a), y(a))$ و نقطهٔ متغیر $Q = (x(t), y(t))$ مثل شکل ۳۸ است. در اینجا تکیه براین امر است که اگر t به‌قدرکافی



شکل ۳۸

نزدیک a باشد، $x(t) - x(a) \neq 0$ ، که از فرض $x'(a) \neq 0$ نتیجه می‌شود (بیشتر توضیح دهید). با تقسیم صورت و مخرج خارج قسمت تفاضلی آمده در (۱۰) بر $t - a$ ، معلوم می‌شود که

$$m = \lim_{t\to a} \frac{\dfrac{y(t)-y(a)}{t-a}}{\dfrac{x(t)-x(a)}{t-a}} = \frac{\lim\limits_{t\to a}\dfrac{y(t)-y(a)}{t-a}}{\lim\limits_{t\to a}\dfrac{x(t)-x(a)}{t-a}} = \frac{y'(a)}{x'(a)}, \qquad (۱۱)$$

که (۹) را ثابت می‌کند.

معادلهٔ خط مماس بر منحنی (۸) در نقطهٔ $P = (x(a), y(a))$ را می‌توان به‌شکل دکارتی

$$\frac{y - y(a)}{x - x(a)} = m = \frac{y'(a)}{x'(a)},$$

یعنی،

$$y'(a)[x - x(a)] - x'(a)[y - y(a)] = 0, \qquad (۱۲)$$

یا، باتوجه به مثال ۲، به شکل پارامتری

$$x = x(a) + x'(a)t, \qquad y = y(a) + y'(a)t \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad (۱۲')$$

نوشت.

مثال ۸. مماس بر منحنی

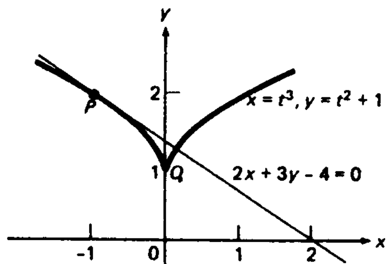
$$x = t^3, \qquad y = t^2 + 1 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

را در نقطهٔ $P = (-1, 2)$ و در نقطهٔ $Q = (0, 1)$ بیابید.

حل. چون t^3 یک تابع صعودی است، منحنی خود قطعی نداشته؛ و درنتیجه، مماسهای چندگانه نخواهد داشت. نقاط P و Q به ترتیب نظیر مقادیر $t = -1$ و $t = 0$ اند. داریم $x'(t) = 3t^2,\ y'(t) = 2t$؛ و در نتیجه، $x'(-1) = 3,\ y'(-1) = -2$. بنابراین، طبق (۹) و (۱۲)، مماس در P به شیب $m = -2/3$ بوده و به معادلهٔ

$$2x + 3y - 4 = 0,$$

مثل شکل ۳۹ است. از فرمول (۱۱) در Q نمی‌توان استفاده کرد، زیرا $x'(0) = y'(0) = 0$؛



شکل ۳۹

و درنتیجه، با اعمال مستقیم فرمول (۱۰) خواهیم داشت

$$m = \lim_{t\to 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+1) - 1}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}.$$

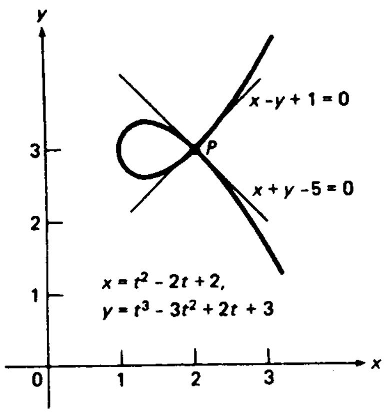
لذا، مقدار حدی خارج قسمت تفاضلی، بسته به اینکه t از راست یا چپ به 0 نزدیک‌شود، ∞ یا $-\infty$ است. بنابراین، طبق همان استدلال صفحهٔ ۳۰۸، منحنی در Q **مماس‌قائم** (یعنی، محور y) دارد. در واقع، همانطور که از شکل معلوم است، منحنی در Q نقطهٔ **بازگشت** دارد.

مثال ۹. مماسهای بر منحنی

$$x = t^2 - 2t + 2, \qquad y = t^3 - 3t^2 + 2t + 3 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

را در نقطهٔ $P = (2, 3)$ بیابید.

حل. نقطهٔ P نظیر است به دو مقدار از پارامتر: یعنی، $t = 0$ و $t = 2$ (تحقیق‌کنید). لذا، منحنی دوبار از P می‌گذرد، و دو مماس در P وجود دارند. چون $x'(t) = 2t - 2,$ $y'(t) = 3t^2 - 6t + 2$، داریم $x'(0) = -2$ ، $y'(0) = 2$ ، و $x'(2) = 2,$ $y'(2) = 2$. بنابراین، طبق (۹)، یکی از مماسها به شیب -1 و دیگری به شیب 1 می‌باشد. بنابر(۱۲) مماسها به معادلات $x + y - 5 = 0$ و $x - y + 1 = 0$ مثل شکل ۴۰ می‌باشند. به‌عنوان



شکل ۴۰

تمرین، معادلات پارامتری مماسها را با استفاده از (۱۲) بنویسید.

مسائل

تابع یا معادلهٔ دکارتی را بیابید که منحنی پارامتری داده شده نمودار آن باشد. منحنی‌را رسم کرده و جهت آن را نشان دهید.

۱. $x = 1 + 2t,\ y = 4t + 3 \quad (-1 \le t \le 0)$

۲. $x = -1 + 3t,\ y = 2 - 2t \quad (0 \le t \le 1)$

۳. $x = t^4,\ y = t^2 \quad (0 \le t < \infty)$

۴. $x = t^3,\ y = 6 \ln t \quad (0 < t < \infty)$

۵. $x = e^{-t},\ y = e^{2t} \quad (-\infty < t < \infty)$

۶. $x = t,\ y = \sqrt{t^2 - 9} \quad (3 \le t < \infty)$

۷. $x = \sqrt{4 - t^2},\ y = t \quad (-2 \le t \le 2)$

۸. $x = \cos t,\ y = \cos 2t \quad (0 \le t \le \pi)$

۹. $x = \sec t,\ y = \cos t \quad (\pi/2 < t \le \pi)$

۱۰. $x = \tan t,\ y = \sec t \quad (-\pi/4 \le t \le \pi/4)$

۱۱. $x = 2 \cos t,\ y = 2 \sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۱۲. $x = 2 - 3 \sin t,\ y = -1 + 3 \cos t \quad (2\pi \le t \le 4\pi)$

۱۳. $x = 5 \cos t,\ y = 4 \sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۱۴. $x = 2 \sin t,\ y = 3 \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۱۵. $x = 3 \cosh t,\ y = 4 \sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$

۱۶. $x = -2 \sinh t,\ y = 3 \cosh t \quad (-\infty < t < \infty)$

معادلات پارامتری خطوط زیر را بنویسید.

۱۷. به شیب -1 و قطع y، 4

۱۸. به شیب 2 و قطع x، -3

۱۹. با قطع x، 2 و قطع y، 6

۲۰. ماربر نقطهٔ $(3, -4)$ به شیب 5

۲۱. ماربر نقاط $(-3, 2)$ و $(4, 7)$

۲۲. ماربر نقاط $(1, 8)$ و $(9, -2)$

معادلات پارامتری زیر را بنویسید.

۲۳. دایره‌ای به شعاع 5 به مرکز $(-2, 3)$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت.

۲۴. دایره‌ای به قطر 6 به مرکز نقطهٔ $(4, -8)$ در جهت عقربه‌های ساعت.

۲۵. بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ در جهت عقربه‌های ساعت.

۲۶. بیضی $2x^2+5y^2=4$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت.

۲۷. شاخهٔ چپ هذلولی $16x^2-9y^2=144$ در جهت رو به بالا.

۲۸. شاخهٔ راست هذلولی $3x^2-2y^2=6$ در جهت رو به پایین.

۲۹. منحنی $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ از نقطهٔ $(1,0)$ تا نقطهٔ $(0,1)$.

۳۰. منحنی با معادلات پارامتری زیر را توصیف کنید:

$$x(t)=\begin{cases} t & \text{اگر } 0\le t\le 1 \\ 1 & \text{اگر } 1\le t\le 2 \\ 3-t & \text{اگر } 2\le t\le 3 \\ 0 & \text{اگر } 3\le t\le 4 \end{cases} \qquad y(t)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } 0\le t\le 1 \\ t-1 & \text{اگر } 1\le t\le 2 \\ 1 & \text{اگر } 2\le t\le 3 \\ 4-t & \text{اگر } 3\le t\le 4 \end{cases}$$

شیب m منحنی داده شده در نقطهٔ نظیر به مقدار مشخص شده از پارامتر t را بیابید.

۳۱. $x=t^2,\ y=2t,\ t=4$

۳۲. $x=\sqrt{t},\ y=t^2+1,\ t=9$

۳۳. $x=t^3,\ y=\ln(\ln t),\ t=e$

۳۴. $x=\cos t,\ y=t+\sin t,\ t=\pi/3$

۳۵. $x=2\cos^2 t,\ y=3\sin t,\ t=\pi/6$

۳۶. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ t=\pi$

۳۷. نمایش پارامتری هذلولی (۶) را طوری بیابید که مستلزم توابع هذلولی نباشد.

مماس(های) وارد بر منحنیهای زیر را بیابید.

۳۸. $x=4\cos t,\ y=2\sqrt{3}\sin t$ در $(2,3)$

۳۹. $x=t-t^4,\ y=t^2-t^3$ در $(0,0)$

۴۰. $x=t^3+1,\ y=t^2+t+1$ در $(0,1)$

۴۱. $x=\cosh t,\ y=2\sinh t$ در $(\frac{5}{4},\frac{3}{2})$

۴۲. فرض کنید

$$x=x(t),\qquad y=y(t)\qquad (t \text{ در } I)$$

یک منحنی پارامتری بوده، و a یک نقطهٔ درونی بازهٔ I باشد. همچنین، $x(t), y(t)$ دارای مشتقات متناهی $x'(t), y'(t)$ در همسایگی a باشند، که $x'(a)\neq 0$، و دارای مشتقات دوم متناهی $x''(a), y''(a)$ در خود نقطهٔ a باشند. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای و قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰، نشان دهید که

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x(a)}=\frac{x'(a)y''(a)-y'(a)x''(a)}{[x'(a)]^3} \qquad (\text{یک})$$

d^2y/dx^2 را در $x = x(a)$ درصورتی بیابید که

۴۳. $x = 2t^2, y = 3t^3, a = 1$

۴۴. $x = 5\cos t, y = 4\sin t, a = \pi/6$

۴۵. $x = t\cos t, y = t\sin t, a = 0$

۴۶. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, a = \pi/4$

منحنی داده شده کجا مماسهای قائم دارد؟

۴۷. $x = -1 + 2\cos t, y = 1 - 2\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۴۸. $x = -3\cos t, y = 4\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۴۹. $x = 2\cosh t, y = 3\sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$

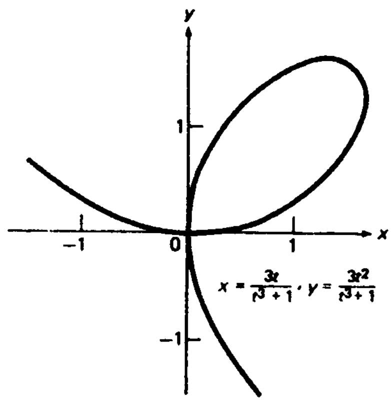
۵۰. $x = t^4 - 2t^2, y = t^3 + 1 \quad (-\infty < t < \infty)$

۵۱. نشان دهید که اگر $x'(a) = y'(a) = 0$ ، منحنی $x = x(t), y = y(t)$ ممکن است در نقطهٔ $P = (x(a), y(a))$ مماس قائم داشته باشد یا نداشته باشد.

۵۲. منحنی

$$x = \frac{3at}{t^3+1}, \qquad y = \frac{3at^2}{t^3+1} \qquad (-\infty < t < \infty, a > 0),$$

نموده شده در شکل ۴۱ برای حالت $a = 1$ ، چینهٔ دکارت نام دارد. معادلهٔ دکارتی



چینهٔ دکارت

شکل ۴۱

چینه را بیابید. چه مقادیری از پارامتر t آن قسمت از منحنی که در ربع اول است را می‌دهند؟ در ربع دوم را می‌دهند؟ در ربع چهارم را می‌دهند؟ نشان دهید که چینه در مبداء مماس افقی و قائم دارد.

۵۳. نشان دهید که نقطهٔ متغیر $P = (x, y)$ از منحنی

$$x = \frac{1}{t^2}(1 + \ln t), \qquad y = \frac{1}{t}(3 + 2\ln t) \qquad (0 < t < \infty)$$

در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y\frac{dy}{dx} = 1 + 2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

صدق می‌کند.

۵۴. نشان دهید که مماس و قائم به چرخزاد (۷) در نقطهٔ P از نقاط اوج و حضیض دایرهٔ مولد چرخزاد می‌گذرند (P بر محیط آن واقع است).

۵۵. سه مماس بر منحنی

$$x = t^3 - 3t^2 + 2t + 1, \quad y = t^6 - 5t^4 + 4t^2 + 2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

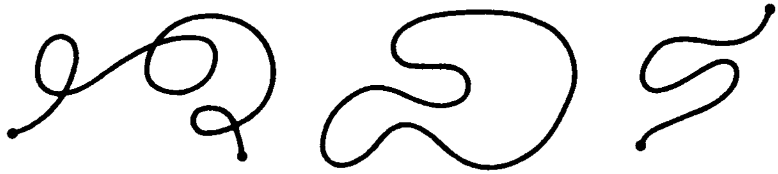
در نقطهٔ $(1, 2)$ را بیابید.

۴۰۸ طول یک منحنی مسطح

حال به مسئلهٔ یافتن طول منحنی مسطح C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

می‌پردازیم، که در آن C فقط تعدادی متناهی خود قطعی دارد، که بالاخص ایجاب می‌کند که هیچ قوسی از C بیش از یکبار پیموده نمی‌شود. نقطهٔ $A = (x(a), y(a))$ نقطهٔ شروع و نقطهٔ $B = (x(b), y(b))$ نقطهٔ *پایان* نام دارد، زیرا وقتی t از a تا b افزایش یابد، نقطهٔ متحرک $P = (x(t), y(t))$ منحنی C را با شروع در A و پایان در B می‌پیماید. نقاط A و B را *نقاط انتهایی* C می‌نامند. اگر A و B یکی باشند، گوییم C بسته است. یک منحنی بدون خودقطعی، جز احتمالاً با نقاط انتهایی یکسان، را *ساده* می‌گویند. شکل ۴۲ (آ) یک منحنی ساده با نقاط انتهایی متمایز، و شکل ۴۲ (ب) یک منحنی ساده با نقاط انتهایی یکسان، یعنی یک منحنی بستهٔ *ساده*، را نشان می‌دهد. منحنی نموده شدهٔ ۴۲ (پ) که سه



(آ) یک منحنی ساده — (ب) یک منحنی بستهٔ ساده — (پ) یک منحنی نه ساده نه بسته

شکل ۴۲

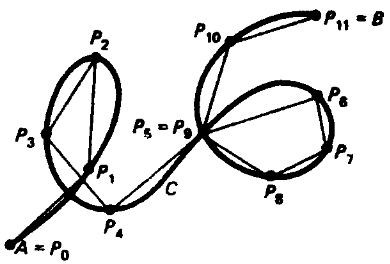
نقطهٔ خودقطعی دارد نه ساده است نه بسته .

تبصره. بنابر قضیهٔ مشهور منحنی ژردان[1] ، هر منحنی بستهٔ سادهٔ C صفحه را به دو ناحیهٔ متمایز تقسیم می‌کند که C مرز مشترک آنهاست و یکی از نواحی به نام **درون** C کراندار ، و ناحیهٔ دیگر به نام **برون** C بی‌کران است . با آنکه این نتیجه از نظر هندسی واضح است ، ولی *اثبات* آن واقعا " مشکل است ا به یاد آورید که ما فقط فرض کرده‌ایم توابع $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته‌اند ، که آزادی رفتار بسیاری به آنها خواهد داد .

در هندسهٔ مقدماتی ، طول فقط برای پاره‌خطها و قوسهای مستدیر (ومنحنیهای متشکل از این پاره‌خطها و قوسها) تعریف شده است . لذا ، اولین کار **تعریف** طول C است ، درست همانطور که مجبور به تعریف مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی یا حجم یک جسم بودیم . طبیعی است سعی کنیم C را با یک منحنی تقریب کنیم که طولش را از قبل می‌دانیم .بااین هدف ، بازهٔ $[a, b]$ را به‌وسیلهٔ مقادیر $a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b$ از پارامتر که در نامساویهای $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ صدق می‌کنند به n زیر بازه تقسیم می‌کنیم . این مقادیر از پارامتر t ، $n + 1$ نقطهٔ

$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

بر منحنی C معین می‌کنند که C را به n قوس تقسیم می‌نمایند که P_0 نقطهٔ شروع A و P_n نقطهٔ پایان B می‌باشد (برای حالت $n = 11$ ، ر.ک. شکل ۴۳) . چون فقط تعدادی



یک مسیر چندضلعی محاط شده در یک منحنی

شکل ۴۳

متناهی خودقطعی مجاز است ، بعضی از نقاط $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ممکن است با آنکه نظیر به

---

1. *Jordan*

مقادیر مختلفی از t اند باهم یکی باشند . مثلا" ، درمنحنی شکل فوق نقاط P_5 و P_9 یکی هستند .

مسیرهای چندضلعی و طول متناهی داشتن . حال فرض کنیم هر یک از نقاط $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ را با پاره‌خطی به نقطهٔ بعدی، مثل شکل فوق، وصل کرده باشیم . در این صورت ، C با **مسیر چندضلعی** $P_0P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$ تقریب می‌شود که در C *محاط* شده است و از n پاره خط $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ متصل به‌هم تشکیل شده‌است (نقاط $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ را رئوس $P_0P_1P_2\ldots P_n$ می‌نامند) . البته ، طول این مسیر چندضلعی چیزی جز مجموع طولهای پاره‌خطهای آن نیست؛ یعنی ، مسیر به طول

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \tag{1}$$

می‌باشد . فرض کنیم

$$\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\},$$

که درآن $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ طول زیر بازهٔ i م $[t_{i-1}, t_i]$ می‌باشد . پس ظاهرا" معقول است که (۱) را تقریب مناسبی برای طول C بگیریم ، که این تقریب با کوچک شدن μ بهتر خواهد شد . این کار پیشنهاد می‌کند که طول منحنی C را به صورت حد

$$L = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

تعریف کنیم مشروط براینکه این حد موجود و متناهی باشد ، که در این حالت گوییم C *با* **طول متناهی** است .

طول منحنی به عنوان انتگرال . معلوم می‌شود که پیوستگی توابع $x(t)$ و $y(t)$ با طول متناهی بودن منحنی C را تضمین نمی‌کند . به عبارت دیگر ، منحنیهایی مانند $(a \le t \le b)$ $x = x(t), y = y(t)$ با $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته وجود دارند که در آنها می‌توان مسیرهای چندضلعی با طول بدلخواه بزرگ محاط کرد . (یک مثال از چنین منحنی باطول نامتناهی در مسئلهٔ ۲۳ آورده‌شده‌است .) اما فرض کنیم توابع $x(t)$ و $y(t)$ بر $[a, b]$ **به‌طور پیوسته مشتقپذیر** باشند ، بدین معنی که $x'(t)$ و $y'(t)$ بر $[a, b]$ موجود و پیوسته باشند .[1] در این

---

۱ . مشتقات $x(t)$ و $y(t)$ در نقاط انتهایی a و b را باید مشتقات راست $x'_+(a), y'_+(a)$ و مشتقات چپ $x'_-(b), y'_-(b)$ تعبیر نمود . در این صورت ، لازم نیست $x(t)$ و $y(t)$ خارج بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشند .

صورت، C با طول متناهی و دارای طول L است که از رابطهٔ

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{۲}$$

به دست می‌آید. برای مشاهدهٔ این امر، ابتدا با استفاده از فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه طول مسیر چندضلعی محاطی را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

سپس قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات (قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۲۵۸) را برهرتفاضل مختصات $x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1})$ اعمال کرده، به دست می‌آوریم

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(u_i)\,\Delta t_i \qquad (t_{i-1} < u_i < t_i),$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(v_i)\,\Delta t_i \qquad (t_{i-1} < v_i < t_i).$$

با این می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\, \Delta t_i. \tag{۳}$$

اگر u_i و v_i به ازای هر i مساوی می‌بودند، عبارت سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوستهٔ $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ بر بازهٔ $[a, b]$ بود، و در این صورت می‌داشتیم

$$L = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2}\, \Delta t_i = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

و بدین وسیله فرمول (۲) ثابت می‌شد. در حالت کلی $u_i \neq v_i$، ولی شهودا" واضح به نظر می‌رسد که وقتی $\mu \to 0$، طرف راست (۳) هنوز باید به همان حد

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

نزدیک شود (بالاخره، $\mu \to 0$ ایجاب می‌کند که به ازای هر i، $u_i - v_i \to 0$). این در واقع درست است، و آن را می‌توان دقیقا" با استدلالی ثابت‌کرد مستلزم مفهومی (پیوستگی یکنواخت) که‌ازحوصلهٔ یک درس مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج‌است. لذا، از این به بعد فرمول (۲) را ثابت شده درنظر خواهیم گرفت.

مثال ۱. طول (به نام محیط) دایرهٔ

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

به شعاع a را بیابید.

حل. در اینجا

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = a \cos t,$$

و از فرمول (۲) داریم

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt$$
$$= a \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a,$$

که قبلا" از هندسهٔ مقدماتی آن را می‌دانستیم.

مثال ۲. طول L یک قوس کامل چرخزاد نموده شده در شکل ۳۵ (آ)، صفحهٔ ۷۳۰، را بیابید.

حل. این قوس کامل به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi, a > 0),$$

درنتیجه،

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \qquad \frac{dy}{dt} = a \sin t,$$

و

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(2 - 2\cos t)$$
$$= 2a^2\left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}\right) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

چون $a > 0$ و به ازای $0 \le t \le 2\pi$ ، $\sin (t/2) \ge 0$ ، از (۲) نتیجه می‌شود که

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt$$
$$= 2a\left[-2\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a.$$

این $8/2\pi \approx 1.27$ بار از محیط $2\pi a$ دایره به شعاع a که در ساختن چرخزاد به کار رفت بزرگتر است. لذا، به ازای هر میل طی شده توسط یک اتومبیل، سنگریزهٔ چسبیده‌به شیار

لاستیک چرخ مسافتی حدود $[(4/\pi) - 1](5280) \approx 1443$ ft را ، بی‌توجه به اندازهٔ لاستیک ، بیشتر طی خواهد کرد .

فرض کنیم C نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b) \tag{۴}$$

باشد . در این صورت ، C دارای نمایش پارامتری

$$x = t, \qquad y = f(t) \qquad (a \le t \le b) \tag{۴'}$$

بوده و رابطهٔ (۲) شکل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$

یا معادلا " ،پس‌ازتغییر متغیر انتگرالگیری از t به x ، شکل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{۵}$$

را به خود خواهد گرفت .

مثال ۳. هرگاه C نیمدایرهٔ

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \le x \le a)$$

باشد ، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

و از (۵) نتیجه می‌شود که

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = a \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

که در آن اینک با یک انتگرال مجازی سروکار داریم، با آنکه محاسبهٔ این انتگرال آسان بوده و مساوی π است (این را نشان دهید) ، ولی خیلی ساده‌تر است که C را بامعادلات پارامتری

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

نمایش دهیم ، زیرا در این صورت فورا " به دست می‌آوریم

$$L = a \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = a \int_0^\pi dt = \pi a$$

(با مثال ۱ مقایسه کنید) .

در واقع ،اگر C یک منحنی به‌شکل (۴) باشد که در آن $f(x)$ بر $[a, b]$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر است ، می‌توان فرمول (۵) را بدون استفاده از فرمول (۲) و نمایش‌پارامتری (۴) به‌طور مستقیم ثابت کرد . در واقع ، فرض کنیم

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}),$$

و قرار می‌دهیم $P_i = (x_i, f(x_i))$ ؛ درنتیجه ، مسیر چندضلعی $P_0P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$ در C محاط شده است . در این صورت ،

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2},$$

که در آن ، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین ،

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(u_i)\,\Delta x_i \qquad (x_{i-1} < u_i < x_i).$$

بنابراین ،

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(u_i)]^2}\,\Delta x_i$$

یک مجموع ریمان واقعی برای تابع پیوستهٔ $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ بر بازهٔ $[a, b]$ است ؛ولذا ، طول منحنی C مساوی است با

$$L = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

لذا ، فرمول (۵) را مستقیما " و دقیقا " ، با احتراز از " تکنیک u_i, v_i " که در برهان‌فرمول (۲) آمد ، ثابت کرده‌ایم . به عنوان تمرین ، مستقیما " و نیز از فرمول (۲) نشان‌دهید که هرگاه منحنی C نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

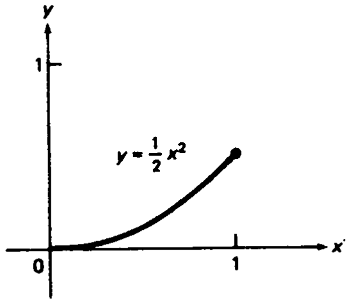
باشد ، آنگاه طول C از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$L = \int_a^b \sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\,dy, \qquad (5')$$

که مشابه (۵) است .

مثال ۴ . طول L قوسی‌از سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ رابیابید که مبداء را به نقطهٔ $(1, \frac{1}{2})$ وصل می‌کند.

حل. قوس مورد نظر در شکل ۴۴ نموده است. در اینجا $dy/dx = x$ ، و از رابطهٔ (۵) به



شکل ۴۴

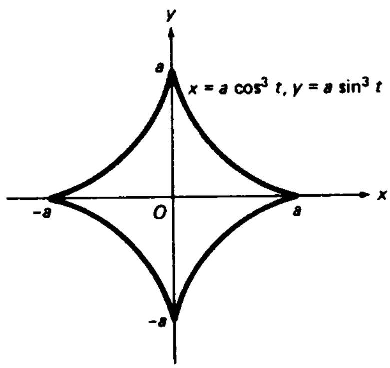
کمک مثال ۳، صفحهٔ ۶۲۸، نتیجه می‌شود که

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] \approx 1.15.$$

مثال ۵. منحنی

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \qquad (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0),$$

که در شکل ۴۵ نموده شده است، **ستاره‌گون** نام دارد. طول L آن را بیابید.



ستاره‌گون

شکل ۴۵

حل. از تقارن ستاره‌گون معلوم می‌شود که

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

چون

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

داریم

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)$$
$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

بنابراین، طبق (۲)، چون به‌ازای $0 \le t \le \pi/2$ ، $\cos t \ge 0, \sin t \ge 0$ ، خواهیم داشت

$$L = 12a\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\, dt$$
$$= 6a\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

مسائل

طول منحنی پارامتری داده شده را بیابید .

۱. $x = 2t^3, y = 3t^2 \quad (-1 \le t \le 1)$

۲. $x = t^2, y = t^3 \quad (0 \le t \le 2)$

۳. $x = \ln t, y = 1/t \quad (1 \le t \le 2)$

۴. $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t \quad (-\pi/2 \le t \le 0)$

۵. $x = e^t, y = e^{2t} \quad (-\infty < t \le 0)$

۶. $x = 3\sin^2 t, y = 2\cos^3 t \quad (0 \le t \le \pi/2)$

۷. $x = \cos t, y = t + \sin t \quad (-\pi \le t \le \pi)$

۸. $x = t\cos t, y = t\sin t \quad (0 \le t \le 1)$

۹. $x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t \quad (a \le t \le b)$

۱۰. $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t \quad (0 \le t \le 10)$

۱۱. تحقیق کنید که فرمول (۲) طول L پاره‌خط واصل بین دونقطهٔ دلخواه $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ را دقیقاً " به ما می‌دهد .

۱۲. نشان دهید که منحنی $y = \cosh x$ دارای این خاصیت است که طول منحنی روی بازهٔ $[a, b]$ مساوی مساحت تحت منحنی از $x = a$ تا $x = b$ می‌باشد .

طول منحنی داده شده (نمودار تابع x یا y) را بیابید .

۱۳. $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y} \quad (1 \le y \le 3)$

۱۴. $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4x^2} \quad (1 \le x \le 2)$

۱۵. $y = 2x^{3/2} + 3 \quad (0 \le x \le 7)$

۱۶. $x = \frac{1}{3}y^{3/2} - \sqrt{y} \quad (0 \le y \le 1)$

۱۷. $y = \ln x \quad (\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8})$

۱۸. $x = \ln \cos y \quad (0 \le y \le \pi/4)$

۱۹. $y = \ln \sin x \quad (\pi/3 \le x \le 2\pi/3)$

۲۰. $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln x \quad (1 \le x \le e)$

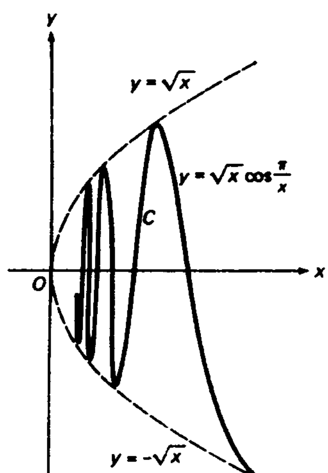
۲۱. $x = \int_0^y \sqrt{\cosh t}\, dt \quad (0 \le y \le 2)$

۲۲. $y = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, dt \quad (-\pi/2 \le x \le \pi/2)$

۲۳. تحقیق کنید که نمودار تابع پیوسته‌ء

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\frac{\pi}{x} & \text{اگر } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

نموده شده در شکل ۴۶ یک منحنی با طول نامتناهی مانند C است.

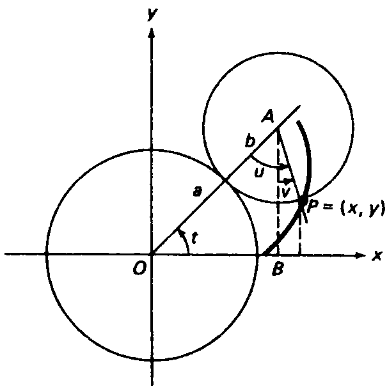


یک منحنی با طول نامتناهی

شکل ۴۶

۲۴. نشان دهید که ستاره‌گون به معادلات پارامتری $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$ دارای معادلهٔ دکارتی $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ است. طول ستاره‌گون را با استفاده از فرمول (۵)، به جای فرمول (۲) مثل مثال ۵، پیدا کنید. تحقیق کنید که، همانطور که از شکل ۴۵ مشهود است، ستاره‌گون در چهار نقطهٔ $(\pm a, 0)$، $(0, \pm a)$ نقطهٔ بازگشت دارد.

۲۵. فرض کنید دایره‌ای به شعاع b بدون لغزش در قسمت خارجی یک دایرهٔ ثابت به شعاع $a > b$ بغلطد. در این صورت، نقطهٔ $P = (x, y)$ روی محیط دایرهٔ غلطان یک منحنی به نام **بروچرخزاد** را می‌پیماید. فرض کنید P ابتدا در نقطهٔ $(a, 0)$ بوده، و t زاویهٔ بین محور x مثبت و خط واصل بین مراکز دو دایره مثل شکل ۴۷ باشد.



شکل ۴۷

نشان دهید که بروچرخزاد دارای معادلات پارامتری

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a + b}{b}t,$$

$$y = (a + b)\sin t - b\sin\frac{a + b}{b}t \qquad \text{(یک)}$$

است.

۲۶. در مسئلهٔ قبل، فرض‌کنید دایره به شعاع b در **داخل** دایره‌ای به شعاع $a > b$ بدون لغزش بغلطد. در این صورت، P یک منحنی به نام **بتوچرخزاد** را خواهد پیمود.

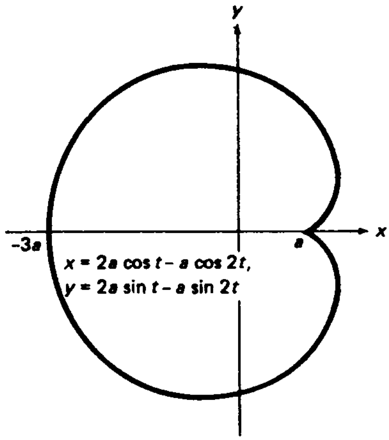
نشان دهید که بتوچرخزاد دارای معادلات پارامتری

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\frac{a - b}{b}t,$$

$$y = (a - b)\sin t - b\sin\frac{a - b}{b}t \qquad \text{(دو)}$$

می‌باشد . توجه کنید که با تغییر علامت b معادلات (یک) به معادلات (دو) تبدیل می‌شوند .

۲۷ . اگر $b = a$ ، بروچرخزاد به منحنی شکل ۴۸ بدل می‌شود که به **دلگون** معروف است ،



دلگون

شکل ۴۸

زیرا شبیه قلب می‌باشد . طول دلگون را پیدا نمایید .

۲۸ . نشان دهید که اگر $b = \frac{1}{4}a$ ، بتوچرخزاد به صورت ستاره‌گون درمی‌آید که در مثال ۵ و مسئلهٔ ۲۴ بررسی شد . (به این دلیل ، ستاره‌گون را **بتوچرخزاد چهاربازگشتی** نیز می‌نامند .) اگر $b = \frac{1}{3}a$ ، بتوچرخزاد چه خواهد شد ؟

۲۹ . اگر a/b عدد صحیحی باشد ، طول بروچرخزاد (یک)؛ بتوچرخزاد (دو) چقدر است ؟ جوابها را با اعمال آنها بر دلگون و ستاره‌گون امتحان نمایید .

۳۰ . انتگرال

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt \qquad (0 < k < 1)$$

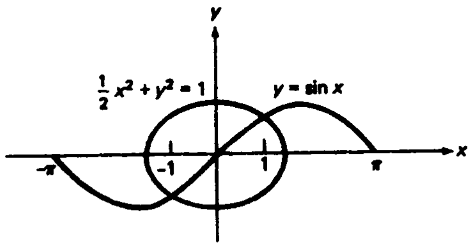
یک تابع غیرمقدماتی از k به‌نام *انتگرال بیضوی تام* از نوع دوم تعریف می‌کند. نشان دهید که بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

به طول $L = 4aE(\sqrt{a^2 - b^2}/a)$ می‌باشد .

۳۱ . تحقیق کنید که یک نوسان کامل منحنی سینوس $y = \sin x$ همان طول L بیضی $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$

را داراست (ر.ک. شکل ۴۹) . L را به کمک مسئلهٔ ۱۹ ، صفحهٔ ۶۷۴ ،تقریب‌نمایید .



دو منحنی با طول یکسان

شکل ۴۹

۵.۸ مساحت یک سطح دوار

فرض‌کنیم

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b)$$

معادلات پارامتری‌منحنی‌سادهٔ C در صفحهٔ xy باشند ، که در آن توابع $x(t)$ و $y(t)$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر بوده و $y(t)$ نامنفی می‌باشد . فرض‌کنیم C مثل شکل ۵۰ (آ) حول محور x چرخیده باشد . بااین کار سطح S ،به نام *سطح دوار*، با محور x به عنوان محوردوران تولید می‌شود . در این صورت، همانطور که اینک نشان می‌دهیم ، تعریف شایستهٔ مساحت Aی سطح S از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$(1) \qquad A = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

برای این کار ، ابتدا مسیر چندضلعی $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ را، درست‌مثل‌صفحهٔ ۷۳۹ که به تعریف طول C منجر شد ، محاط می‌کنیم . مثل قبل، رئوس مسیر چندضلعی‌عبارتنداز نقاط

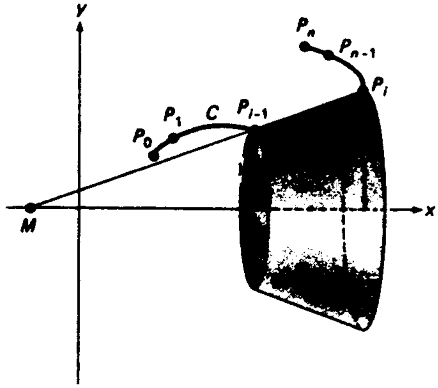
$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

که در آنها $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. وقتی C حول محور x دوران‌یابد ، هر پاره‌خط $P_{i-1}P_i$ یک نوار مخروطی B_i (سطح جانبی یک مخروط ناقص) ، مثل‌شکل ۵۰ (ب) ، را جارو می‌کند . مساحت B_i مساوی است با

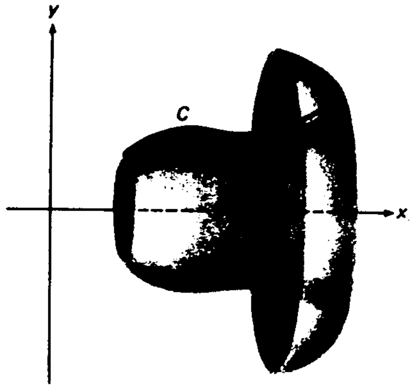
$$(2) \qquad A_i = \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i|,$$

که در آن $|P_{i-1}P_i|$ طول $P_{i-1}P_i$ بوده و

$$y_i = y(t_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$



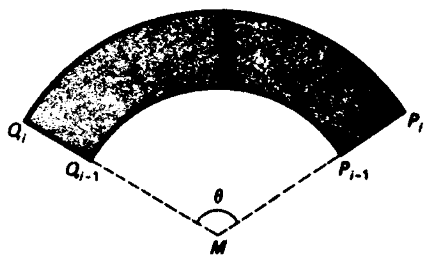
(ب)



(آ)

شکل ۵۰

برای اثبات (۲)، نوار B_i را در امتداد پاره‌خط $P_{i-1}P_i$ بریده و آن را صاف می‌کنیم تا ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۵۱ به دست آید (نوار را می‌توان با چسباندن اضلاع $P_{i-1}P_i$ و



شکل ۵۱

$Q_{i-1}Q_i$ مجدداً " ساخت). در این صورت، A_i تفاضل بین مساحات دو قطاع مستدیر با زاویهٔ مرکزی یکسان θ ، قطاع MP_iQ_i به شعاع $R = |MP_i|$ و قطاع $MP_{i-1}Q_{i-1}$ به شعاع $r = |MP_{i-1}|$ است.[1] بنابراین،

$$A_i = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}r^2\theta$$

---

۱. در اینجا فرض است که مثل شکل ۵۰(ب) $y_{i-1} < y_i$. هرگاه $y_{i-1} > y_i$ ، آنگاه $R = |MP_{i-1}|$ و $r = |MP_i|$ ، ولی هرگاه $y_{i-1} = y_i$ ، آنگاه B_i یک نوار استوانه‌ای به‌مساحت $2\pi y_i|P_{i-1}P_i|$ می‌باشد.

(ر.ک. صفحهٔ ۵۴). اما، طبق ساخت،

$$R\theta = 2\pi y_i, \qquad r\theta = 2\pi y_{i-1}, \qquad R - r = |P_{i-1}P_i|,$$

و درنتیجه،

$$A_i = \frac{1}{2}(R + r)(R - r)\theta = \frac{1}{2}(R\theta + r\theta)|P_{i-1}P_i| = \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i|,$$

که (۲) را ثابت می‌کند.

مساحت سطح به عنوان یک انتگرال. ظاهراً معقول است که مجموع مساحات تمام n نوار مخروطی B_i را تقریب مناسبی به مساحت سطح دوار S درنظر بگیریم، که این تقریب وقتی اندازهٔ مش

$$\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\} \qquad (\Delta t_i = t_i - t_{i-1})$$

کوچک شود بهتر خواهد شد. لذا، مساحت S را مساوی حد زیر **تعریف می‌کنیم**:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i| \\ &= 2\pi \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2}|P_{i-1}P_i|, \end{aligned}$$

مشروط براینکه حد موجود و متناهی باشد. محاسبهٔ طول $|P_{i-1}P_i|$ همانند صفحهٔ ۷۴۰ صورت می‌گیرد، و می‌توان این حد را به صورت زیر نوشت:

$$A = 2\pi \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\,\Delta t_i,$$

که در آن $t_{i-1} < u_i < t_i,\ t_{i-1} < v_i < t_i$. به‌علاوه، عدد $\frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ بین (یا احتمالاً منطبق بر) اعداد y_{i-1}, y_i قرار دارد؛ و درنتیجه، بنابر قضیهٔ مقدار میانی، به‌ازای w_i ای در بازهٔ $[t_{i-1}, t_i]$، $y(w_i) = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$. پس نتیجه می‌شود که

$$A = 2\pi \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} y(w_i)\sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\,\Delta t_i. \tag{۳}$$

اگر u_i، v_i، و w_i به ازای هر i مساوی باشند، عبارت سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوستهٔ $y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ بر بازهٔ $[a, b]$ است، ودراین‌صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \lim_{\mu\to 0} \sum_{i=1}^{n} y(u_i)\sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2}\,\Delta t_i \\ &= 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt, \end{aligned}$$

و بدین وسیله فرمول (۱) ثابت می‌شود. در حالت کلی u_i ، v_i ، و w_i یکی نیستند، ولی شهودا" واضح است که وقتی $\mu \to 0$ ، طرف راست (۳) باید به همان حد

$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

نزدیک شود (بالاخره، $\mu \to 0$ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر i ، $u_i - v_i \to 0,\ u_i - w_i \to 0$.) این در واقع درست است و می‌توان آن را با استدلالی تکنیکی که در اینجا داده نمی‌شود بدقت ثابت کرد. لذا، از این به بعد فرمول (۱) را ثابت شده می‌گیریم.

به عنوان تمرین، نشان دهید هرگاه $x(t)$ نامنفی بوده و منحنی C حول محور y به جای محور x دوران کند، آنگاه مساحت A ی سطح دوار S حاصل از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$A = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (۱')$$

مثال ۱. مساحت A ی سطح یک کره به شعاع r را بیابید.

حل. یک کره به شعاع r را می‌توان از دوران نیمدایرهٔ

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

حول محور x تولید کرد (ر.ک. شکل ۱۸، صفحهٔ ۷۱۰، که در آن نیمدایره بانمودارتابع $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ مشخص شده است). با اعمال فرمول (۱) فورا" به دست می‌آوریم

$$A = 2\pi \int_0^\pi r\sin t\,\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$
$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t\, dt = -2\pi r^2 \cos t\Big|_0^\pi = 4\pi r^2,$$

که فرمولی را ثابت می‌کند که از آن قبلا" چند بار استفاده کرده‌ایم.

مثال ۲. مساحت A ی سطح چنبرهٔ شکل ۲۳، صفحهٔ ۷۱۴، را بیابید؛ یعنی، مساحت‌سطح حاصل از دوران دایرهٔ $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ حول محور y را پیدا نمایید.

حل. دایره را می‌توان با معادلات پارامتری زیر نمایش داد:

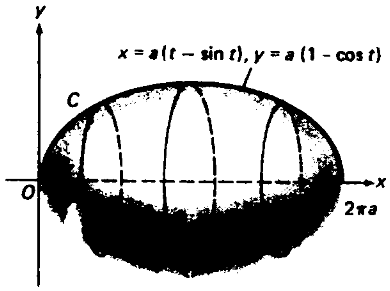
$$x = a + r\cos t, \qquad y = r\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

این بار فرمول (۱′) را به کار برده، به دست می‌آوریم

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + r\cos t)\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r\cos t)\, dt = 2\pi r \Big[at + r\sin t \Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ra.$$

مثال ۳. فرض کنیم C قوس کاملی از یک چرخزاد باشد. مساحت A ی سطح S حاصل از دوران C حول محور x (سطح به شکل توپ راگبی در شکل ۵۲) را بیابید.



شکل ۵۲

حل. مثل مثال ۲، صفحهٔ ۷۴۲، C دارای معادلات پارامتری

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$$

است و

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

چون $a > 0$ و، به ازای $0 \le t \le 2\pi$، $\sin(t/2) \ge 0$، به کمک (۱) پس از جانشانی $u = t/2$ معلوم می‌شود که

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sin \frac{t}{2}\, dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u\, du.$$

اما

$$\int_0^\pi \sin^3 u\,du = \int_0^\pi (1-\cos^2 u)\sin u\,du$$
$$= \left[-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^\pi = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

و درنتیجه،

$$A = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

فرض کنیم C نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

باشد. در این صورت، C دارای معادلات پارامتری

$$x = t, \qquad y = f(t) \qquad (a \le t \le b)$$

است، و فرمول (۱) مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور x، پس از بازگرداندن متغیر انتگرالگیری از t به x، به صورت زیر درمی‌آید:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (۴)$$

به همین نحو، در این حالت فرمول (۱´) برای مساحت سطح حاصل از دوران حول‌محور y به صورت زیر درمی‌آید:

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (۵)$$

به‌عنوان تمرین، نشان دهید که هرگاه منحنی C نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیر

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

باشد، آنگاه مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور x مساوی است با

$$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy = 2\pi \int_a^b y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\,dy, \qquad (۴´)$$

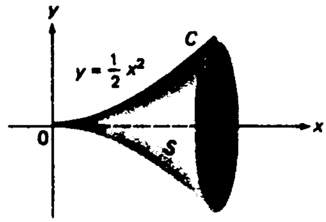
حال آنکه مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور y مساوی است با

$$A = 2\pi \int_a^b g(y)\sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy = 2\pi \int_a^b x\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\,dy. \qquad (۵´)$$

مثال ۴. فرض کنیم C همان قوس سهموی شکل ۴۴، صفحهٔ ۷۴۵، باشد؛ یعنی،

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad (0 \le x \le 1), \qquad (۶)$$

و فرض کنیم S سطح حاصل از دوران C حول محور x باشد (شکل بوقی شکل ۵۳) . پس $dy/dx = x$ ، و از (۴) نتیجه می‌شود که



شکل ۵۳

$$A = \pi \int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

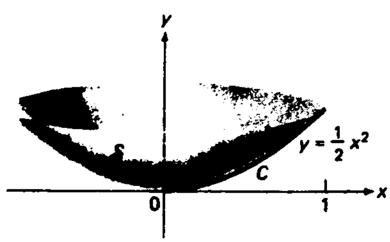
برای محاسبهٔ انتگرال، قرار می‌دهیم $x = \tan u$ و به‌کمک مثال ۶، صفحهٔ ۶۲۰، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^2}\, dx &= \int_0^{\pi/4} \tan^2 u\sqrt{1 + \tan^2 u}\, \sec^2 u\, du = \int_0^{\pi/4} \tan^2 u \sec^3 u\, du\\ &= \left[\frac{1}{4}\sec^3 u \tan u - \frac{1}{8}\sec u \tan u - \frac{1}{8}\ln|\sec u + \tan u|\right]_0^{\pi/4}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2} + 1),\end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$A = \left[\frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2} + 1)\right]\pi \approx 0.42\pi.$$

مثال ۵ . از دوران قوس سهموی (۶) حول محور y سطح کاسه شکل S شکل ۵۴ (بخشی از یک **سهمی گون دوار**) به دست می‌آید . در این صورت ، بنابر (۵) ،



شکل ۵۴

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{2\pi}{3}(1 + x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2^{3/2} - 1) \approx 1.22\pi.$$

مسائل

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی پارامتری داده شده حول محور ذکر شده را بیابید .

۱. $x = t^3, y = \frac{3}{2}t^2 \ (0 \le t \le 1)$ ، محور x

۲. $x = 1/t, y = \ln t \ (\frac{1}{2} \le t \le 1)$ ، محور y

۳. $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t \ (0 \le t \le \pi/2)$ ، محور y

۴. $x = t + \sin t, y = \cos t \ (0 \le t \le \pi/3)$ ، محور x

۵. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t \ (0 \le t \le \pi/2)$ ، محور x

۶. $x = 2e^{-t}, y = e^{-2t} \ (0 \le t < \infty)$ ، محور y

۷. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t \ (0 \le t \le \pi, a > 0)$ ، محور y

۸. $x = 2\cos t + \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t \ (0 \le t \le 2\pi/3)$ ، محور x

۹. فرض کنید ناحیهٔ تحت منحنی

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \qquad (0 \le x \le b, a > 0)$$

حول محور x دوران کرده باشد . نسبت حجم V جسم دوار حاصل به مساحت سطح جانبی A ی آن چقدر است ؟

۱۰. تحقیق کنید که فرمول (۱) مساحت A ی سطح نوار مخروطی حاصل از دوران پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ دلخواه $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ حول محور x را دقیقاً می‌دهد (فرض کنیم $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$) . به عنوان حالتی خاص، فرمول $A = \pi rL$ را برای مساحت جانبی یک مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع مایل L نتیجه بگیرید .

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی داده شده (نمودار تابع x یا y) حول محور ذکر شده را بیابید .

۱۱. $x = y^{1/3} \ (0 \le y \le 1)$ ، محور y

۱۲. $y = \sin x \ (0 \le x \le \pi/2)$ ، خط $x = -1$

۱۳. $x = \sin y \ (-\pi \le y \le 0)$ ، خط $x = 1$

۱۴. $y = |1 - x| + 1 - x \ (0 \le x < \infty)$ ، محور y

۱۵. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1} \ (1 \le x \le \sqrt{2})$ ، محور x

۱۶. $y = e^{-x}$ $(0 \le x < \infty)$ ، محور x

۱۷. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ $(1 \le x \le e)$ ، محور x

۱۸. $x = \frac{1}{8}y^2 - \ln y$ $(1 \le y \le 4)$ ، محور x

۱۹. فرض کنید S یک منطقهٔ کروی به ارتفاع h باشد؛ یعنی، سطح جدا شده از یک‌کره به شعاع R به‌وسیلهٔ دو صفحهٔ موازی به فاصلهٔ h از یکدیگر $(0 < h \le 2R)$ که هردوکره را قطع می‌کنند. مساحت S را یافته، و نشان دهید که از جای صفحات مستقل است (ر.ک. شکل ۱۵، صفحهٔ ۷۰۷).

۲۰. فرض کنید منحنی $y = 1/x$ $(x \ge 1)$ حول محور x دوران کرده جسم دوار بی‌کران S را تولید کند. نشان دهید S دارای حجم متناهی V است، ولی مساحت A ی سطح نامتناهی می‌باشد. V را بیابید. آیا سطح S (که گاهی " بوق گابریل[1] " نام دارد) را می‌توان با مقداری متناهی رنگ نقاشی کرد؟

۲۱. فرض کنید S سطح حاصل از دوران قوسی از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در ربع اول حول خط $x + y = 1$ باشد. مساحت S چقدر است؟

۶.۸ مطالب بیشتر در باب کار

فرض کنیم s مختص موضع ذره‌ای باشد که در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌کند، وبرآن نیروی متغیر $F = F(s)$ اثر نماید. دراین صورت، مثل صفحهٔ ۴۲۸، کار انجام شده‌توسط این نیرو بر ذره عبارت است از

$$W = \int_a^b F(s)\,ds, \qquad (1)$$

که در آن a موضع شروع و b موضع پایان ذره است. بخصوص، اگر $F(s)$ دارای مقدار ثابت F باشد، فرمول (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$W = F\int_a^b ds = F\cdot(b-a),$$

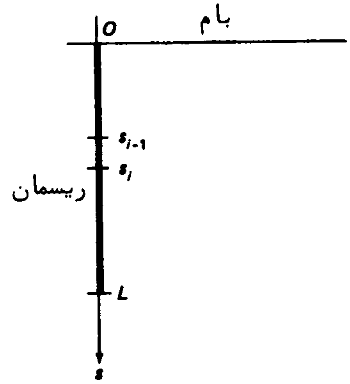
یعنی، کار مساوی حاصل‌ضرب نیرو در تغییر مکان $b - a$ (فاصلهٔ پیموده شده‌توسط ذره) است. حال مسائلی را درنظر می‌گیریم‌که در آنها کار بر یک " محیط پیوسته " مانند یک طناب یا یک مایع انجام می‌شود که می‌توان آن را متشکل از تعداد بسیارزیادی‌ذره گرفت.

مثال ۱. یک طناب سنگین به طول L فوت و به وزن c پوند بر فوت از لبهٔ یک‌بام آویزان

1. Gabriel

است. چقدر کار لازم است تا طناب را به بالای بام بکشانیم؟ از کار انجام شده بر طناب پس از گذشتن از لبهٔ بام صرف‌نظر کنید.

حل. همانند در شکل ۵۵، فرض‌کنیم محور s قائم و رو به پایین بوده و مبدأ لبهٔ بام باشد. در این



شکل ۵۵

صورت، طناب ابتدا بازهٔ $[0, L]$ را اشغال می‌کند. با معرفی نقاط تقسیم s_i که در نامساویهای $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = L$ صدق می‌کنند، $[0, L]$ را به تعداد زیادی زیر بازهٔ $[s_{i-1}, s_i]$ افراز کرده، بدین وسیله طناب را به تعداد زیادی "عنصر" کوچک تقسیم می‌کنیم که هر یک را می‌توان یک ذره درنظر گرفت. وزن عنصری که ابتدا زیر بازهٔ $[s_{i-1}, s_i]$ را اشغال می‌کند $c\,\Delta s_i$ پوند است، که $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$، و این نیروی ثقلی وارد بر عنصری است که در بالا بردن آن باید انجام داد. به‌علاوه، عنصر i م طناب با رفتن به بالای بام تغییر مکانی تقریباً" مساوی s_i (یا هر عدد دیگری در بازهٔ $[s_{i-1}, s_i]$) خواهد داشت؛ و درنتیجه، مقدار کار لازم برای بالابردن این عنصر تقریباً" مساوی است با $(c\,\Delta s_i)s_i$ فوت ــ پوند. هر تعریف معقول از مقدار کل کار W ی لازم برای بردن تمام طناب به بالای بام باید در این شرط صدق کند که W مجموع کارهای لازم برای بالا بردن تک تک عناصر طناب باشد. بنابراین،

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} cs_i \Delta s_i, \qquad (۲)$$

که در آن تقریب با کوچک شدن عناصر طناب، یعنی وقتی اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n\}$ به صفر نزدیک می‌شود، بهتر خواهد شد. حال، با توجه به اینکه طرف راست (۲) مجموع ریمانی برای تابع cs بر بازهٔ $[0, L]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$W = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} cs_i \Delta s_i = \int_0^L cs\, ds.$$

البته ، مقدار این انتگرال مساوی است با

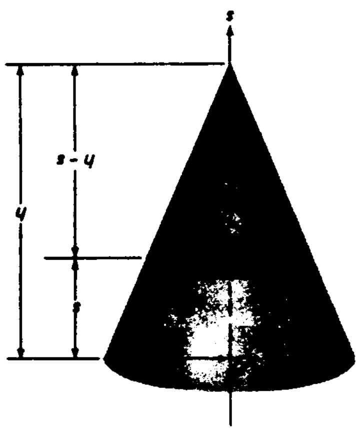
$$W = \frac{1}{2} cs^2 \Big|_0^L = \frac{1}{2} cL^2.$$

مثلا" ، اگر طناب 30 ft طول و 1.5 lb/ft وزن داشته باشد ، مقدار کار لازم برای‌بردن‌آن به بالای بام مساوی است با $\frac{1}{2}(1.5)(30)^2 = 675$ ft-lb .

کار انجام شده در پمپاژ یک مایع . در مثال زیر از همین نوع استدلال برای حل یک مسئلهٔ هیدرولیک استفاده می‌کنیم .

مثال ۲ . بشکه‌ای به شکل یک مخروط مستدیر قائم معکوس به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h **کاملا" از مایعی که چگالی‌اش** (جرم بر واحد حجم) ρ است پر شده است . چقدر کار لازم **است تا تمام مایع** از سر بشکه با لوله‌ای که درست زیر سطح آن قرار گرفته خارج گردد ؟

حل . همانند شکل ۵۶ ، محور تقارن مخروط‌را محور s می‌گیریم که جهتش به طور قائم روبه



شکل ۵۶

پایین بوده و مبداء آن مرکز قاعدهٔ مخروط باشد . فرض کنیم بازهٔ $[0, h]$ به‌وسیلهٔ نقاط تقسیم s_i صادق در نامساویهای $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = h$ بـه تعـداد

زیادی زیربازه $[s_{i-1}, s_i]$ تقسیم شده باشد. در این صورت، صفحات عمود برمحور s در نقاط به مختصات s_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ مخروط پر از مایع را به n لایه تقسیم می‌کنند. فرض کنیم $A(s)$ مساحت مقطع عرضی مخروط در s باشد؛ یعنی، قرص مستدیر جدا شده از مخروط به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور مخروط در نقطه به مختص s. لایهٔ i بین صفحات عمود بر محور s در نقاط به مختصات s_{i-1} و s_i در واقع یک مخروط ناقص است، ولی حجمش تقریبا" مساوی حجم یک استوانهٔ مستدیر قائم به مساحت قاعدهٔ $A(s_i)$ و ارتفاع $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$، یعنی $A(s_i)\Delta s_i$ (همین نوع تقریب در سراسر بخش ۱۰۸ در محاسبهٔ حجم به روش مقاطع عرضی به کار رفت)، می‌باشد. لذا، وزن مایع در لایهٔ i م تقریبا" $\rho g A(s_i)\Delta s_i$ است، که در آن ρ چگالی مایع و g شتاب ثقل می‌باشد. به‌علاوه، لایهٔ i م مایع برای رفتن تا سر بشکه به اندازهٔ تقریبا" s_i جابجا می‌شود؛ و درنتیجه، مقدار کار لازم برای بالابردن لایه تقریبا" $\rho g A(s_i)s_i\Delta s_i$ می‌باشد. فرض کنیم W کار کل لازم برای پمپاژ تمام مایع تا سر بشکه باشد. در این صورت، بنابر همان استدلال مثال پیش،

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \rho g A(s_i)s_i\Delta s_i, \tag{۳}$$

که درآن‌وقتی‌لایه‌های‌مایع همه‌باریک‌شوند، یعنی‌اندازهٔ‌مش $\mu = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n\}$ به صفر نزدیک شود، تقریب بهتر خواهد شد. بنابراین، چون طرف راست (۳) یک مجموع ریمان برای تابع $\rho g A(s)s$ بر بازهٔ $[0, h]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$W = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g A(s_i)s_i\Delta s_i = \int_0^h \rho g A(s)s\,ds.$$

برای محاسبهٔ انتگرال، فرض کنیم x شعاع مقطع عرضی مخروط در s مانند شکل باشد. در این صورت، بنابر تشابه مثلثها،

$$\frac{x}{h-s} = \frac{r}{h},$$

و درنتیجه،

$$x = \frac{r}{h}(h-s), \qquad A(s) = \pi x^2 = \pi\left(\frac{r}{h}\right)^2 (h-s)^2.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} W &= \int_0^h \rho g A(s)s\,ds = \pi\rho g\left(\frac{r}{h}\right)^2 \int_0^h (h^2 - 2hs + s^2)s\,ds \\ &= \pi\rho g\left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{1}{2}h^2s^2 - \frac{2}{3}hs^3 + \frac{1}{4}s^4\right]_0^h = \frac{1}{12}\pi\rho g r^2 h^2. \end{aligned}$$

مثلاً ، فرض کنیم بشکه به شعاع قاعدهٔ 2 m و ارتفاع 6 m بوده و پر از گلیسیرین به چگالی 1260 kg/m³ باشد. در این صورت ، با انتخاب $g = 9.8$ m/sec², معلوم می‌شود که کار لازم برای تخلیهٔ بشکه در دستگاه متری عبارت است از

$$W = \frac{1}{12}\pi(1260)(9.8)(2^2)(6^2) = 148{,}176\pi \approx 465{,}510 \text{ ژول}$$

یا ، در دستگاه مهندسی ، حدوداً 343,360 ft-lb می‌باشد.[1] برای آب ، که چگالی 1000 kg/m³ (در 4°C) است ، مقدار کار لازم برای تخلیهٔ بشکه تقریباً (1000/1260) (465,510) ≈ 369,450 ژول می‌باشد.

توان. میزان تغییر کار نسبت به زمان ، یعنی dW/dt ، را **توان** می‌نامند (ر.ک. مسئلهٔ ۲۹ ، صفحهٔ ۴۳۸). واحد mks توان **وات** است و آن برابر است با 1 ژول بر ثانیه. واحد مهم دیگر توان *اسب بخار* است و آن مساوی 746 وات یا 550 ft-lb/sec می‌باشد.

مثال ۳. یک پمپ بشکهٔ پر از گلیسرین مثال قبل را در 30 دقیقه تخلیه می‌کند. توان پمپ چقدر است؟

حل. کار پمپ در 30 دقیقه تقریباً 465,510 ژول است. بنابراین ، توان آن مساوی است با

$$\frac{465{,}510}{30(60)} \frac{\text{ژول}}{\text{ثانیه}} \approx 258.6 \text{ وات}$$

یا ، معادلاً ،

$$\frac{258.6}{746} \approx 0.35 \text{ اسب بخار}$$

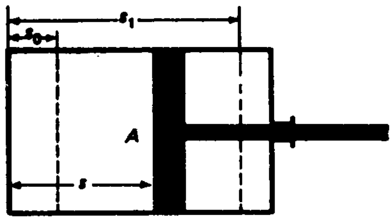
در اینجا فرض می‌کنیم پمپ با سرعت ثابت کار کند و مایع را با سرعت قابل چشم‌پوشی خارج

---

۱. در دستگاه واحدهای سانتیمتر ـ گرم ـ ثانیه (cgs) ، واحد نیرو دین است و آن نیرویی است که به جرم ۱ گرم شتاب 1 cm/sec² وارد می‌کند ، حال آنکه در دستگاه متر ـ کیلوگرم ـ ثانیه (mks) ، واحد نیرو نیوتن است و آن نیرویی است که به جرم 1 kg شتاب 1 m/sec² می‌دهد. واحدهای نظیر برای کار عبارتند از دین ـ سانتیمتر یا ارگ و نیوتن ـ متر یا ژول (1 ژول = 10^7 ارگ = 0.7376 ft-lb).

می‌کند؛ درنتیجه، تمام قدرتش صرف بالابردن مایع شده و به مایع انرژی جنبشی‌نمی‌دهد. برای ساده بودن وضع، نیز فرض می‌کنیم (که نسبتاً " غیرواقعی است) پمپ آنقـدر کارا است که تفاضل بین توان ورودی و توان خروجی آن قابل چشم‌پوشی می‌باشد.

مثال ۴. در یک استوانهٔ مستدیر با مساحت مقطع عرضی A که به یک پیستون قابل حرکت مجهز شده است گاز وارد کرده‌ایم (ر.ک. شکل ۵۷). کار انجام شده توسط گاز بر پیستون



استوانهٔ دارای یک پیستون

شکل ۵۷

در انبساط از حجم اولیهٔ V_0 به حجم نهایی V_1 را بیابید.

حل. فرض کنیم p فشار (یعنی، نیرو بر واحد مساحت) گاز بر سطح پیستون بوده، و s فاصلهٔ بین پیستون و سر استوانه باشد. همچنین، انبساط گاز پیستون را از موضع اولیهٔ s_0 تا موضع نهایی s_1 حرکت می‌دهد. وقتی گاز منبسط می‌شود، فشارش تغییر می‌کند (درواقع کاهش می‌یابد)؛ و درنتیجه، همین امر در مورد نیروی pA وارد بر پیستون صادق اسـت. لذا، کار W وارد بر پیستون به وسیلهٔ انبساط گاز مساوی است با

$$W = \int_{s_0}^{s_1} pA\, ds.$$

در اینجا فشار تابعی از مختص s است، ولی می‌توان آن را به صورت تابـع $p = p(V)$ از حجم $V = As$ گاز محبوس درنظر گرفت. بنابراین، اگر متغیر انتگرالگیری را از s به V تغییر دهیم، می‌توانیم W را به شکل معادل زیر بنویسیم:

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\, dV, \qquad (۴)$$

که درآن V_0 حجم اولیه و V_1 حجم نهایی می‌باشد.

انبساط همدما. مثال ۴ را ادامه داده، فرض می‌کنیم گاز به‌*طور همدما*، یعنی‌دردمای ثابت

منبسط شود . در این صورت ، فشار و حجم به‌وسیلهٔ **قانون بویل**[1]

$$pV = C = \text{ثابت} \qquad (۵)$$

با تقریبی مناسب ،دست‌کم اگر نه فشار و نه دما خیلی پایین نباشند ،به‌هم مربوط‌می‌شوند . توجه کنید که $C = p_0V_0 = p_1V_1$ ، که درآن p_0 فشاراولیه‌و p_1 فشار نهایی‌گاز می‌باشد . پس از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = C\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V} = C\ln V\Big|_{V_0}^{V_1} = C\ln\frac{V_1}{V_0} = p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}. \qquad (۶)$$

مثلا" ، در انبساط همدما از حجم اولیهٔ $2\ \text{ft}^3$ به حجم نهایی $10\ \text{ft}^3$ ، گاز که ابتدا در فشار $50\ \text{lb/in}^2$ است کاری مساوی

$$144(50)(2)\ln\frac{10}{2} = 14{,}400\ln 5 \approx 23{,}176\ \text{ft-lb}$$

انجام می‌دهد (144 عامل تبدیل از lb/in^2 به lb/ft^2 می‌باشد) .

انبساط بی‌دررو (اختیاری) . از آن سو ،فرض‌کنیم گاز **به‌طور بی‌دررو** ، یعنی‌بدون معاوضهٔ گرما با محیط اطرافش، منبسط شود . در این صورت ، فشار و حجم گاز با فرمول

$$pV^k = C = \text{ثابت} \qquad (۵')$$

به هم مربوط می‌شوند ، که در آن k ثابت دیگری است که به ماهیت گاز بستگی دارد؛ k برای گازهای تک اتمی 1.67 و برای گازهای دو اتمی 1.40 می‌باشد . از روابط (۴) و (۵') معلوم می‌شود که

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = C\int_{V_0}^{V_1} V^{-k}\,dV = C\frac{V^{1-k}}{1-k}\Big|_{V_0}^{V_1} = \frac{C}{1-k}(V_1^{1-k} - V_0^{1-k}).$$

اما $C = p_0V_0^k = p_1V_1^k$ ، که در آن p_0 فشار اولیه و p_1 فشار نهایی گاز است؛ و لذا ،

$$W = \frac{p_0V_0 - p_1V_1}{k-1}. \qquad (۷)$$

در انبساط $V_1 > V_0$ ، ولی در تراکم $V_1 < V_0$. در تراکم بی‌دررو ، کار W' انجام شده توسط پیستون بر گاز قرینهٔ (۷) است؛ یعنی ،

$$W' = -W = \frac{p_1V_1 - p_0V_0}{k-1}. \qquad (۷')$$

---

1. *Boyle*

این را می‌توان پس از جانشانی مقدار p_1 حاصل از حل معادلهٔ $p_1V_1^k = p_0V_0^k$ به شکل زیر نوشت:

$$W' = \frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right] \tag{۸}$$

مثلاً، فرض کنیم هوا با فشار اولیهٔ $25\ \mathrm{lb/in^2}$ به‌طور بی‌دررو از حجم اولیهٔ $900\ \mathrm{in^3}$ به حجم نهایی $60\ \mathrm{in^3}$ متراکم شود. در این صورت، چون برای هوا $k = 1.4$،

$$W' = \frac{1}{12}\,\frac{25(900)}{0.4}\left[\left(\frac{900}{60}\right)^{0.4} - 1\right] = 4687.5[(15)^{0.4} - 1] \approx 9160\ \text{ft-lb}$$

($\frac{1}{12}$ عامل تبدیل از in-lb به ft-lb است) . به عنوان تمرین، نشان دهید که فقط 55% کار برای تراکم همین هوا به‌طور همدما لازم می‌باشد.

مسائل

۱. یک کابل سنگین به طول 20 m و چگالی خطی 5 kg/m ابتدا روی زمین قرار دارد. سپس آن را به‌طور قائم بالا می‌بریم تا انتهای آزاد آن در 4 m ی زمین آویزان شود. چقدر کار روی کابل انجام شده است.

اطاقک یک آسانسور به وزن 1 تن از کابلی به طول 100 ft و وزن 10 lb/ft آویزان بوده و با پیچیدن کابل روی یک قرقره در بالای تیر آسانسور بالا می‌رود.

۲. وقتی اطاقک 50 ft از پایین‌ترین موضع خود بالا رود، چقدر کار بر آن؟ برکابل‌صورت گرفته است؟

۳. وقتی اطاقک از ارتفاع 50 ft به ارتفاع 75 ft برسد، چقدر کار بر آن و بر کابل صورت گرفته است؟

۴. سطلی پر از آب به‌طور قائم باسرعت 2.5 ft/sec به بالا برده شده است. وزن سطل 5 lb بوده و ابتدا شامل 45 lb آب است، ولی همین‌طور که بالا می‌رود، آب‌به‌میزان 1.25 lb/sec از آن نشت می‌کند. چقدر کار لازم‌است تا سطل سوراخ به‌ارتفاع 50 ft؟ به ارتفاع 100 ft برسد؟

۵. چقدر طول‌می‌کشد تا یک‌پمپ به‌توان 2-hp مقدار 150,000 ft³ آب‌را از سطح‌یک‌دریاچه به ارتفاع 12 ft بالای سطح دریاچه برساند؟ (چگالی وزن آب با تقریبی مناسب مساوی 62.5 lb/ft³ است.)

۶. دو آبشار روی یک‌رودخانه قرار دارند. یکی در ارتفاع 45 ft و دیگری در ارتفاع 30 ft واقع است. اگر سرعت آب رودخانه 2250 ft³/sec باشد، توان کل دو آبشار چقدر

است؟

۷. بشکه‌ای به ارتفاع h از مایعی به چگالی ρ تا عمق d پر شده است. فرض کنید صفحهٔ افقی به فاصلهٔ s پایین‌تر از سر بشکه آن را در ناحیه‌ای به مساحت $A(s)$ قطع کند. کار W لازم برای پمپاژ تمام مایع از سر بشکه را بیابید.

۸. چاهی به قطر 4 ft و عمق 30 ft تا نصف آب دارد. کار لازم برای پمپاژ تمام آب تا سر چاه را بیابید. چقدر کار لازم است تا 250 گالن آب پمپاژ گردد؟ (یک‌گالن 231 اینچ مکعب است.)

۹. یک کاسه از مایعی به چگالی ρ پرشده و به شکل نیمکره‌ای به شعاع r است. چقدر کار لازم است تا تمام مایع تا ارتفاع h بالای کاسه برده شود؟

۱۰. فرض‌کنید کار لازم برای پر کردن یک بشکه به ارتفاع h از یک مایع به‌وسیلهٔ سوراخی در ته آن W_1 باشد. اگر W_2 کار لازم برای تخلیهٔ بشکه به‌وسیلهٔ پمپاژ تا سرآن‌باشد، W_1 چه رابطه‌ای با W_2 دارد؟

۱۱. بشکه‌ای به شکل یک مخروط مستدیر قائم وارون به شعاع قاعدهٔ 3 ft و ارتفاع 5 ft تا عمق 4 ft از آب پر شده است. با استفاده از فرمول منشـــور (یک)، صفحهٔ ۶۷۳، کار لازم برای پمپاژ تمام آب به سر بشکه؛ تا ارتفاع 2 ft بالای بشکه را بیابید.

۱۲. بشکه‌ای به شکل هرم قائم به ارتفاع h که قاعده‌اش مربعی به طول ضلع a است (این هرم در شکل ۵، صفحهٔ ۷۰۰، نموده شده است). کار لازم برای پر کردن بشکـه با مایعی به چگالی ρ از طریق سوراخی در ته آن (قاعدهٔ مربع) را بیابید. همچنین، کار لازم برای تخلیهٔ‌بشکه از طریق سوراخی در سر آن (نوک هرم) را پیدا کنید.

۱۳. هرم بزرگ چه اوپس در گیزه نزدیک قاهره در اصل به ارتفاع 147 m با قاعدهٔ مربع به طول ضلع 230 m بوده است. این هرم از بلوکهای سنگ آهک با چـگالی تقریبی $2500\ kg/m^3$ ساختــه شده است. مقدار کار و تعداد افراد و سالهای لازم‌برای ساختن هرم را تخمین بزنید. فرض‌کنید متوسط‌کار کارگر 50 ساعت در هفته، یک سال‌کاریک سال استراحت، بوده و در هر دقیقــه کــار تقریبا" 50 kg به مسافت 1 m بالابرده می‌شود.

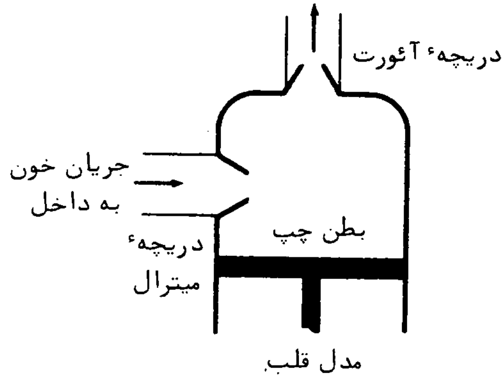
۱۴. پیستون یک موتور بخار 90 ضربه در دقیقه، هر یک به طول 15 in می‌زند. فرض‌کنید مساحت مقطع عرضی‌استوانه $48\ in^2$ بوده، و فشار متوسط‌بر پیستون در طول یک‌ضربه $60\ lb/in^2$ باشد. اگر موتور به طور کامل کار کند، متوسط‌خروجی موتور چقدراست؟

۱۵. چقدر کار لازم‌است‌تا $720\ in^3$ هلیوم در فشار اولیهٔ $20\ lb/in^2$ به حجم نهایی $40\ in^3$ به‌طور همدما؟ به‌طور بی‌دررو متراکم شود؟ (هلیوم یک گاز تک اتمی است.)

۱۶ . یک گاز در انبساط همدما از حجم اولیهٔ $40\ in^3$ و فشار 16 آتمسفر $1568\ ft\text{-}lb$ کارانجام می‌دهد . حجم و فشار نهایی گاز را بیابید . (یک آتمسفر مساوی $14.7\ lb/in^2$ است .)

۱۷ . فرض کنید $p = p(h)$ و $\rho = \rho(h)$ فشار و چگالی هوا در ارتفاع h از سطح دریا باشند . هرگاه دما ثابت باشد ، آنگاه $p = k\rho$ ، که در آن k ثابت تناسب است (این صورت دیگری است از قانون بویل) . از تغییرات دمای هوا نسبت به ارتفاع صرف‌نظرکرده ، **معادلهٔ فشاری** $p = p_0 e^{-gh/k}$ را به دست آورید ، که در آن p_0 فشار هوا در سطح دریا و g شتاب ثقل می‌باشد .

۱۸ . قلب انسان از دیدگاه مکانیکی یک پمپ است (ر.ک. شکل ۵۸) که در آن خون از دریچهٔ میترال وارد بطن چپ شده و سپس وقتی ماهیچهٔ قلب منقبض می‌شود از دریچهٔ آئورت خارج می‌گردد ، و بدین ترتیب حجم قلب کاهش می‌یابد . دریک‌قلب جوان و سالم ، در هر انقباض فشار دیوارهٔ قلب بر خون به‌طور تقریبا "خطی ازفشار



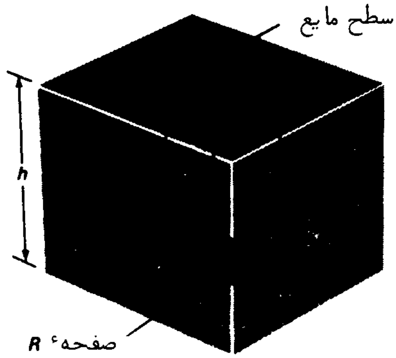
شکل ۵۸

انبساطی $80\ mm\ Hg$ (میلیمتر جیوه) به فشار انقباضی $120\ mm\ Hg$ افزایش می‌یابد . کار W انجام شده توسط قلب در یک ضربان آن را درصورتی تخمین بزنید که تغییر حجم خون در یک انقباض تقریبا " $75\ cm^3$ باشد . ($100\ mm\ Hg \approx 1.33 \times 10^5$ دین $/cm^2$) .

۷.۸ فشار مایع (دلخواه)

یک صفحهٔ تخت نازک به شکل ناحیهٔ مسطح R به مساحت A است که در مایعی فرو رفته است . فرض کنیم مایع به چگالی جرم ρ ، یا معادلا " به چگالی وزن $\delta = \rho g$ ، باشد

که در آن g شتاب ثقل است . فرض کنیم R افقی بوده و در عمق h قرار داشته باشد ؛ در نتیجه ، R و سطح آزاد مایع مثل شکل ۵۹ درفاصلهٔ h از هم قراردارند . پس نیروی F وارد از طرف مایع بر R چیزی جز وزن مایع موجود در یک استوانهٔ قائم به ارتفاع h وقاعدهٔ R



شکل ۵۹

نیست (در اینجا یک فرض تلویحی می‌کنیم که در تبصرهٔ بعداز مثال ۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد) . چون حجم استوانه Ah است ، نتیجه می‌شود که

$$F = \delta Ah \qquad (۱)$$

لذا ، نیروی F با عمق h متناسب می‌باشد . از تقسیم F بر مساحت A معلوم می‌شودکه ***فشار*** یعنی نیرو بر واحد مساحت ، بر صفحهٔ شناور نیز با h متناسب می‌باشد :

$$p = \delta h. \qquad (۲)$$

نیروی (۱) و فشار (۲)را ، حتی وقتی مایع آب نباشد ، " هیدرواستاتیک " می‌نامند .

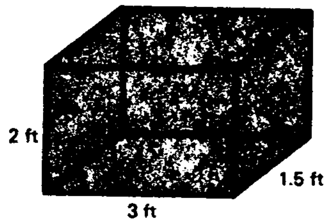
اصل پاسکال[1] . این نتایج کلیتر از آنند که ابتدا به نظر می‌رسند زیرا ، بنابر ***اصل پاسکال***، فشار در هر نقطه از یک مایع ***در تمام جهات یکی است*** . لذا ، یک " سطح آزمایش " کوچک به مساحت a که در عمق h از مایعی به چگالی وزن δ قرار دارد ، بی‌توجه به جهت سطح ، نیروی یکسان $F = \delta ah$ را تحمل‌می‌کند .در این حکم فرض کرده‌ایم سطح آنقدرکوچک باشد که تغییر فشار روی آن حتی وقتی به صورت قائم است (بدترین حالت) قابل چشم پوشی باشد . در غیر این صورت ، برای به دست آوردن نیروی وارد بر سطح ، باید به طریقی که

---

1. *Pascal*

ذیلا " توصیف می‌شود از فشار روی سطح انتگرال گرفت .

مثال ۱ . یک آکواریم به شکل مکعب مستطیل به طول 3 ft ، عرض 1.5 ft ، و ارتفاع 2 ft است (ر . ک . شکل ۶۰) . نیروی وارد از طرف آب بر ته آکواریم را بیابید . فشار وارد بر ته آن چقدر است ؟ در عمق 6 in چقدر است ؟



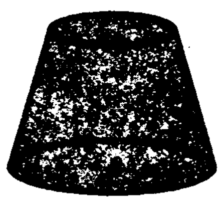
شکل ۶۰

حل . فرض کنیم آکواریم کاملا " پر از آب بوده ، و از وجود ماهی یا گیاه احتمالی صرف‌نظر می‌کنیم . چگالی وزن δ ی آب را مساوی $62.5\ \mathrm{lb/ft^3}$ اختیار می‌کنیم (δ عملا "بادما تغییر می‌کند) . از (۱) نتیجه‌می‌شود که نیروی‌وارد بر ته آکواریم ، که‌مستطیلی‌به‌مساحت $4.5\ \mathrm{ft^2}$ است ، مساوی است با $(62.5)(4.5)(2) = 562.5\ \mathrm{lb}$. به‌علاوه ، طبق (۲) ، فشار بر قاعده عبارت است از $(62.5)(2) = 125\ \mathrm{lb/ft^2}$ ، و فشار در عمق 6 in برابر است با

$$(62.5)(0.5) = 31.25\ \mathrm{lb/ft^2}$$

در مثال ۲ ، نیروهای وارد از طرف آب بر دیواره‌های قائم آکواریم به دست خواهندآمد .

تبصره . اگر ساختن یک استوانهٔ پر از مایع روی ناحیهٔ R ممکن نباشد ، نمی‌دانیم چه رخ می‌دهد . مثلا " ، اگر R قاعدهٔ ظرف شکل ۶۱ باشد ، اطراف مایل ظرف از ساختن یک‌چنین

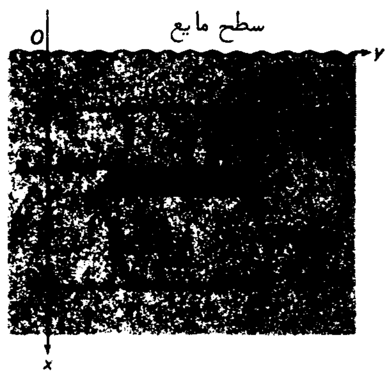


شکل ۶۱

استوانه جلوگیری می‌کند . با کمال تعجب خواهیم دید که فرمولهای (۱) و (۲) حتی

در این شرایط برقرارند . در بدو امر ، این " تناقض هیدرواستاتیک " به نظر غیر قابل توضیح است تا اینکه درک کنیم نیروهای وارد از طرف مایع بر دیوارههای ظرف دارای یک مولفهٔ **رو به پایین** است که مایع را به ته ظرف انتقال میدهد . لذا ، نیروی کل وارد بر ته ظرف در واقع مجموع این موءلفهٔ رو به پایین و وزن مایع داخل ظرف است . درواقع ، یک تحلیل مشروح نشان میدهد که ، **بیتوجه به شکل ظرف** ، F دقیقا " همانی است که اگرظرف یک استوانهٔ قائم با همان قاعدهٔ R و پر از مایع تا همان عمق میبود!

نیروی وارد بر یک صفحهٔ شناور . حال مسئلهٔ یافتن نیروی وارد بر صفحهٔ شناور R را که افقی نیست مطرح میکنیم ؛ درنتیجه ،فشار از یک نقطه بهنقطهٔ دیگر تغییر میکند . ما خود را به حالت مهمی که در آن R قائم است محدود میکنیم (با اینحال ، ر.ک . مسائل ۱۳و ۱۴) . همانند در شکل ۶۲ ، مختصات قائم x و y را درنظر میگیریم که محور x قائم وروبه



شکل ۶۲

پایین بوده و محور y در امتداد سطح آزاد مایع باشد . فرض کنیم R ناحیهای درصفحهٔ xy باشد که به خطوط افقی $x = a, x = b$ $(a < b)$ و نمودار توابع $y = f(x), y = g(x)$ محدود شده است ، که f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $f(x) \geq g(x)$. بازهٔ $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم x_i صادق درنامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ به تعداد زیادی زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ افراز میکنیم . درنتیجه ، خطوط $x = x_i$ ، R رابهتعداد زیادی نوار افقی R_i تقسیم میکند ،که R_i ناحیهٔ محدود به خطوط $x = x_{i-1}$ ، $x = x_i$ و منحنیهای $y = f(x), y = g(x)$ است . هر نوار R_i تقریبا " مستطیلی بهمساحتتقریبی $[f(x_i) - g(x_i)]\Delta x_i$ است ،کهدرآن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و میتوان x_i را هر نقطهٔ دیگری از

بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ نیز گرفت. به‌علاوه، با آنکه نقاطی از R_i در عمقهایی متغیر از x_{i-1} تا x_i وجود دارند، اگر Δx_i کوچک باشد این تغییر عمق جزئی بوده و می‌توان تمام نقاط R_i را تقریبا" در یک عمق، مثلا" x_i، گرفت. بنابراین، از فرمول (۱) و اصل پاسکال معلوم می‌شود که نیروی وارد از طرف مایع برنوار R_i تقریبا" مساوی است با $\delta[f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i$.

بقیهٔ استدلال به نحو آشنایی ادامه می‌یابد. فرض کنیم F نیروی کل وارد از طرف مایع بر تمام صفحهٔ R باشد. دراین صورت، F مجموع نیروهای وارد بر تک‌تک نوارهای R_i می‌باشد. بنابراین،

$$F \approx \delta \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i, \tag{۳}$$

که در آن تقریب در صورت باریک‌شدن تمام نوارهای R_i، یعنی وقتی‌اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ به صفر نزدیک شود، بهتر خواهد شد. حال، با توجه به اینکه طرف راست (۳) یک مجموع ریمان تابع $[f(x) - g(x)]x$ بر بازهٔ $[a, b]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$F = \delta \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]x\, dx.$$

این را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$F = \delta \int_a^b w(x)x\, dx, \tag{۴}$$

که در آن $w(x) = f(x) - g(x)$ عرض ناحیهٔ R در عمق x زیر سطح مایع می‌باشد.

مثال ۲. نیروی وارد از طرف آب بر دیواره‌های قائم آکواریم مثال ۱ را بیابید.

حل. دو دیوارهٔ قائم مستطیلهایی به عرض 3 ft و ارتفاع 2 ft بوده، و دو تای دیگر مستطیلهایی به عرض 1.5 ft و ارتفاع 2 ft می‌باشند. لذا، در حالت اول $w(x) \equiv 3$، ولی در حالت دوم $w(x) \equiv 1.5$. همچنین، $a = 0$ (آکواریم تا سر از آب پر شده‌است) و $b = 2$. پس نتیجه می‌شود که نیروی F_1 وارد بر دیواره‌های بزرگتر مساوی است با

$$F_1 = 62.5 \int_0^2 3x\, dx = 187.5 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 375 \text{ lb}.$$

حال آنکه نیروی وارد بر دیواره‌های کوچکتر برابر است با

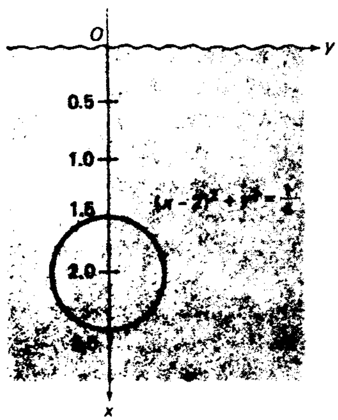
$$F_2 = 62.5 \int_0^2 1.5x\, dx = 93.75 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 187.5 \text{ lb}.$$

فرض کنیم آکواریم فقط تا نصف آب داشته باشد. در این صورت، هنوز داریم $a = 0$ (به یاد آورید که مبداء در سطح آزاد آب قرار دارد)، ولی در اینجا $b = 1$. به‌عنوان تمرین، نشان دهید که این هر دو نیروی F_1 و F_2 را چهار برابر کوچکتر می‌سازد.

مثال ۳. یک بشکهٔ تقطیر که از الکل اتیل به چگالی وزن $\delta = 7950$ نیوتن/m^3 پر شده است در یکی از جداره‌های قائم خود یک دریچهٔ شیشه‌ای مستدیر دارد. دریچه به‌شعاع 0.5 m بوده، و بالاترین نقطهٔ دریچه 1.5 m زیر سطح الکل است. چه نیرویی از سوی الکل بر دریچه وارد می‌شود؟

حل. مختصات را مثل شکل ۶۳ اختیار می‌کنیم. می‌بینیم که قاب دریچه دایره‌ای است به معادلهٔ

$$(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$



شکل ۶۳

بنابراین، دریچه ناحیه‌ای است بین منحنیهای $y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2}$ و $y = g(x) = -\sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2}$ روی بازهٔ $[1.5, 2.5]$؛ درنتیجه،

$$w(x) = 2\sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2} \qquad (1.5 \le x \le 2.5).$$

پس از فرمول (۴) نتیجه می‌شود که نیروی F وارد از سوی الکل بر دریچه مساوی است با

$$F = 15{,}900 \int_{1.5}^{2.5} \sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2}\, x\, dx.$$

برای محاسبهٔ انتگرال، جانشانی $u = x - 2$ را انجام داده به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F &= 15{,}900 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,(2 + u)\,du \\ &= 31{,}800 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,du + 15{,}900 \int_{-0.5}^{0.5} u \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,du \\ &= 31{,}800 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,du, \end{aligned}$$

که در آن از فرد بودن تابع $u\sqrt{\frac{1}{4} - u^2}$ استفاده کرده‌ایم (بیشتر توضیح دهید) .آخرین انتگرال چیزی جز مساحت یک قرص نیمه‌مستدیر به شعاع $\frac{1}{2}$ نیست؛ و لذا، مساوی $\frac{1}{8}\pi$ می‌باشد . بنابراین،

$$F = \frac{31{,}800\pi}{8} = 3975\pi \approx 12{,}488 \text{ نیوتن}$$

به‌عنوان تمرین، تحقیق کنید که نیروی F حاصل ضرب مساحت دریچه در فشار در مرکز آن است .

شناوری‌واصل ارشمیدس[1] . مثال۴ . یک‌تکه چوب به طول a ، عرض b ، و ارتفاع c که‌بخشی از آن در دریاچه‌ای فرو رفته در آب شناور است . فرورفتگی h چوب از سطح آب‌راپیداکنید [ر.ک. شکل ۶۴(آ)] . فرض‌کنید چوب تمایلی به واژگون شدن نداشته باشد .

حل . فرض‌کنیم δ چگالی وزن آب باشد . بنابر فرمول (۱) ، آب نیروی " شناوری " رو به بالای $F = \delta abh$ را بر ته چوب وارد می‌کند . اما abh حجم آب جابجا شده توسط چوب است؛ و درنتیجه، ***نیروی شناوری مساوی وزن آب جابجا شده است*** . این حالت‌خاصی‌است از ***اصل ارشمیدس*** که می‌گوید نیروی‌خالص‌وارد بر یک‌جسم شناور یا غوطه‌ور ***به شکل دلخواه*** از سوی مایع اطرافش یک‌نیروی شناوری رو به‌بالاست‌که مساوی وزن مایع جابجاشده‌می‌باشد . توجه کنید که در این مسئله، نیروهای وارد از سوی آب بر چهار جدارهٔ قائم چوب‌دو بدو یکدیگر را حذف می‌کنند؛ و لذا، اثری بر چوب نخواهند داشت .

برای یافتن فرورفتگی h چوب در آب، ملاحظه می‌کنیم که در حالت تعادل نیروی شناوری F بر چوب مساوی قرینهٔ‌وزن w چوب است . اما $w = \delta' abc$ ، که در آن δ' چگالی

---

1. *Archimedes*

وزن چوب می‌باشد . لذا ، شرط تعادل به صورت زیر درمی‌آید :

$$F = \delta abh = \delta' abc = w. \qquad (۵)$$

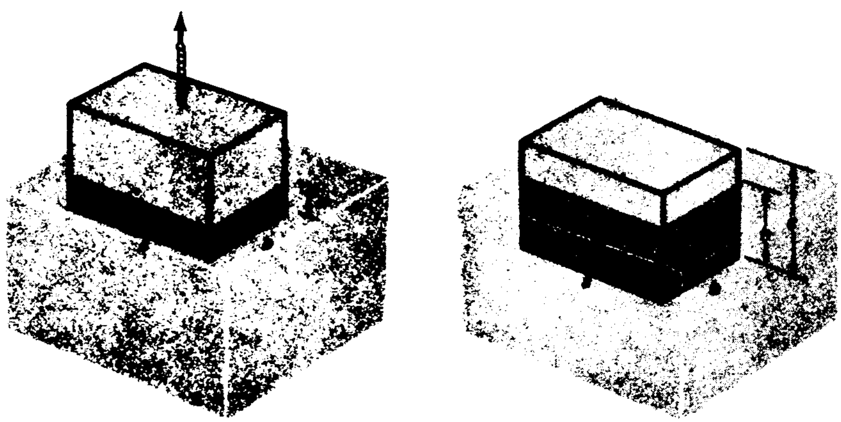
با حل نسبت به h به دست می‌آوریم $h = (\delta'/\delta)c$ ، یا معادلاً

$$h = \alpha c,$$

که در آن $\alpha = \delta'/\delta$ **ثقل مخصوص** چوب‌است ؛ یعنی ، نسبت چگالی آن به چگالی آب می‌باشد.

مثال ۵ . فرض کنید قطعه چوب مثال ۴ با طنابی که به نقطهٔ میانی وجه بالایی آن بسته شده به‌طور قائم به بالا کشیده شود . کار لازم برای بالابردن چوب تا وقتی ته آن از سطح آب بیرون بیاید چقدر است . (از وزن طناب و هر اثر ناشی از کشش سطحی صرف‌نظرمی‌شود.)

حل . وقتی ته چوب در فاصلهٔ x زیر سطح آب قرار دارد ، چوب نیروی شناوری رو به‌بالای δabx را تحمل می‌کند که مساوی وزن آب جابجا شده توسط قسمت غوطه‌ور چوب می‌باشد [ر.ک . شکل ۶۴ (ب)] . بر چوب نیروی روبه‌پایینی مساوی وزن آن w نیز وارد می‌شود ؛



(ب) (آ)

شکل ۶۴

و درنتیجه ، نیروی خالص رو به پایین بر چوب $F(x) = w - \delta abx$ است . اما ، بنابرفرمول (۵) ، $w = \delta abh$ ؛ و لذا ،

$$F(x) = \delta ab(h - x).$$

بنابراین، برای بیرون کشیدن چوب از آب، باید با انجام کار

$$W = -\int_h^0 F(x)\,dx = \int_0^h F(x)\,dx = \delta ab \int_0^h (h-x)\,dx$$

$$= \delta ab\left[hx - \frac{1}{2}x^2\right]_0^h = \frac{1}{2}\delta abh^2 = \frac{1}{2}wh$$

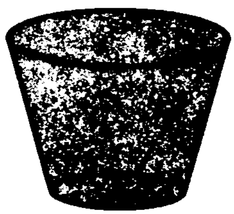
بر این نیرو فایق آمد.

مسائل

۱. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک سد مستطیلی قائم به عرض 40 ft و ارتفاع 30 ft را وقتی بیابید که سطح آب 4 ft پایین‌تر از لبهٔ سد باشد.

۲. نیروهای هیدرواستاتیک وارد بر شش وجه یک مکعب غوطه‌ور به طول ضلع 2 ft را در صورتی بیابید که وجه بالایی 5 ft زیر سطح یک دریاچه و موازی با آن باشد.

۳. فنجانی به شکل یک مخروط ناقص وارون به ارتفاع h و مساحت قاعدهٔ A می‌باشد (ر. ک. شکل ۶۵). فشار وارد بر قاعدهٔ فنجان را درصورتی بیابید که از مایعی به‌چگالی



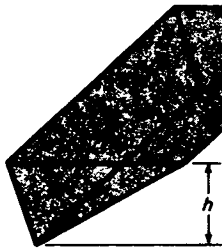
شکل ۶۵

وزن δ پر شده باشد. آیا نیروی وارد بر قاعده مساوی وزن مایع در فنجان‌است؟ چه نیرویی آن قسمت از مایع که مستقیما " روی قاعدهٔ فنجان نیست را تحمل می‌کند؟

۴. یک صفحهٔ مستطیلی در یک مایع به چگالی وزن δ به‌طور قائم وارد شده است‌به‌طوری که یکی از اضلاعش موازی (یا در امتداد) سطح مایع قرار می‌گیرد. نشان دهید که نیروی وارد بر یک طرف صفحه مساوی حاصل‌ضرب مساحت آن در فشار در مرکز آن (نقطهٔ تقاطع قطرها) است.

۵. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک‌صفحهٔ‌مربع شکل به طول ضلع a را درصورتی‌بیابید که صفحه در مایعی به چگالی وزن δ به‌طور قائم طوری وارد شده است که یکی‌ازرئوس مربع در سطح مایع و یکی از اقطار موازی سطح مایع قرار دارد.

۶ یک تغار با دو انتهای مثلثی شکل به مساحت A کاملا" در مایعی به چگالی وزنا δ تا عمق h فرورفته است (ر.ک. شکل ۶۶). نیروی F وارد از سوی مایع بر هر انتها را بیابید. آیا F به شکل مثلث بستگی دارد؟



شکل ۶۶

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک طرف صفحهٔ قائمی را بیابید که در مایعی به‌چگالی‌وزنی δ فرورفته است مشروط بر اینکه صفحه به شکل زیر باشد:

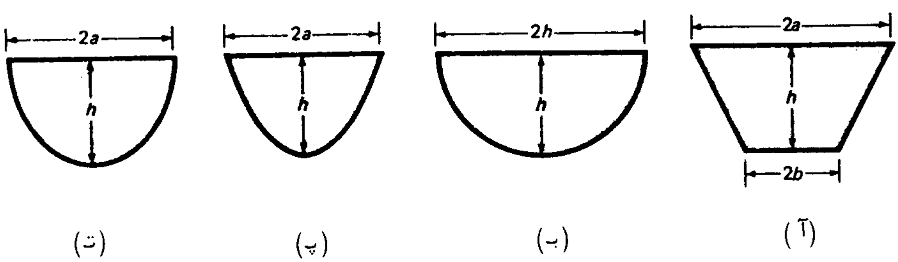
۷. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین شکل ۶۷ (آ)

۸. قرص نیمه‌مستدیر شکل ۶۷ (ب)

۹. قطعه سهمی شکل ۶۷ (پ)

۱۰. ناحیهٔ نیمه بیضوی شکل ۶۷ (ت)

در هر حالت، لبهٔ بالایی صفحه در امتداد سطح مایع قرار دارد.



شکل ۶۷

صفحهٔ نازکی به شکل ناحیهٔ محدود به محور x و نمودار تابع

$$y = b\cos\frac{\pi x}{2a} \qquad (-a \le x \le a, b > 0)$$

می‌باشد. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر صفحه را درصورتی بیابید که در مایعی به چگالی

وزن δ به شکل زیر فرورفته است مشروط بر اینکه

۱۱ . لبهٔ مستقیم صفحه در امتداد سطح مایع است .

۱۲ . لبهٔ مستقیم صفحه بر سطح مایع عمود بوده و یک انتهای آن در سطح مایع می‌باشد .

۱۳ . یک قرص مستدیر به شعاع 1 ft در مایعی به چگالی وزن δ طوری فرورفته است که صفحهٔ آن با قائم زاویهٔ θ ساخته و بالاترین نقطه‌اش 2 ft زیر سطح مایع قرار دارد . نیروی وارد از سوی مایع بر یک طرف قرص چقدر است ؟

۱۴ . یک استخر شنا دارای عرض 10 ft ، طول 24 ft ، عمق 4 ft در انتهای کم‌عمق ، و عمق 8 ft در انتهای گود می‌باشد . نیروی هیدرواستاتیک وارد بر ته استخر را در صورتی بیابید که استخر پر باشد . در انتهای گود به اندازهٔ 6 ft آب داشته باشد .

۱۵ . چقدر کار لازم است تا چوب مثال ۴ را پایین برد که کاملا" غوطه‌ور شود ؟

۱۶ . فرض کنید ثقل مخصوص یخ 0.92 و از آن آب دریا 1.03 باشد . چه کسری از یک کوه یخ زیر سطح دریا قرار می‌گیرد ؟

یک جسم شناور به شکل مخروط مستدیر قائم وارون به ارتفاع H و شعاع قاعدهٔ R در یک دریاچه شناور است . وزن جسم w و ثقل مخصوص آن α است .

۱۷ . عمق تعادل h قاعدهٔ جسم (رأس مخروط) را بیابید .

۱۸ . کار لازم برای بالابردن جسم تا وقتی از سطح آب خارج شود را بیابید .

۱۹ . کار لازم برای پایین بردن آن تا وقتی کاملا" درآب فرورود را بیابید .

۲۰ . به یک جسم فلزی که می‌گویند از طلای جامد ساخته شده ظن‌برده‌ایم که در آن حفره‌ای وجود دارد . وزن آن در هوا 25 oz و در آب 23 oz است . نشان دهید که ظن غالب است ، و حجم حفره را بیابید . (ثقل مخصوص طلا 19.3 می‌باشد .)

اصطلاحات و مباحث کلیدی

محاسبهٔ حجم به روش مقاطع عرضی

محاسبهٔ حجم به روش قرصها و واشرها

محاسبهٔ حجم به روش غشاءها

منحنیها به شکل پارامتری (منحنیهای پارامتری)

خط مماس بر یک منحنی پارامتری

طول یک منحنی مسطح

مساحت یک سطح دوار

کار انجام شده بر یک محیط پیوسته (طناب ، مایع ، گاز)

فشار مایع و نیروی وارد بر یک جسم غوطه‌ور

مسائل تکمیلی

۱. مخروط مستدیر قائم C به ارتفاع H توسط صفحه‌ای موازی قاعده به دو قطعه با حجم مساوی تقسیم شده است. فاصلهٔ بین این صفحه و رأس C چقدر است؟ آیا جواب به زاویهٔ رأس C وابسته است؟

۲. مسئلهٔ قبل را درصورتی حل کنید که مخروط C به وسیلهٔ صفحات موازی با قاعده به سه قسمت متساوی‌الحجم تقسیم شده باشد. آیا جواب برای مخروط کلی همین است؟

حجم جسم S که قاعده‌اش بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$(a>0, b>0)$ است را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحه‌ای عمود بر محور x یکی از اشکال زیر باشد:

۳. یک مربع

۴. یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین که وترش در صفحهٔ xy است

۵. یک نیمدایره که قطرش در صفحهٔ xy است.

۶. حجم یک جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ بین منحنیهای $y=\cosh x$ و $y=\sinh x$ در ربع اول بوده، و مقاطع عرضی ناشی از صفحات عمود بر محور x آن مربع باشند.

۷. حجم یک جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به محور x مثبت، محور y منفی، و منحنی $y=\ln x$ بوده، و مقاطع عرضی ناشی از صفحات عمود بر محور x آن نیمدایره‌هایی به اقطار واقع در صفحهٔ xy باشند.

با استفاده از یک روش (قرصها، واشرها، یا غشاءها)، حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ تحت منحنی داده شده روی بازهٔ ذکر شده را حول محور مشخص شده پیدا نمایید.

۸. $y=\sqrt{\ln x},\ 1\le x\le e^2$ ، محور x

۹. $y=xe^x,\ 1\le x\le 2$ ، محور y

۱۰. $y=\arctan x,\ 0\le x\le 1$ ، محور y

۱۱. $y=\tanh x,\ -1\le x\le 1$ ، محور x

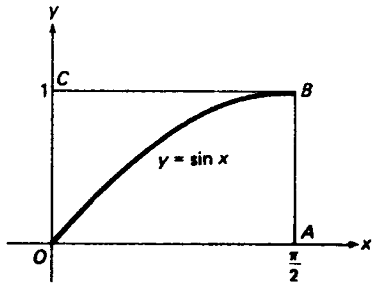
۱۲. $y=\sin x^2,\ 0\le x\le \sqrt{\pi/3}$ ، محور y

۱۳. $y=\csc x,\ \pi/4\le x\le \pi/2$ ، محور x

۱۴. $y = e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ ، محور x

۱۵. $y = e^{-\sqrt{x}}, 0 \le x < \infty$ ، محور y

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ OAB یا OBC شکل ۶۸ حول محور مشخص شده را حساب کنید. منحنی OB نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازهٔ $0 \le x \le \pi/2$ است. در هر حالت، از هر دو روش قرصها یا واشرها و روش غشاءها استفاده نمایید.



شکل ۶۸

۱۶. OAB حول محور x

۱۷. OBC حول محور x

۱۸. OBC حول محور y

۱۹. OAB حول محور y

۲۰. OAB حول خط $x = \pi/2$

۲۱. OBC حول خط $x = \pi/2$

۲۲. OBC حول خط $y = 1$

۲۳. OAB حول خط $y = 1$

مقادیر پارامتر t را طوری بیابید که نقطهٔ P بر منحنی پارامتری داده شده (که به‌ازای هر t تعریف شده است) قرار گیرد.

۲۴. $P = (0, 0)$ بر $x = t^3 + 2t^2 - t - 2, y = t^4 - 5t^2 + 4$

۲۵. $P = (-3, 0)$ بر $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t$

۲۶. $P = (1, 2)$ بر $x = \tan t, y = 2 \sin^2 t + \sin 2t$

منحنی پارامتری داده‌شده را، که در آن t روی بازه‌ای به طول ناکمتراز $2\pi\ge$ تغییر می‌کند، رسم نمایید. هر منحنی به یک شکل *لساژو* معروف است، و اگر ولتاژهای $x = x(t)$ و $y = y(t)$ بر صفحات افقی و قائم اسیلوسکوپ اعمال‌شوند، این منحنیها روی صفحهٔ یک اسیلوسکوپ با اشعهٔ کاتودی ظاهر می‌شوند.

۲۷. $x = \sin t, y = \sin 2t$

۲۸. $x = \sin t, y = \sin 3t$

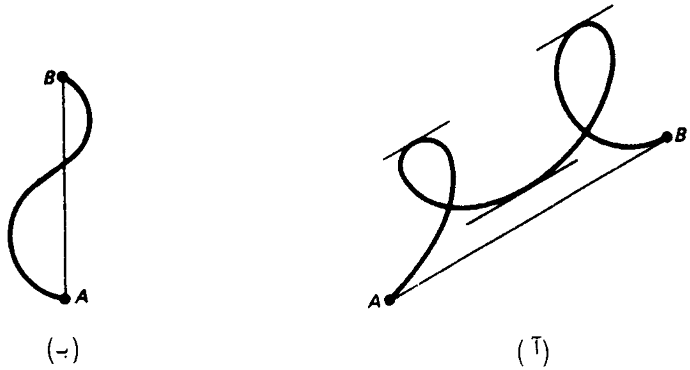
۲۹. $x = \sin 2t, y = \sin 3t$

۳۰. $x = \sin 3t, y = \sin 4t$

۳۱. فرض کنید در منحنی پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

مشتقات $x'(t), y'(t)$ بر بازهٔ باز (a, b) موجود و متناهی بوده و در هر نقطه از (a, b) $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ ، و نیز نقاط انتهایی $A = (x(a), y(a)), B = (x(b), y(b))$ منحنی برهم منطبق نباشند . نشان دهید که دست کم یک نقطه از منحنی (نه یک نقطهٔ انتهایی) وجود دارد که مماس بر منحنی در آن موازی وتر و اصل بین A و B است . [وتر و مماس ممکن است مثل شکل ۶۹ (آ) مایل ، یا مثل شکل ۶۹ (ب) قائم باشند .]

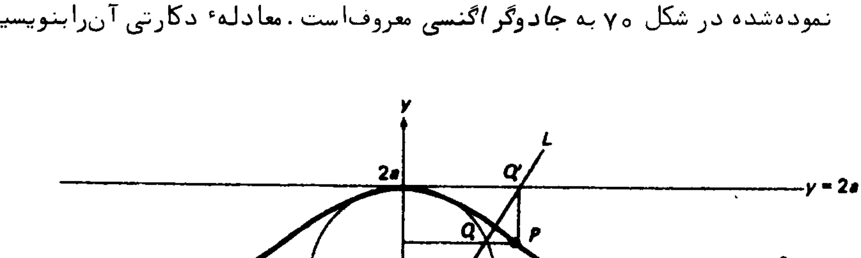


شکل ۶۹

۳۲ . منحنی زنگدیس

$$x = 2a \tan t, \quad y = 2a \cos^2 t \qquad (-\pi/2 < t < \pi/2, a > 0)$$

نموده‌شده در شکل ۷۰ به **جادوگر اگنسی** معروف‌است . معادلهٔ دکارتی آن‌را بنویسید .



جادوگر اگنسی

شکل ۷۰

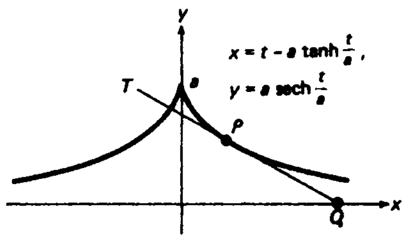
نشان دهیدکه این منحنی نسبت‌به محور y متقارن بوده و محور x را به‌عنوان مجانب

دارد . نقاط عطف آن را پیدا نمایید . نشان دهید که هرگاه خطوط افقی و قائمی از نقطهٔ P منحنی رسم کنیم و خط افقی ابتدا دایرهٔ $x^2+(y-a)^2=a^2$ را درنقطهٔ Q قطع کند ولی خط قائم خط $y=2a$ را در نقطهٔ Q' قطع نماید ، آنگاه ، همانطورکه شکل نشان می‌دهد ، نقاط Q و Q' بر خط L مار بر مبداء O قرار دارند . تعبیر هندسی پارامتر t چیست؟

۳۳. منحنی

$$x=t-a\tanh\frac{t}{a},\qquad y=a\operatorname{sech}\frac{t}{a}\qquad(-\infty<t<\infty,\ a>0),$$

که در شکل ۷۱ نموده شده ، به **کشاننده** معروف است . تحقیق کنید که کشاننده نسبت به محور y متقارن است و محور x را به عنوان مجانب دارد ، و نیز نمودار تابعی‌است مانند $y=f(x)$ و در نقطهٔ $(0,a)$ نقطهٔ بازگشت دارد . نشان دهید که کشاننده هم مماسی است به این معنی که هرگاه P خط مماس برمنحنی در نقطهٔ دلخواه T بوده و Q قطع x ، T باشد (ر.ک. شکل) ، آنگاه $|PQ|$ دارای مقدار ثابت a می‌باشد . تعبیر هندسی پارامتر t چیست؟



کشاننده

شکل ۷۱

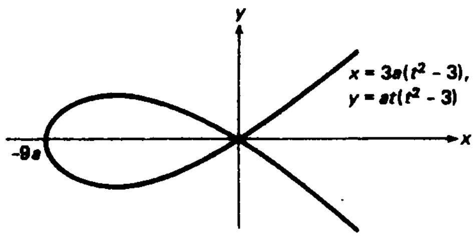
۳۴. سگی که ابتدا در نقطهٔ $(0,a)$ از محور y مثبت است روباهی را که ابتدا در مبداء است تعقیب می‌کند . روباه در امتداد محور x مثبت ضمن آنکه سگ در تعقیبش است می‌دود . فرض‌کنید سگ همواره در جهت روباه و در فاصلهٔ a تا روباه بدود . منحنی تعقیب سگ چیست؟

۳۵. منحنی

$$x=3a(t^2-3),\qquad y=at(t^2-3)\qquad(-\infty<t<\infty,\ a>0),$$

که در شکل ۷۲ نموده شده‌است ، به **مکعبی‌تشیرن‌هاوزن** معروف است . معادلهٔ دکارتی

مکعبی را نوشته ، و نشان دهید که نسبت به محور x متقارن است . مماسهای وارد بر مکعبی در مبداء را بیابید .



مکعبی تشیرن‌هاوزن

شکل ۷۲

۳۶ . اگر $b = \frac{1}{3}a$ ، بتوچرخزاد مسئلهٔ ۲۶ ، صفحهٔ ۷۴۸ ، به یک منحنی به نام **دلتاگون** یا بتوچرخزاد سه **بازگشتی** تبدیل می‌شود . معادلات پارامتری دلتاگون را بنویسید . دلتاگون را رسم کرده ، و طول آن را حساب کنید .

طول منحنی داده شده را بیابید .

۳۷ . $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = \dfrac{2t}{1 + t^2} \quad (-\infty < t < \infty)$

۳۸ . $x = -\dfrac{1}{t^2}\cos t + \dfrac{1}{t}\sin t, y = \dfrac{1}{t^2}\sin t + \dfrac{1}{t}\cos t \quad (1 \le t \le 2)$

۳۹ . $x = 3\cos t - \cos 3t, y = 3\sin t - \sin 3t \quad (-\pi \le t \le \pi)$

۴۰ . $y = \dfrac{1}{10}x^5 + \dfrac{1}{6x^3} \quad (1 \le x \le 2)$

۴۱ . $x = \ln \csc y \quad (\pi/4 \le y \le 3\pi/4)$

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی داده شده حول محور مشخص شده را بیابید .

۴۲ . $x = 2\cos t + \cos 2t, \ y = 2\sin t - \sin 2t \ (\frac{2}{3}\pi \le t \le \frac{4}{3}\pi)$ ، محور y

۴۳ . $x = 3\cos t - \cos 3t, \ y = 3\sin t - \sin 3t \ (0 \le t \le \pi)$ ، محور x

۴۴ . $y = |x - 1| + |x| \ (-1 \le x \le 2)$ ، خط $y = 2$

۴۵ . $x = 2y^{1/4} - \frac{2}{7}y^{7/4} \ (0 \le y \le 1)$ ، محور x

۴۶ . فرض کنید S سطح حاصل از دوران بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0)$$

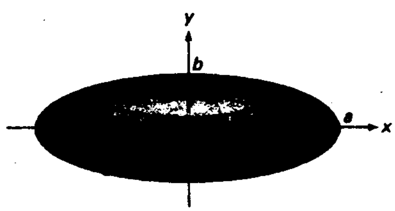
حول محور x باشد . در این صورت ، S یک بیضی‌گون دوار یا کره‌گون نـام دارد . چون $a>b$ ، کره‌گون S کشیده است؛ یعنی ، مانند یک توپ راگبی یا یک سیگار برگ کشیده است[ر.ک. شکل ۷۳ (آ)] . نشان دهید که S دارای مساحت سطح

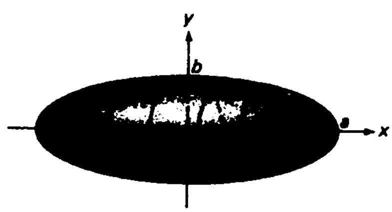
$$A=2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e$$

است که در آن عدد

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

(با پایهٔ لگاریتمهای‌طبیعی اشتباه‌نشود) خروج از مرکز بیضی نام دارد .فرض‌کنید بیضی به جای محور x حول محور y دوران کند . در این صورت ، چون $b<a$ ، کره گون حاصل S' جمع شده است؛ یعنی ، مانند یک توپ که بچه‌ای رویش نشسته یا یک فرفرهٔ خیلی تخت منقبض یا پهن شده است[ر.ک. شکل ۷۳ (ب)] .





شکل ۷۳

نشان دهید که S' دارای مساحت

$$A'=2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}$$

است ، که در آن e مجدداً " خروج از مرکز " است . نشان دهید که وقتی $e\to 0^+$ ، A و A' به حد یکسان $4\pi a^2$ میل می‌کنند که در آن a ثابت است . چرا این انتظار می‌رود؟

۴۷. فرض‌کنید S و S' مانند مسئلهٔ قبل باشند . حجم V کره‌گون کشیدهٔ توپر محدود به S ، و حجم V' کره‌گون جمع شدهٔ توپر محدود به S' را بیابید .

۴۸. سیارهٔمشتری یک کره‌گون جمع شده با شعاع استوایی تقریبی **71,600 km** و شعاع قطبی تقریبی **67,300 km** است. حجم و مساحت مشتری را تخمین بزنید. (زمین و خورشید نیز جمع شده‌اند ولی خیلی کم.)

۴۹. یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a حول یکی از اضلاعش دوران می‌کند. مساحت سطح دوار حاصل را بیابید. حجم جسم توپر محدود به این سطح چقدر است؟

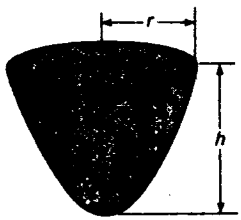
۵۰. یک استخر کودکان **8 ft** عرض، **16 ft** طول، **2 ft** عمق در انتهای کم‌عمق، و **4 ft** عمق در انتهای گود دارد. چقدر کار لازم است که آب این استخر پر از سرش پمپاژ گردد؟ اگر عمق آب در قسمت کم عمق **6 in** باشد چقدر؟ اگر عمق آب در انتهای گود **1 ft** باشد چقدر؟ اگر استخر تا **75%** پر باشد، چقدر طول می‌کشد تا یک پمپ به‌توان **0.125-hp** آن را تخلیه کند؟

۵۱. یک تغار به شکل نیمی از یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r و طول L (ر.ک. شکل ۷۴) از مایعی به چگالی ρ پر شده است. چقدر کار لازم است تا تمام مایع به ارتفاع

شکل ۷۴

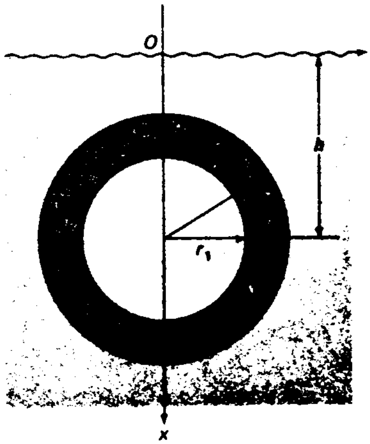
h بالای تغار برسد؟

۵۲. شکل ۷۵ بشکه‌ای را نشان می‌دهد شبیه قسمتی از یک سهمی‌گون دوار به ارتفاع h و شعاع r در بالای آن. کار لازم برای پر کردن بشکه از مایعی به چگالی ρ از طریق سوراخی در ته آن (رأس سهمی‌گون) را بیابید.



شکل ۷۵

۵۳. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک طرف صفحهٔ قائمی که در یک مایع به چگالی وزن δ فرو رفته است را درصورتی بیابید که صفحه به شکل واشر مستدیری به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 بوده و مرکزش درفاصلهٔ $h \geq r_2$ زیر سطح مایع قرار داشته باشد (ر.ک. شکل ۷۶).



شکل ۷۶

۵۴. یک بشکه پر از مایعی به چگالی وزن δ دارای جداره‌ای مستطیلی و قائم بوده و لبهٔ آن در سطح مایع قرار دارد. فرض کنید جداره به‌وسیلهٔ قطر مستطیل به دو قسمت تقسیم شده باشد. نشان دهیدکه نیروی وارد از سوی مایع بر یک قسمت جداره دوبرابر نیروی وارد بر قسمت دیگر است.

یک گوی چوبی به شعاع 1 ft تا نیمه در مایعی به چگالی وزن δ فرورفته است. کار لازم درهر مورد زیر را پیدا کنید:

۵۵. برای خارج کردن گوی از مایع

۵۶. برای فروبردن گوی در مایع

دنباله‌ها و سریها ۹

تکنیکهای این فصل برای محاسبات عددی لازمند . به کمک آنها می‌توان اعدادی چون e و π یا مقادیر توابعی‌مثل $\ln x$ و $\sin x$ را باهر **دقت مطلوب**تقریب نمود . این کار بانمایش عدد یا مقدار تابع به صورت سری ***نامتناهی***، یعنی مجموعی با بی‌نهایت جملـــه ، صورت می‌گیرد .

برای ریختن پایه‌های سریهای نامتناهی ،ابتدا مبحث‌مربوط به آن ،یعنی ***دنباله‌های نامتناهی*** (ر.ک. بخش ۱.۹) ، را درنظر می‌گیریم ؛ اینها را می‌توان توابعی‌درنظرگرفت که فقط بر مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت تعریف شده‌اند . بخشهای ۲.۹ تا ۵.۹ به بررسی اصولی سریهای نامتناهی که جملاتشان **عدد** هستند اختصاص دارد . مطالعهٔ **سریهای‌توانی** بعداز آن صورت می‌گیرد (ر.ک. بخشهای ۶.۹ تا ۷.۹) ؛ این سریها ، کـــه جملاتشان ***تابع***اند ، را می‌توان چندجمله‌ایهایی با بی‌نهایت جمله و با درجهٔ بدلخواه بزرگ درنظر گرفت . گاهی اوقات ممکن است تابعی مجموع یک‌سری توانی معلوم شناخته شود .امااهمیت بیشتر آن توانایی شروع از تابع معلوم f **ونمایش‌آن به صورت مجموعی** از یک سری توانی است . در بخش ۸.۹ نشان می‌دهیم که اگر f خوشرفتار باشد ، f را می‌توان مجموعی‌ازیک چندجمله‌ای و یک " جملهٔ باقیمانده " نوشت ، و در بخش ۹.۹ یک قدم جلوتـــر رفته و نشان می‌دهیم که f را می‌توان به صورت یک سری توانی ، به نام ***سری تیلور***[1] f ، نوشت ، و این درحالات متداولی صورت می‌گیرد که درآنها وقتی درجهٔ چندجمله‌ای تقریب ساز بدلخواه بزرگ شود ، جملهٔ باقیمانده به صفر نزدیک می‌شود .

در بین تکنیکهای محاسبه‌ای قوبی که در این فصل عرضه می‌شوند ، **روش نیوتن** برای حل معادلهٔ $f(x) = 0$ (ر.ک. بخش ۱۰.۹) شایستهٔ ذکر است نه فقط به خاطـر خودش

---

1. *Taylor*

بلکه به عنوان مثال مهمی از **روشهای تکراری** که در سراسر ریاضیات کاربسته به‌کار می‌رود .

۱۰۹ دنباله‌های نامتناهی

فرض کنیم به هر عدد صحیح مثبت n عدد حقیقی a_n مربوط شده باشد . در این صورت. لیست

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

با زیرنویس که از چپ به راست به ترتیب صعودی نوشته شده یک ***دنباله‌ء نامتناهی***، یافقط ***دنباله***، نام دارد . اعداد آمده در لیست ***جملات*** دنباله نام دارند . لذا ، a_1 جمله‌ء اول دنباله ، a_2 جمله‌ء دوم ، و همین‌طور a_n جمله‌ء n م دنباله است ، که پس از آن همانطورکه سه نقطهء دوم نشان می‌دهند ، دنباله تا بی‌نهایت می‌رود . جمله‌ء n م a_n **جملـه‌ء عمومی** دنباله نیز نامیده می‌شود .

البته ، فرض است که جملات یک دنباله به‌طور منحصر به فرد معین هستند ، به این معنی که یک و فقط یک‌جمله با زیرنویس داده‌شده وجود دارد . بنابراین ، از دیدگاه صوری، یک دنباله چیزی جز حالت خاصی از تابع نیست؛ یعنی ، تابعی که قلمروش مجموعه‌ء تمام اعداد صحیح مثبت است . به زبانی کمترصوری ، یک دنباله به محض دانستن "قانون‌تشکیل" آن ، یعنی تابع $a_n = f(n)$ که ما را از زیرنویس n (که نقش متغیر مستقل را دارد) به‌جمله‌ء عمومی a_n می‌رساند ، کاملا" معین می‌شود .

مثال ۱ . جملات دوم ، پنجم ، و هفتم دنباله با جمله‌ء عمومی

$$a_n = 2^n$$

را بیابید .

حل . با انتخاب $n = 2, 5, 7$ داریم

$$a_2 = 2^2 = 4, \qquad a_5 = 2^5 = 32, \qquad a_7 = 2^7 = 128.$$

این دنباله را می‌توان به صورت

$$2, 4, \ldots, 2^n, \ldots,$$

یا ،با تفصیل بیشتر ، به صورت

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^n, \ldots$$

نوشت .

راه دیگر نمایش دنباله‌ء (۱) نوشتن جمله‌ء عمومی a_n آن بین دو ابروست[1] :

$$\{a_n\}. \qquad (1')$$

مثلا" ، در این نماد ، دنباله‌ء $2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$ شکل اختصاری $\{2^n\}$ را به خود می‌گیرد .

مثال ۲ . چهار جمله‌ء اول دنباله‌ء $\{(-1)^n\}$ را بنویسید .

حل . چون $(-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, (-1)^4 = 1$ ، چهار جمله‌ء اول عبارتنداز $-1, 1, -1, 1$ با علایم " متناوب" . دنباله‌ء $\{(-1)^n\}$ ، مثل هر دنباله‌ء نامتناهی ، بی‌نهایت جمله دارد ، ولی فقط دو مقدار ، یعنی 1 یا -1 ، را می‌گیرد . این با دنباله‌ء $\{2^n\}$ ، که هیچ دو جمله‌اش مقدار یکسان ندارند ، فرق دارد .

مثال ۳ . هفت جمله‌ء اول دنباله‌ء $\{n!\}$ ، که جمله‌ء عمومی‌اش n فاکتوریل است (ر . ک . صفحه‌ء ۲۲۵) ، را بنویسید .

حل . به آسانی معلوم می‌شود که هفت جمله‌ء اول عبارتنداز

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040,$$

که از آنها معلوم می‌شودکه جملات این دنباله سریعا" بسیار بزرگ می‌شوند . با محاسبه‌ء حاصل‌ضرب 11 عدد صحیح مثبت اولیه معلوم می‌شود که جمله‌ء یازدهم عبارت است از $11! = 39,916,800$.

مثال ۴ . متوسط پنج جمله‌ء اول دنباله‌ء $\{b_n\}$ را درصورتی بیابید که

$$b_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$$

حل . توجه کنید که در اینجا دنباله را به‌جای $\{a_n\}$ با $\{b_n\}$ نشان می‌دهیم . (نماد دنباله‌ها به اندازه‌ء توابع آزادی انتخاب دارد .) متوسط پنج جمله‌ء اول عبارت است از

---

۱ . قراین از خلط دنباله‌ء $\{a_n\}$ و مجموعه‌ای که تنها عنصرش a_n است جلوگیری خواهدکرد .

$$\frac{1}{5}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5\right) = \frac{39}{20}.$$

فرمولهای بازگشتی . مثل مثالهای قبل ، قانون تشکیل یک دنباله اغلب با فرمول صریحی برای جملهٔ عمومی‌آن داده می‌شود . یک دنباله را می‌توان **به‌طور *بازگشتی*** نیز تعریف‌کرد ؛ یعنی ، با فرمولی به‌نام **فرمول *بازگشتی*** که نشان‌می‌دهد چگونه هرجمله‌را می‌توان‌از جملات با زیرنویسهای پایین‌تر به دست آورد .

مثال ۵ . فرض‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است :

$$a_1 = 1 \text{ ، اگر } n \geq 2 \text{ ، } a_n = a_{n-1} + n \qquad (۲)$$

در این صورت ،

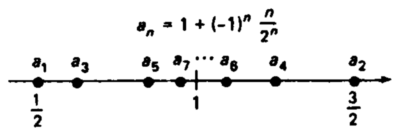
$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + 2 = 3, \quad a_3 = a_2 + 3 = 6, \quad a_4 = a_3 + 4 = 10, \ldots,$$

و دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملات $1, 3, 6, 10, \ldots$ شروع می‌شود . به عنوان تمرین ، تحقیق‌کنیدکه $\{a_n\}$ رامی‌توان‌به‌طورصریح (غیربازگشتی) به‌صورت‌دنباله‌ای‌باجملهٔ‌عمومی $a_n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ تعریف کرد .

مثال ۶ . چون $n! = n(n - 1)!$ ، دنبالهٔ $\{a_n\} = \{n!\}$ همان دنبالهٔ تعریف شده بافرمول بازگشتی زیر است :

$$a_1 = 1 \text{ ، اگر } n \geq 2 \text{ ، } a_n = na_{n-1}$$

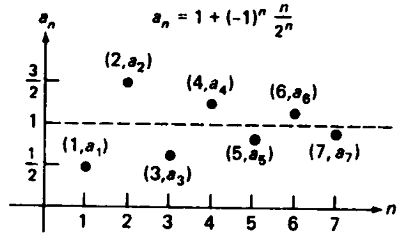
دنباله‌ها را می‌توان به دوطریق رسم کرد ، یکی با رسم جملات $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ به عنوان‌نقاط‌بر خط‌اعداد ،یا با رسم جفتهای مرتب $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (n, a_n), \ldots$ ، به ازای هر جمله یکی ، به صورت نقاطی در صفحهٔ مختصات . در شکلهای ۱ و ۲ ، این دو



شکل ۱

طریق نمایش دنبالهٔ $\{a_n\} = \{1 + (-1)^n(n/2^n)\}$ نموده شده است . طریقهٔ اول ساده‌تر

است ، ولی طریقهٔ دوم بر این تأکید دارد که دنباله‌ها تابع می‌باشند .



شکل ۲

حد یک دنباله . همانطور که تابع $f(x)$ می‌تواند با $x \to \infty$ به حدی نزدیک شود ،دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌تواند با $n \to \infty$ به حدی نزدیک گردد . فرض کنیم در دنبالهٔ $\{a_n\}$ جملهٔ عمومی a_n را بتوان باانتخاب n به‌قدر کافی بزرگ هرقدر بخواهیم به عدد L نزدیک‌کرد . در این صورت ، گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ (وقتی n به‌بی‌نهایت نزدیک شود) **به حد L نزدیک می‌شود** *یا دارای حد L است* ، و می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad (۳)$$

یا

$$a_n \to L \quad (\text{وقتی } n \to \infty) \qquad (۳')$$

معنی دقیق

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

این است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عدد $A > 0$ را طوری یافت که به ازای هر $x > A$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، و بههمین نحو معنی دقیق (۳) این است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عددصحیح $N > 0$ راطوری‌یافت‌که‌به‌ازای‌هر $n > N$ ، یعنی‌به‌ازای $n = N + 1, N + 2, \ldots$ $|a_n - L| < \varepsilon$. به‌بیان‌معادل ، $a_n \to L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، بازهٔ $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ شامل تمام جملات دنبالهٔ $\{a_n\}$ است که زیرنویسهای آن از عدد صحیح N ، که البته N تابع ε است ، بزرگتر می‌باشد . بخصوص، با انتخاب $\varepsilon = 1$ ، می‌بینیم که هرگاه $a_n \to L$ آنگاه تمام جملات دنبالهٔ $\{a_n\}$ با زیرنویسهای متجاوز از عدد صحیحی مانند N دربازهٔ $(L - 1, L + 1)$ قراردارند ؛ از این امر در برهان قضیهٔ ۱ زیر استفاده خواهد شد .

دنباله‌های همگرا و واگرا . اگر دنباله‌ای حد متناهی داشته باشد ، گوییم دنباله *همگرا* (به

این حد) است؛ در غیر این صورت، گوییم دنباله *واگرا* می‌باشد. دو نوع دنبالهٔ واگرا موجودند که توجه خاص می‌خواهند. گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ *واگرا* به ∞ است، و می‌نویسیم $a_n \to \infty$ ، اگر به ازای هر $C > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ ، $a_n > C$ ؛ به همین نحو، گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ *واگرا* به $-\infty$ است، و می‌نویسیم $a_n \to -\infty$ ، اگر به ازای هر $C > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ ، $a_n < -C$. البته، یک دنباله می‌تواندبه طرق دیگری نیز واگرا باشد (ر.ک. مثال ۹).

مثال ۷. دنبالهٔ $\{a_n\} = \{1/n\}$ همگرا با حد 0 است. در واقع، فرض‌کنیم به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، N عدد صحیحی بزرگتر از $1/\varepsilon$ باشد. در این صورت، به ازای هر $n > N$،

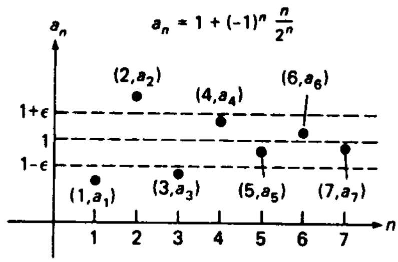
$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

زیرا به ازای هر چنین n ،

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

به‌عنوان‌تمرین، از استدلال‌مشابهی‌استفاده‌کرده‌نشان‌دهیدکه دنبالهٔ $\{a_n\} = \{(n-1)/n\}$ همگرا با حد 1 می‌باشد.

مثال ۸. از شکل ۳ (تعدیلی از شکل ۲) معلوم می‌شود که بازهٔ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ شامل



شکل ۳

تمام جملات دنبالهٔ $\{a_n\} = \{1 + (-1)^n(n/2^n)\}$ جز تعدادی‌متناهی‌ازآنهاست. به‌عبارت دیگر، به ازای بازهٔ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ، عدد صحیحی مانند N وجود دارد به‌طوری‌که a_n به ازای هر $n > N$ در بازهٔ $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ قراردارد. لذا، بدون آنکه نگران یافتن‌مقدار

N نظیر به ε داده شده باشیم ، می‌توانیم (به‌طور صوری) نتیجه بگیریم که

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\frac{n}{2^n}\right]=1$$

در واقع ، این نتیجه را باید با برهانی صوری تأیید کرد (ر.ک. مسئلهٔ ۵۳) .

مثال ۹ . همانطور که استدلال زیر نشان می‌دهد ، دنبالهٔ $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$ واگراست . حد پیشنهادی L را اختیار کرده ، و ε را آنقدر کوچک می‌گیریم که بازهٔ $I=(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ شامل لااقل یکی از نقاط 1 و 1− نباشد . واضح است که این همواره میسر است حتی اگر $L=1$ یا $L=-1$. چون به ازای n زوج $(-1)^n=1$ ، تمام جملات a_n با n زوج خارج بازهٔ I که شامل 1 نیست قرار دارند ، و چون به ازای n فرد $(-1)^n=-1$ ، تمام جملات a_n با n فرد خارج بازهٔ غیرشامل 1− واقع می‌باشند .لذا ، در هر حال ، دنباله نمی‌تواند همگرا باشد .

مثال ۱۰ . دنبالهٔ $\{2^n\}$ واگرا به ∞ است ، زیرا 2^n به ازای n به‌قدر کافی بزرگ بدلخواه بزرگ است . در واقع ، به ازای هر $C>0$ می‌توان با انتخاب $n>\log_2 C$ نامساوی $2^n>C$ را داشت .

مثال ۱۱ . در مثال ۸ ، صفحهٔ ۵۲۹ ، نشان داده شد که

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

که در آن $e=2.7182818\ldots$ پایهٔ لگاریتمهای طبیعی‌است . این یعنی به ازای‌هر $\varepsilon>0$ عددی‌مانند $A>0$ هست به طوری که به ازای هر عدد حقیقی x متجاوز از A ،

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$$

اما در این صورت واضح است که به ازای هر عدد صحیح n متجاوز از A ،

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|<\varepsilon$$

و درنتیجه ، همانطور که در صفحهٔ ۵۲۹ پیش‌بینی شد ،

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

به‌طورکلی ، اگر تابع f بر $[1,\infty)$ چنان تعریف شده باشد که وقتی $x\to\infty$ ، $f(x)\to L$ ، اساساً" همین استدلال نشان می‌دهد که وقتی $n\to\infty$ ، $f(n)\to L$. بخصوص، از فرمول (۱۵) ، صفحهٔ ۵۲۹ ، معلوم می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a,$$

که درآن a عدد دلخواهی می‌باشد .

تبصره . فرض‌کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند که فقط در تعدادی متناهی جمله فرق دارند . در این صورت ، به آسانی معلوم می‌شود که یا $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو همگرا با حد یکسانند یا $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو واگرا می‌باشند .

دنباله‌های کراندار و بی‌کران . گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ *کراندار* است اگر عددی مانند $C>0$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر n ، $-C\le a_n\le C$ ، یا معادلاً" ، $|a_n|\le C$ ،ولی اگر چنین عددی موجود نباشد ، گوییم $\{a_n\}$ *بی‌کران* می‌باشد . (اینها مشابه تعاریف نظیر برای توابع صفحهٔ ۱۰۳ هستند .) مثلاً" ، دنباله‌های $\{1/n\}$ و $\{(-1)^n\}$ هر دو کراندارند ، زیرا به ازای هر n ، $|1/n|\le 1$ و $|(-1)^n|\le 1$. از آن سو ، دنباله‌های $\{n\}$ و $\{n!\}$ هر دو بی‌کرانند ، زیرا اگر n به‌قدر کافی بزرگ‌باشد ، n و $n!$ از عدد مثبت دادهٔشدهٔ C بزرگترند (توجه کنید که اگر $n>2$ ، $n!>n$) . همانطور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد ،در مطالعهٔ دنباله‌های همگرا مفهوم دنبالهٔ کراندار به نحو بسیار طبیعی ظاهر خواهد شد .

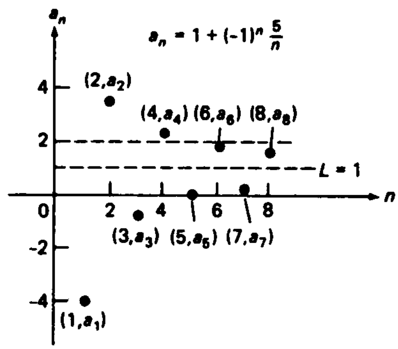
قضیهٔ ۱ (کرانداری دنبالهٔ همگرا) . *هر دنبالهٔ همگرا کراندار است .*

برهان . فرض‌کنیم $\{a_n\}$ یک‌دنبالهٔ همگرا با حد L باشد . در این صورت ، عدد صحیحی مانند N هست به طوری که تمام جملات $a_{N+1},a_{N+2},\ldots$ ، یعنی تمام جملات دنباله با زیرنویس بیشتر از N ، در بازهٔ $(L-1,L+1)$ قرار دارند . با انتخاب $C>0$ به قدر کافی بزرگ ، می‌توان بازهٔ $[-C,C]$ با نقطهٔ میانی مبداء را طوری گرفت که نه‌فقط بازهٔ $(L-1,L+1)$ با تمام جملات $a_{N+1},a_{N+2},\ldots$ بلکه‌تمام جملات‌باقیمانده $a_1,a_2,\ldots,a_N$ ، را نیز دربرداشته باشد . اما ، دراین صورت ، به ازای هر $n=1,2,\ldots$ ، $|a_n|\le C$ ؛ در نتیجه ، دنبالهٔ $\{a_n\}$ کراندار است .

مثال ۱۲. در شکل ۴ ساخت انجام شده در برهان قضیهٔ ۱ برای دنباله‌ای توضیح داده شده که جملهٔ عمومی‌اش عبارت است از

$$a_n = 1 + (-1)^n \frac{5}{n}.$$

در اینجا $L = 1$ ، $N = 5$ ، و هر $C \geq 4$ کارساز است.



شکل ۴

چون یک دنبالهٔ همگرا باید کراندار باشد، *یک دنبالهٔ بی‌کران باید واگرا باشد*. مثلاً، دنباله‌های بی‌کران $\{n\}$ و $\{n!\}$ واگرا هستند. از آن سو، یک دنبالهٔ کراندار لازم نیست همگرا باشد. در واقع، قبلاً دیدیم که دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ هم‌کراندار و هم‌واگراست.

قواعد حدی برای دنباله‌ها. اعمال جبری بر دنباله‌ها همانند این‌اعمال بر توابع است؛ یعنی، مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب، و خارج قسمت دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی با جملات عمومی $a_n + b_n$ ، $a_n - b_n$ ، $a_n b_n$ ، و a_n/b_n می‌باشند. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی همگرا بوده، و

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = M. \tag{۴}$$

در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M, \tag{۵}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M, \tag{۶}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = LM, \tag{۷}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}, \tag{۸}$$

مشروط بر اینکه در آخرین فرمول $M \neq 0$. (ممکن است تعدادی متناهی جمله از دنباله‌ٔ $\{a_n/b_n\}$ دارای مخرج صفر بوده و درنتیجه وجود نداشته باشند ، ولی به ازای n بــه قدر کافی بزرگ ، $b_n \neq 0$ ،چون‌وقتی $n \to \infty$ ، $b_n \to M \neq 0$) به‌عبارت‌دیگر، مجموع $\{a_n + b_n\}$ تفاضل $\{a_n - b_n\}$ ، حاصل‌ضرب $\{a_n b_n\}$ ، یا خارج‌قسمت $\{a_n/b_n\}$ دودنباله‌ٔ همگرای $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ خود یک دنباله‌ٔ همگراست که حدش مساوی مجموع ، تفاضل ، حاصل‌ضرب ، یا خارج قسمت حدود $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ می‌باشد . قواعد (۵) تا (۸) شبیه قواعد نظیر برای‌حدودتوابع اند، و اساسا" به همان روش ثابت می‌شوند .

اختیاری. به عنوان مثالی از طرز کار ، با استفاده از تعدیل جزئی استدلال به کاررفته در اثبات قضیه‌ٔ ۴ ، صفحه‌ٔ ۱۳۰، نشان می‌دهیم که رابطه‌ٔ (۴) رابطه‌ٔ (۵) را ایجاب می‌کند. فرض‌کنیم (۴) برقرار باشد . در این صورت ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان اعداد صحیح و مثبت N_a و N_b را طوری‌یافت‌که به‌ازای‌هر $N > N_a$ ، $|a_n - L| < \varepsilon/2$ وبه‌ازای‌هر $n > N_b$ ، $|b_n - M| < \varepsilon/2$. بنابراین ،طبق نامساوی‌مثلثی ،به ازای هر $n > N = \max\{N_a, N_b\}$ ،

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ &\leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

اما این به " زبان ε, N " یعنی رابطه‌ٔ (۵) برقرار است .

به ازای هر عدد c ،*دنباله‌ٔ ثابت* $\{c\}$ که تمام جملاتش‌مساوی c است ،بوضوح‌همگرا با حد c است؛ درنتیجه ،

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

از رابطه‌ٔ (۷) معلوم می‌شود که هرگاه $\{a_n\}$ همگرا به L باشد ، آنگاه $\{ca_n\}$ همگرا به cL است .

مثال ۱۳ . $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n+1}$ را حساب کنید .

حل . به کمک مثال ۷ و چند قاعدهٔ فوق ، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

یک راه غیرصوریتر محاسبهٔ این حد ، که از بسیاری مراحل دوری می‌کند ، ملاحظهٔ این‌امر است که به ازای n بزرگ ، $3n+1\approx 3n$ ؛ درنتیجه ،

$$\frac{2n}{3n+1}\approx\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3},$$

که در آن تقریب با رفتن $n\to\infty$ بهتر خواهد شد .

دنباله‌های یکنوا . گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ **صعودی** است اگر به ازای هر n ، $a_n\le a_{n+1}$ ، و **نزولی** است اگر به‌ازای هر n ، $a_n\ge a_{n+1}$. منظور از یک دنبالهٔ ***یکنوا*** یعنی دنباله‌ای‌که صعودی یا نزولی باشد . در اینجا به جای $\le$ و $\ge$ علایم $>$ و $<$ را قرار داده و ، مثل تعاریف نظیر برای توابع (ر.ک. صفحهٔ ۸۰) ، دنبالهٔ $\{a_n\}$ را *اکیدا* " صعودی نامیم اگر به ازای هر n ، $a_n<a_{n+1}$ ، و *اکیدا* " نزولی نامیم‌اگر به‌ازای هر n ، $a_n>a_{n+1}$ (البته دنباله‌های اکیدا " صعودی و اکیدا " نزولی‌یکنوایند) . این تعاریف ما را برای نتیجهٔ‌اساسی زیر آماده می‌سازد .

قضیهٔ ۲ (همگرایی دنبالهٔ یکنوای کراندار) . هر *دنبالهٔ* یکنوای *کراندار* همگراست .

برهان (اختیاری) . فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ صعودی کراندار باشد . در این صورت ، بنابر کرانداری $\{a_n\}$ ، عددی مانند C وجود دارد به طوری که به‌ازای‌هر $n=1,2,\ldots$ ، $a_n\le C$. یک چنین عدد C یک ***کران بالایی*** دنبالهٔ $\{a_n\}$ نام دارد . البته ، بی‌نهایت کران بالایی از $\{a_n\}$ وجود دارند ؛ و در واقع ، هر عدد بزرگتر از C نیز یک کران بالایی است ، ولی یکی از این کرانهای بالایی ، که ما آن را با L نشان می‌دهیم ، **کوچکترین** می‌باشد.[1] اما ، به ازای هر $\varepsilon>0$ باید جمله‌ای از دنبالهٔ $\{a_n\}$ ، مثلا " a_N ، وجود

---

[1] . در فرض وجود L به‌*خاصیت‌اساسی دستگاه اعداد حقیقی* ، به نام تمامیت ،تکیه‌می‌کنیم که می‌گوید هر مجموعه از اعداد حقیقی دارای‌کران‌بالایی کوچکترین کران بالایی‌دارد . برای مطالب بیشتر در باب تمامیت ، ر.ک. کتابی در باب حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته .

داشته باشد به طوری که

$$L - \varepsilon < a_N \le L,$$

زیرا در غیر این صورت عدد $L - \varepsilon$ ، که از L کوچکتر است، یک کران بالایی $\{a_n\}$ می‌شود که با تعریف L متناقض می‌باشد. اما، در این صورت، چون $\{a_n\}$ صعودی است (و L یک کران بالایی است)، به ازای هر $n > N$ خواهیم داشت

$$L - \varepsilon < a_N \le a_n \le L$$

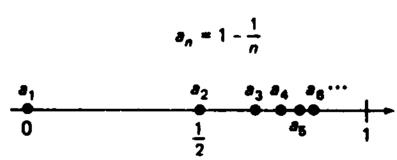
بنابراین، به ازای هر $n > N$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ ؛ یعنی، $\{a_n\}$ همگرا با حد L می‌باشد.

از آن سو، فرض کنیم $\{a_n\}$ یک‌دنبالهٔ نزولی کراندار باشد. دراین‌صورت، $\{-a_n\}$ یک دنبالهٔ صعودی کراندار می‌باشد. لذا، همانطور که اینک ثابت شد، $\{-a_n\}$ همگراست با حدی که به $-L$ نشانش می‌دهیم. اما، در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -(-L) = L,$$

درنتیجه، $\{a_n\}$ نیز همگرا با حد L می‌باشد.

معنی شهودی قضیهٔ ۲ واضح است. هرگاه جملات یک دنباله به بازه‌ای‌متناهی‌محدود شده باشند و نتوانند باافزایش n کوچک‌شوند، آنگاه باید همه درنقطه‌ای مانند L "اجتماع کنند" یا "انباشته شوند"، که این حد دنباله می‌باشد. شکل ۵ این پدیده را برای‌دنبالهٔ صعودی کراندار $\{a_n\} = \{1 - (1/n)\}$ توضیح می‌دهد، که عدد $L = 1$ را به عنوان‌کوچکترین کران بالایی و نیز حدش دارد.



شکل ۵

مثال ۱۴ . همگرایی دنبالهٔ $\{r^n\}$ را بررسی کنید، که در آن r عدد حقیقی‌دلخواهی‌است.

حل . ابتدا فرض کنیم $0 < r < 1$. در این صورت، دنبالهٔ $\{r^n\}$ کراندار است، زیرا به ازای هر n ، $0 < r^n < 1$ ، و نیز (اکیدا) نزولی است، زیرا به ازای هر n ، $r^{n+1} = r(r^n) < r^n$. از اینرو، بنابر قضیهٔ ۲، $\{r^n\}$ همگرا به همان حد L است. برای تعیین

L ، ملاحظه می‌کنیم که

$$L = \lim_{n \to \infty} r^{n+1} = \lim_{n \to \infty} r(r^n) = r \lim_{n \to \infty} r^n = rL.$$

چون $r \neq 1$ ، این فقط وقتی ممکن است که $L = 0$ ؛ و لذا ،

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0 \qquad (0 < r < 1). \tag{۹}$$

حال فرض کنیم $-1 < r < 0$. پس $0 < |r| < 1$ ؛ درنتیجه ، بنابر (۹) با $|r|$ به جای r ، $\{|r|^n\}$ همگرا به 0 می‌باشد . اما ، در این صورت ، $\{r^n\}$ نیز همگرا به 0 است ، زیرا $|r|^n = |r^n| = |r^n - 0|$ را می‌توان به ازای n به قدر کافی بزرگ هرقدر بخواهیم کوچک کرد . پس نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0 \qquad (-1 < r < 0). \tag{۹'}$$

از تلفیق این با (۹) و این امر واضح که دنباله‌ٔ $\{0^n\} = \{0\}$ همگرا به 0 است ، درمی‌یابیم که

$$\lim_{n \to \infty} r^n = 0 \qquad (-1 < r < 1).$$

لذا ، اگر $-1 < r < 1$ یا معادلاً $|r| < 1$ ، $\{r^n\}$ همگرا به 0 می‌باشد .

اگر $r = 1$ ، $\{r^n\}$ دنباله‌ٔ ثابت $\{1\}$ است ، که بوضوح همگرا به 1 می‌باشد ، حال آنکه اگر $r = -1$ ، $\{r^n\}$ دنباله‌ٔ واگرای $\{(-1)^n\}$ می‌باشد . هرگاه $r > 1$ ، آنگاه، به کمک قضیه‌ٔ دوجمله‌ای (ر.ک. صفحه‌ٔ ۲۲۷) ،

$$r^n = [1 + (r-1)]^n \geq 1 + n(r-1) > n(r-1),$$

درنتیجه ، $\{r^n\}$ واگرا به ∞ است . در واقع ، اگر $C > 0$ ، به ازای هر $n > C/(r-1)$ ، $r^n > C$ ؛ به صورت دیگر ، هرگاه $r > 1$ ، آنگاه وقتی $x \to \infty$ ، $r^x \to \infty$ (ر.ک. صفحه‌ٔ ۵۰۸) ، که ایجاب می‌کند که وقتی $n \to \infty$ ، $r^n \to \infty$. هرگاه $r < -1$ ، آنگاه $|r| > 1$ و $\{|r|^n\}$ واگرا به ∞ است . اما ، در این صورت ،

$$r^n = (-|r|)^n = (-1)^n |r|^n$$

درصورت زوج بودن n مقدار مثبت بدلخواه بزرگ ، و در صورت فرد بودن n مقدار منفی به دلخواه بزرگ خواهد گرفت . بنابراین ، اگر $r < -1$ ، $\{r^n\}$ حد ندارد . لذا ، بالاخره ، *دنباله‌ٔ $\{r^n\}$ همگرا به 0 است اگر $|r| < 1$ و همگرا به 1 است اگر $r = 1$ ، حال آنکه واگرا به ∞ است اگر $r > 1$ و حد ندارد اگر $r \leq -1$.*

اغلب برای زیرنویس متغیر جملهٔ عمومی یک دنباله حرفی غیر از n انتخاب می‌شود که معمولاً " از حروف وسط الفبا می‌باشد . مثلاً " ، $\{2^k\}, \{2^j\}, \{2^i\}$ سه طریق دیگر برای نمایش دنبالهٔ $\{2^n\}$ مثل مثال ۱ است .

فرض کنیم $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ یک دنباله باشد . همچنین ،

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_i}, \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots)$$

یک " زیر دنباله " باشد که از $\{a_n\}$ با حذف تعدادی متناهی یا نامتناهی جمله به دست آمده است . در این صورت ، اگر $\{a_n\}$ همگرا با حد L باشد ، $\{a_{n_i}\}$ نیز باید همگرا به L باشد (چرا ؟) . بخصوص، زیردنبالهٔ $\{a_{n+N}\}$ حاصل از $\{a_n\}$ به وسیلهٔ حذف N جملهٔ اول باید همگرا به L باشد ، زیردنبالهٔ $\{a_{2k}\}$ مرکب از جملات با اندیس زوج باید به L همگرا باشد ، و غیره . در همین وضع ، اگر $\{a_n\}$ دو زیردنبالهٔ همگرا به حدود مختلف داشته باشد باید واگرا باشد .

مثال ۱۵ . ما قبلاً " از مثال ۹ می‌دانیم که دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگراست . این را می‌توان با توجه به اینکه جملات با اندیس زوج همگرا به 1 هستند ولی جملات با اندیس فرد همگرا به -1 می‌باشند نیز به دست آورد . درواقع ،

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1,$$

حال آنکه

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1.$$

مسائل

شش جملهٔ اول دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملهٔ عمومی داده شده را نوشته و حد L را (در صورت وجود) پیدا کنید . (حالت $L=\infty$ یا $L=-\infty$ مجاز است .)

۱. $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

۲. $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$

۳. $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$

۴. $a_n = (-1)^{n-1}n^2$

۵. $a_n = n^{(-1)^n}$

۶. $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$

۷. $a_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n}$

۸. $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$

۹. $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2n}$

۱۰. $a_n = \underbrace{0.333\ldots3}_{n \text{ رقم}}$

۱۱. $a_n = \sqrt{2}$ تا n رقم اعشار

۱۲. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$

۱۳. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$

۱۴. $a_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،} \\ n^2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،} \end{cases}$

۱۵. $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{3}$

۱۶. $a_n = \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{2}$

۱۷. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

۱۸. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

۱۹. $a_n = \ln \dfrac{1}{n}$

۲۰. $a_n = \dfrac{1}{n} \ln \dfrac{1}{n}$

جملهٔ عمومی a_n دنبالهٔ داده‌شده را نوشته و حد L دنباله‌را (در صورت وجود) درصورتی بیابید که قانون تشکیل ناشی از چند جملهٔ اول دنباله برای تمام جملات برقرار باشد .

۲۱. $0, 3, 8, 15, \ldots$

۲۲. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

۲۳. $-\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \ldots$

۲۴. $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \ldots$

۲۵. $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}, \frac{1}{28}, \ldots$

۲۶. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

۲۷. $5, 0, -5, -10, \ldots$

۲۸. $-5, 10, -15, 20, \ldots$

۲۹. جملات دنبالهٔ $\{(-\frac{1}{2})^n\}$ به ازای چه مقادیری از n در فاصلهٔ کمتر از 10^{-6} از حدش قرار دارند ؟

۳۰. جملات دنبالهٔ $\{(2n-1)/(2-3n)\}$ به ازای چه مقادیری از n در فاصلهٔ کمتر از 10^{-3} از حدش قرار دارند؟

شش جملهٔ اول دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی را بنویسید.

۳۱. $a_1 = 0$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = 3a_{n-1} + 2$

۳۲. $a_1 = -1$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = 1 - 4a_{n-1}$

۳۳. $a_1 = \frac{1}{2}$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$

۳۴. $a_1 = 3$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $a_n = \frac{2}{a_{n-1}+1}$

۳۵. دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$a_1 = 1, \quad a_2 = 1$ ؛ اگر $n \geq 3$ ، $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

به *دنبالهٔ فیبوناچی*[1] معروف است. ده جملهٔ اول $\{a_n\}$ را بنویسید.

۳۶. کودکی یک نسل خرگوش به وجود می‌آورد به این ترتیب که یک جفت خرگوش نوزاد، یکی نر و دیگری ماده، را در یک آغل بزرگ رها می‌کند. فرض کنید 1 ماه طول بکشد تا یک جفت خرگوش نوزاد بالغ شوند و 1 ماه دیگر طول بکشد تا یک جفت دیگر خرگوش تولید کنند. با این فرض که هیچ خرگوشی نمیرد و هر زایمان از یک نر و یک ماده تشکیل شده باشد و در روز اول ماه جدید صورت گیرد، نشان دهید که تعداد جفت خرگوشها پس از n ماه در آغل جملهٔ n م دنبالهٔ فیبوناچی می‌باشد.

۳۷. با شروع از دنبالهٔ $\{a_n\}$، فرض کنید $\{s_n\}$ دنبالهٔ دیگری باشد که با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است.

$s_1 = a_1$ ؛ اگر $n \geq 2$ ، $s_n = s_{n-1} + a_n$

عبارتی برای s_n بنویسید که فقط مستلزم جملات $\{a_n\}$ باشد.

درحالتی که $a_n = 2n - 1$ ، فرمول ساده‌ای برای s_n بنویسید.

۳۸. آیا کوچکترین کران بالایی دنبالهٔ $\{1 + (-1)^n/n\}$ همان حد آن است؟ جواب خود را توضیح دهید.

دنبالهٔ کرانداری بیابید که

۳۹. دارای بزرگترین جمله بوده ولی دارای کوچکترین جمله نباشد.

---

1. *Fibonacci*

۴۰. دارای بزرگترین جمله و کوچکترین جمله باشد.
۴۱. نه بزرگترین جمله داشته باشد نه کوچکترین جمله
۴۲. دارای کوچکترین جمله بوده و دارای بزرگترین جمله نباشد.
۴۳. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ کراندار باشد (بخصوص، یک دنبالهٔ همگرا)، و $\{b_n\}$ دنبالهای همگرا به صفر باشد. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_nb_n\}$ نیز همگرا بهصفراست.
۴۴. نشان دهید که دو دنباله با جملات عمومی a_n و

$$b_n = a_n + (n-1)(n-2)\cdots(n-N)$$

دارای N جملهٔ اول یکسان بوده ولی در جملات بعد باهم تفاوت دارند. (لذا، دانستن تعدادی متناهی جملهٔ اولیه هرگز نمیتواند یک دنباله را بهطور منحصر به فرد معین سازد.)
۴۵. کدام جملات دو دنبالهٔ $\{n^3 - 6n^2\}$ و $\{6 - 11n\}$ باهم یکی هستند؟
۴۶. از دنبالههای مسائل ۱ تا ۲۸ کدامها صعودیاند؟ کدامها نزولی میباشند؟
راهنمایی. اگر $a_n = f(n)$، دنبالهٔ $\{a_n\}$ درصورتی (اکیدا") صعودی است که به ازای هر $x \geq 1$، $df(x)/dx > 0$ و درصورتی (اکیدا") نزولی است که به ازای هر $x \geq 1$، $df(x)/dx < 0$. دلیلش را توضیح دهید.

فرض کنید r عددی حقیقی باشد. حدود زیر را حساب کنید.

۴۷. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{1+r^n} \quad (r \neq -1)$

۴۸. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{1+r^{2n}}$

۴۹. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!}$

دو دنبالهٔ واگرای $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ چنان بیابید که

۵۰. $\{a_n + b_n\}$ همگرا باشد.

۵۱. $\{a_nb_n\}$ همگرا باشد.

۵۲. $\{a_n/b_n\}$ همگرا باشد.

۵۳. فرض کنید c عدد دلخواهی بزرگتر از 1 باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{c^n} = 0.$$

بخصوص، با استفاده از این حد مثال ۸ را تحقیق نمایید.
۵۴. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ همگرا با حد یکسان L بوده، و دنبالهٔ $\{c_n\}$ چنان باشد که بهازایهر n (یا بهازایتمام n های به قدر کافیبزرگ) $a_n \leq c_n \leq b_n$.

نشان دهید که $\{c_n\}$ نیز همگرا به L می‌باشد.

راهنمایی. این شبیه برای دنباله‌های قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ ۷۷۲ است (قضیهٔ ساندویچ).

۵۵. نشان دهید هرگاه وقتی $n \to \infty$، $a_n \to L$ و f تابع پیوسته‌ای در L باشد، آنگاه وقتی $n \to \infty$، $f(a_n) \to f(L)$.

۵۶. به کمک مسئلهٔ قبل، نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

که در آن c عدد مثبت دلخواهی است. همچنین، نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

با استفاده از مشتقگیری، بزرگترین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی زیر را پیدا نمایید.

۵۷. $a_n = \sqrt[n]{n}$

۵۸. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 2500}$

۵۹. $a_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$

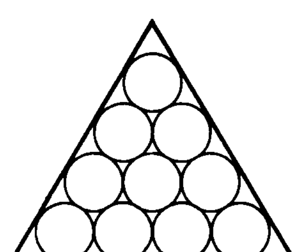
۶۰. پس از اثبات صعودی اکید بودن $\{[1 + (1/n)]^n\}$ و نزولی اکید بودن $\{[1 + (1/n)]^{n+1}\}$، نشان دهید که

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad \text{(یک)}$$

نقص استفاده از این نامساوی مضاعف در تخمین عدد e چیست؟

۶۱. فرض کنید k_n قرص مستدیر همنهشت n سطر را اشغال‌کرده و در یک مثلث متساوی الاضلاع به شکل ۶ محاط شده باشد؛ درنتیجه،

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1 + 2 = 3, \quad k_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \ldots$$



شکل ۶

فرض کنید A مساحت مثلث بوده و A_n مساحت کل k_n قرص باشد . نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

۶۲ . فرض کنید

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx.$$

در این صورت ، بنابر فرمولهای ثابت شده در مسئلهٔ ۱۳ ، صفحهٔ ۶۱۴ ،

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}}{\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}.$$

نشان دهید که وقتی $n\to\infty$ ، $I_{2n+1}/I_{2n}\to 1$ ؛ ودرنتیجه ،

$$\pi = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}. \qquad \text{(دو)}$$

این فرمول جالب برای π در ۱۶۵۰ توسط جان والیس[1] ، ریاضیدان انگلیسی ، کشف شد . **راهنمایی .** از مسئلهٔ ۵۴ استفاده نمایید .

۲.۹ سریهای نامتناهی

فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ نامتناهی باشد . در این صورت ، عبارت

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad (۱)$$

یا به‌طور فشرده‌تر ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (۱')$$

یک سری *نامتناهی* ، یا فقط یک سری ، نامیده می‌شود . در نوشتن (۱´) ، از تعدیل نماد سیگما که در صفحهٔ ۳۶۱ معرفی شد ، که در آن حد جمعبندی بالایی به جای عددی صحیح ∞ است ، استفاده می‌کنیم . اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *جملات* سری نامیده می‌شوند (همچنین ، جملات دنبالهٔ $\{a_n\}$ نام دارند) ، و a_n **جملهٔ n م** یا **جملهٔ عمومی** نامیده می‌شود .

---

1. John Wallis.

سریهای همگرا و واگرا. در این مرحله سریهای (۱) یا (۱′) عدد نبوده بلکه صرفاً " یک عبارت صوری می‌باشند ، زیرا هنوز در معنی مجموع *بی‌نهایت* جمله ، مفهومی که‌هیچ نقشی در ریاضیات مقدماتی ندارد ،تصمیمی نگرفته‌ایم . برای انتساب معنی به یک چنین "مجموع نامتناهی " به صورت زیر عمل می‌کنیم . مجموع n جملهٔ اول سری (۱) یا (۱′)عددکاملا" تعریف شدهٔ

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

است به نام **مجموع جزئی** n **م** سری. (بالاخره ، ابهامی در معنی مجموع تعداد *متناهی* جمله وجود ندارد .) مجموعهای جزئی متوالی دنبالهٔ زیر را تشکیل می‌دهند :

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ldots$$

فرض کنیم این دنباله همگرا با حد

$$S = \lim_{n \to \infty} s_n \qquad (۲)$$

باشد که در بخش ۱۰۹ تعریف شد . در این صورت ، گوییم سری (۱) یا (۱′) *همگرا* (یا *واگرا*) است ، و به آن **مجموع** S را نسبت می‌دهیم . اما ، اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ واگرا باشد ، یعنی $\{s_n\}$ به حدی متناهی نزدیک نشود ، گوییم سری *واگرا* ، بدون مجموع ، می‌باشد . اگر سری همگرا با مجموع S باشد ، می‌نویسیم

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = S,$$

یا ، با نماد سیگما ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

اندیس جمعبندی ، درست مثل یک مجموع متناهی ، یک " اندیس ظاهری " است در این معنی که هر علامت دیگر به همین خوبی خواهد بود . مثلا" ،

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{p=1}^{\infty} a_p$$

همه یک سری را نشان می‌دهند . این ملاحظات به ما اجازهٔ نوشتن (۲) را به شکل زیر می‌دهند :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

که کاملا" شبیه تعریف

$$\int_c^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_c^u f(x)\,dx$$

یک انتگرال مجازی همگرا با بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران است .

فرایند یافتن مجموع یک سری همگرا جمعبندی سری نام دارد ، و لوآنکه عملا "عبارت است از محاسبهٔ حد دنبالهٔ مجموعهای‌جزئی‌سری . اگر m عدد صحیح مثبتی (نه‌لزوما "1) باشد ، سری

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

یعنی

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + \cdots,$$

یعنی ، سری حاصل از (۱) با حذف $m-1$ جملهٔ اولیه. گاهی اوقات $m = 0$ ؛ یعنی ، سری نامتناهی با " جملهٔ صفرم " شروع می‌شود ، مثل سری مهمی که در مثال زیر مطرح می‌شود .

سری هندسی

مثال ۱ . در همگرایی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots, \tag{۲}$$

که در آن r و $a \neq 0$ ثابتهای دلخواهی می‌باشند ، بحث کنید .

حل . توجه کنید که‌سری هندسی با جملهٔ a شروع شده ، و هر جمله از ضرب جملهٔ قبل در عدد r ، به نام‌قدرنسبت سری ، به دست می‌آید . مجموع n جملهٔ اول سری هندسی ، یعنی مجموع جزئی n م ، عبارت است از

$$s_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}.$$

برای به دست آوردن فرمول ساده‌ای جهت s_n ، ملاحظه می‌کنیم که

$$s_n - rs_n = (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n).$$

که در آن همهٔ جملات جز دو تا حذف شده باقی می‌ماند

$$s_n - rs_n = a - ar^n.$$

پس نتیجه می‌شود که $s_n(1-r) = a(1-r^n)$ ، یا معادلاً

$$s_n = \frac{a}{1-r}(1-r^n) \qquad (r \neq 1).$$

هرگاه $|r| < 1$ ، آنگاه، بنابر مثال ۱۴، صفحهٔ ۷۹۷، وقتی $n \to \infty$ ، $r^n \to 0$ ؛ ولذا،

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-r},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \qquad (|r| < 1).$$

بنابر همان مثال، $\{r^n\}$ به ازای $|r| > 1$ واگراست؛ و درنتیجه، همین امر بـرای دنبالهٔ $\{s_n\}$ درست است، و سری (۳) واگرا می‌باشد. اگر $r = 1$ ، سری به صورت‌زیردرمی‌آید:

$$a + a + a + a + \cdots,$$

حال آنکه اگـر $r = -1$ ، سری شکل زیر را خواهد داشت:

$$a - a + a - a + \cdots.$$

در حالت اول $s_n = na$ ، ولی در حالت دوم

$$s_n = \begin{cases} a & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

ولی در هر دو حالت $\{s_n\}$ واگراست؛ و درنتیجه، سری (۳) نیز چنین است. لذا، به‌طور خلاصه، سری هندسی *(۳) همگرا با مجموع* $a/(1-r)$ *است اگر* $-1 < r < 1$ و درغیراین صورت *واگرا خواهد بود.*

مثال ۲. با اختیار $a = 1, r = \frac{1}{2}$ در سری هندسی، به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

حال آنکه با انتخاب $a = 1, r = -\frac{1}{2}$ به دست‌می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \cdots = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

مثال ۳. سری هندسی به ازای $a = 3, r = \frac{1}{10}$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{10}\right)^n = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{3},$$

نتیجه‌ای که اصلا " تعجب‌آور نیست ، زیرا این مجموع چیزی جز عدد اعشاری‌مکررنمی‌باشد:

$$3.333\ldots = 3.\overline{3} = \frac{10}{3}.$$

(رابطهٔ بین اعشاریها و سریهای نامتناهی ، و بخصوص بین اعشاریهای مکرروسری هندسی، دربخش بعددنبال‌خواهد شد .)از آن سو ، به ازای $a = \frac{1}{10}, r = 3$ ، سری هندسی‌واگرای‌زیر به دست می‌آید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{9}{10} + \cdots + \frac{3^n}{10} + \cdots$$

مثال ۴ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

همگراست ، و مجموع آن را بیابید .

حل . با بسط جملهٔ عمومی برحسب کسرهای جزئی ، معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

و درنتیجه ،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

لذا ، مجموع جزئی n م سری عبارت است از

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

چون تمام جملات مجموع سمت راست جز جملهٔ اول و آخر 0 هستند ، مجموع " تسوی هم رفته " ، به

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

تحویل می‌شود . بنابراین ،

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

که از آن نتیجه می‌شود که سری داده شده همگرا با مجموع 1 می‌باشد .

مثال ۵ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

واگراست .

حل . چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n],$$

مجموع جزئی n م

$$s_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n]$$

سری توی هم رفته و به

$$s_n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

تحویل می‌شود . اما

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \ln(n+1) = \infty,$$

و درنتیجه ، سری داده شده واگرا می‌باشد .

سری توافقی

مثال ۶ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \tag{۴}$$

که به سری *توافقی* معروف است ، واگرا می‌باشد .

حل . فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م سری توافقی باشد . در این صورت ،

$$\begin{aligned}
s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k}\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)\\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)\\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\ \text{جمله}}\\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{k\ \text{جمله}} = 1 + \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

(با استفاده از این امر که به ازای $j = 1, 2, \ldots, 2^{k-2}$ ، $2^{k-1} + j < 2^k$). مثلاً ،

$$s_4 = s_{2^2} > 1 + \frac{2}{2} = 2, \qquad s_8 = s_{2^3} > 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \qquad s_{16} = s_{2^4} > 1 + \frac{4}{2} = 3,$$

و غیره . لذا ، دنباله‌ٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ شامل جملات بدلخواه بزرگ است؛ ودرواقع به ازای $C > 0$ و هر $k > 2C - 2$ داریم $s_{2^k} > C$. بنابراین ، $\{s_n\}$ واگراست؛ و در نتیجه ، سری توافقی (۴) نیز چنین می‌باشد .

تبصره . می‌توان نشان داد که مجموع جزئی n ام سری توافقی با تقریب‌عالی از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$s_n \approx C + \ln n,$$

که در آن $C = 0.5772156649\ldots$ عددی‌است‌که به *ثابت اویلر* معروف است وخطای‌تقریب وقتی $n \to \infty$ ، سریعاً به 0 نزدیک می‌گردد . با استفاده از این فرمول ، معلوم می‌شودکه

$$s_{1000} \approx 7.48, \qquad s_{10,000} \approx 9.79,$$
$$s_{100,000} \approx 12.09, \qquad s_{1,000,000} \approx 14.39.$$

لذا ، میزان واگرایی سری توافقی به نحو خارق‌العاده‌ای کند است .

شرط لازم برای همگرایی . حال شرط ساده‌ای به دست می‌آوریم که یک سری برای‌همگرا بودن باید در آن صدق نماید .

قضیهٔ ۳ (شرط لازم برای همگرایی یک سری) . هرگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{۵}$$

همگرا باشد ، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{۶}$$

به بیان معادل ، سری درصورتی واگراست که

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \tag{۶'}$$

(در این شکل ، قضیه اغلب " آزمون جملهٔ n م برای واگرایی " نام دارد) .

برهان . واضح است که

$$a_n = s_{n+1} - s_n,$$

که در آن $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ مجموع جزئی n م سری می‌باشد . فرض کنیم سری همگرا با مجموع S باشد . در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = S - S = 0.$$

مثال ۷ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{n}{2n+1} + \cdots$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

با امتحان اینکه هر سری هندسی همگرا در شرط (۶) صدق می‌کند ، می‌بینیم که

$$\lim_{n\to\infty} ar^n = 0 \quad \text{،} \quad -1 < r < 1 \quad \text{اگر}$$

به همین نحو ، سری همگرای مثال ۴ در شرط زیر صدق می‌کند :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

شرطی که قضیهٔ ۳ آن را لازم دارد . لیکن ، عکس قضیهٔ ۳ برقرار نیست ؛ یعنی ، *برقراری (۶) همگرایی سری (۵) را ایجاب نمی‌کند* . مثلاً ، سری توافقی واگراست و لو اینکه

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

و سری مثال ۵ واگراست و لواینکه

$$\lim_{n \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

به زبان منطق، (۶) یک‌شرط لازم ولی نه کافی برای همگرایی سری (۵) است. بخش اعظم این فصل به بررسی "آزمونهای‌همگرایی" اختصاص دارد. اینها شرایطی کافی برای‌همگرایی اند؛ یعنی، شرایطی که همگرایی یک سری را تضمین می‌کنند.

اعمال جبری بر سریها. طبق تعریف، حاصل ضرب سری $\sum a_n$ در عدد c سری $\sum ca_n$ است، و مجموع یا تفاضل دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری $\sum (a_n + b_n)$ یا $\sum (a_n - b_n)$ می‌باشد (علامت "ساده شدهٔ" $\sum$ اختصاری است برای $\sum\limits_{n=m}^{\infty}$، که در آن عدد صحیح نامنفی m اندیس جمعبندی پایینی است که در اینجا مساوی 1 می‌باشد). این تعاریف چه سریهای $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند یا نه به کار می‌روند ولی هرگاه همگرا و به ترتیب با مجموعهای S و S' باشند، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n \to \infty} (ca_1 + \cdots + ca_n) = c \lim_{n \to \infty} (a_1 + \cdots + a_n) = cS,$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \to \infty} [(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)] \\ &= \lim_{n \to \infty} [(a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)] \\ &= \lim_{n \to \infty} (a_1 + \cdots + a_n) + \lim_{n \to \infty} (b_1 + \cdots + b_n) = S + S',\end{aligned}$$

و به همین‌نحو، $\sum (a_n - b_n) = S - S'$. توجه کنید که در اینجا واژهٔ "مجموع" به دو معنی به کار رفته است، یکی مجموع یک سری همگرا که عدد است و دیگری مجموع صوری $\sum (a_n + b_n)$ دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ که‌ممکن‌است‌همگرا نباشد، ولی معنی موردنظر همواره از قراین معلوم خواهد بود.

مثال ۸. دو سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad و \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

همگرا و به ترتیب با مجموعهای 2 و $\frac{2}{3}$ می‌باشند (ر.ک. مثال ۲) . بنابراین ،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

و این را می‌توان مستقیما" باتوجه به

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2+0+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+0+2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots$$

$$=2+2\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$$

امتحان نمود . به همین نحو ،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

و به‌طورکلی ،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=2A+\frac{2}{3}B.$$

فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دوسری به ترتیب با مجموعهای جزئی n م s_n و t_n بوده ،و سریها فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق داشته باشند؛ درنتیجه، بـه ازای هـر n متجاوز از عدد صحیح N ، $a_n=b_n$. در این صورت ،

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\cdots+a_N+a_{N+1}+\cdots+a_n+\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+\cdots+b_N+a_{N+1}+\cdots+a_n+\cdots,$$

و درنتیجه ، اگر $n>N$ ،

$$s_n-t_n=(a_1+\cdots+a_N)-(b_1+\cdots+b_N)=s_N-t_N,$$

یا معادلا"

$$s_n=t_n+c,$$

که در آن $c=s_N-t_N$ عدد ثابتی می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که دو دنباله‌ٔ $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ هـر دو همگرا یا هر دو واگرایند؛و درنتیجه ، همین امر برای دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ درست است . به عبارت دیگر ، دو سری که فقط در تعدادی **متناهی** جمله باهم فرق دارند یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا . به عنوان تمرین ، نشان دهید که هرگاه در یـک سری تعدادی متناهی جمله حذف شود یا تعدادی‌متناهی جملهٔ اضافی (در مواضع دلخواه) درج

گردد ، آنگاه سری به دست آمده همگراست اگر سری اصلی همگرا باشد و واگراست اگر سری اصلی واگرا باشد . البته ، در حالت همگرایی ، مجموع سری به دست آمده عموما" با مجموع سری اصلی متفاوت می‌باشد .

باقیماندهٔ یک سری . بخصوص ، فرض کنید n جملهٔ اول سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots \qquad (۷)$$

را حذف کرده ، سری جدید

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots \qquad (۷')$$

را به دست آورده باشیم . در این صورت ، اگر (۷) همگرا باشد ، سری (۷') نیز چنین است . مجموع (۷') را با R_n نشان داده ، و آن را ***باقیمانده پس از n جملهٔ*** سری اصلی (۷) می‌نامیم . فرض کنیم S مجموع (۷) باشد . در این صورت ،

$$S = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + R_n,$$

و درنتیجه ،

$$\lim_{n\to\infty} R_n = S - \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S - S = 0.$$

لذا ، *باقیمانده پس از n جملهٔ یک سری همگرا با رفتن $n \to \infty$ همگرا به 0 می‌باشد* .

مثال ۹ . باقیمانده پس از n جملهٔ سری هندسی همگرای

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = 2$$

عبارت است از

$$\begin{aligned} R_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots\right) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

درنتیجه ،

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

تغییر اندیس جمعبندی. در مثال اخیر می‌توانستیم باقیمانده را به شکل زیر بنویسیم:

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

که در آن n حد پایینی جمعبندی است. به‌طورکلی، همواره می‌توان اندیس جملهٔ عمومی یک سری نامتناهی را با تغییر نظیر در حد پایینی جمعبندی تغییر داد. مثلاً،

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n, \quad \sum_{n=3}^{\infty} ar^{n-3}, \quad \sum_{n=-2}^{\infty} ar^{n+2}$$

سه طریقهٔ مختلف نوشتن سری هندسی

$$a + ar + ar^2 + \cdots$$

است، ولی طرق دوم و سوم در مقایسه با طریقهٔ اول، که طریقهٔ طبیعی نوشتن سری‌است، مطلوب نمی‌باشند. البته، هرطور که سری را بنویسیم، مجموع جزئی n م آن یکی است، و در این حالت، همانطور که مثال ۱ نشان داده، عبارت است از

$$s_n = \frac{a}{1-r}(1 - r^n) \qquad (r \neq 1).$$

مسائل

پنج مجموع جزئی اول سریهای زیر را حساب کنید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} 3$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$

۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

۷. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

۸. $\sum_{n=3}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$

۹. فرض کنید a_n جملهٔ n م سری $\sum a_n$ و s_n مجموع جزئی n م آن باشد. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را برحسب دنبالهٔ $\{s_n\}$ بیان نمایید.

سریی را بنویسید که مجموع جزئی n م آن به صورت زیر باشد.

۱۰. $s_n = \frac{n+2}{n+1}$

۱۱. $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

۱۲. $s_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

اگر سری داده شده همگرا باشد ، مجموعش را پیدا کنید . در غیر این صورت ، واگرایی‌آن را نام ببرید . درحالتی که چندجملهٔ اولیهٔ سری داده شده است ، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد .

۱۳. $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}-\cdots$

۱۴. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\cdots$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

۱۶. $1+\frac{1}{2}-1-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{8}-1-\frac{1}{16}+\cdots$

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty}4\left(-\frac{5}{6}\right)^n$

۱۸. $\sum_{n=0}^{\infty}3^{-n/2}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

۲۰. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\ln n}$

۲۱. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{3}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$

۲۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$

۲۴. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$

۲۵. $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}+\cdots$

۲۶. $\sum_{n=0}^{\infty}e^n\pi^{1-n}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}[\arctan(n+1)-\arctan n]$

باقیماندهٔ R_n پس از n جملهٔ سری داده شده را یافته ، و تحقیق کنید وقتی $n\to\infty$ ، $R_n\to 0$.

۲۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e-1}{e^{n+1}}$

۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)}$

۳۲. نشان دهید هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا باشد ،آنگاه مجموع دوسری $\sum(a_n+b_n)$ واگراست .

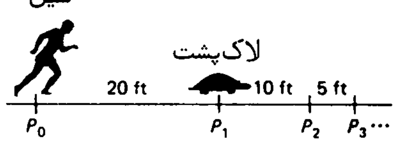
۳۳. آیا عددی مانند r هست که به ازای آن سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)$$

همگرا باشد ؟

۳۴. فرض کنید s_n مجموع جزئی n م یک‌سری همگرا باشد. نشان دهید که برای‌هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $m > N$ و $n > N$ ، $|s_m - s_n| < \varepsilon$. با استفاده از این امر ، برهان دیگری برای واگرایی سری توافقی (۴) به دست آورید .

۳۵. آشیل در تعقیب یک‌لاک‌پشت‌در امتداد جاده‌ای می‌دود . در لحظهٔ شروع لاک‌پشت طبق شکل ۷ ، در فاصلهٔ 20 ft از وی قرار دارد ؛ آشیل ابتدا در P_0 و لاک‌پشت‌ابتدا



شکل ۷

لاک‌پشت در P_1 است . فرض کنیدآشیل باسرعت 20 ft/sec و لاک‌پشت با سرعت 10 ft/sec بدود.[1] در این صورت ، 1 sec طول می‌کشد تا آشیل از P_0 به P_1 برسد ، ولی در این اثنا لاک‌پشت 10 ft بیشتر تا موضع P_2 رفته است . برای رفتن‌آشیل‌از P_1 به P_2 به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ sec دیگر طول می‌کشد ، و در این مدت‌لاک‌پشت 5 ft دیگر تا موضع P_3 پیموده است ، و همین طور تا بی‌نهایت . چون آشیل همواره در جهت اشغال آخرین موضع‌لاک‌پشت‌است ، به‌نظر می‌رسد که ، با آنکه سرعت آشیل دوبرابرلاک‌پشت است ، هرگز نمی‌تواند به‌لاک‌پشت‌رسیده از او بگذرد . این پارادکس منسوب به زنو[2] ایلیایی ، فیلسوف یونانی است که پنج قرن قبل از میلاد می‌زیسته است .بااستدلالی مقدماتی ، نشان دهید که آشیل پس از 2 sec عملا" ازلاک‌پشت‌جلو می‌زند ، و سپس پارادکس زنو را با جمعبندی سری هندسی متناسبی باطل نمایید .

۳۶. فرض کنید در مسئلهٔ قبل‌لاک‌پشت‌بتواند با هر سرعتی کمتر از 20 ft/sec بدود ، و تصمیم بگیرد وقتی آشیل از P_0 به P_1 می‌رود با سرعت $20(\frac{1}{2}) = 10$ ft/sec ، وقتی‌آشیل

---

۱. *این سرعت برای لاک پشت زیاد است ، ولی محاسبات را ساده خواهد کرد .*

2. **Zeno**

از P_1 به P_2 می‌رود با سرعت $20(\frac{2}{3}) = 13\frac{1}{3}$ ft/sec ، وقتی آشیل از P_2 به P_3 می‌رود با سرعت $20(\frac{3}{4}) = 15$ ft/sec ، و در حالت کلی وقتی آشیل از P_{n-1} به P_n می‌رود ، با سرعت $20n/(n+1)$ ft/sec حرکت کند . نشان دهید که در این حالت ، باآنکه‌لاک‌پشت هرگز به سرعت آشیل نمی‌دود ، آشیل هیچگاه ازلاک‌پشت سبقت نخواهد گرفت !

۳۷ . یک توپ لاستیکی پس از افتادن از ارتفاع 45 ft روی یک پیاده‌رو سفت بالا و پایین می‌رود . الاستیسیتهٔ توپ چنان است که در هر برگشت به دوسوم ارتفاع قبلی خود می‌رسد . مسافت پیموده شده توسط توپ وقتی به اوج ششمین برگشت خود رسیده چقدر است؟ مسافت پیموده شده توسط توپ تا وقتی به حال سکون درمی‌آید چقدر است؟

۳۸ . وقتی پول صرف خرید کالا و دریافت سرویس‌می‌شود ،آنهایی که پول دریافت‌می‌کنند بخشی از آن را خرج می‌کنند ، آنهایی که دوبار دریافت می‌کنند قسمتی از آن را باز می‌گردانند و کار همین‌طور تا بی‌نهایت ادامه دارد . فرض کنید خرج اولیه D دلار بوده ، و هر دریافت‌کننده $100c$ درصد آن را خرج‌و $100s$ درصد را پس‌اندازمی‌کند. کمیات c و s ،که به *تمایل حاشیه‌ای به‌مصرف* و *تمایل حاشیه‌ای به پس‌انداز*معروفند ، هر دو اعدادی بین 0 و 1 می‌باشند؛ واضح است که $c + s = 1$ ، زیرا پول یا مصرف می‌شود (خرج می‌شود) یا پس‌انداز می‌گردد . پس درآمد اجتماع کلا" (در مورد تمام کشور ، درآمد ملی) مآلا" به اندازهٔ kD دلار افزایش می‌یابد ، که در آن k ضریب نام دارد . تمام این مفاهیم کلیدی اقتصاد در مقیاس بزرگ از اقتصاددان انگلیسی ، جان میناردکینز[1] (۱۹۴۰ — ۱۸۸۳) است . نشان دهیدکه $k = 1/s > 1$ ، که به " اثر چندگانه " منجرمی‌شود که در اقتصاد کینزی‌اهمیتی*اساسی دارد . (مثلا "* هرگاه $s = 0.2$ ، آنگاه $k = 5$ ؛ درنتیجه ، $1 خرج یا سرمایه‌گذاری منجر به افزایش $5 درآمد ملی می‌شود .)

۳۹ . حسن و حسین که ابتدا 250 ft از هم فاصله دارند به سوی یکدیگر ، هر یک با سرعت 10 ft/sec ، می‌دوند . در همین مدت سگی بین حسن و حسین با سرعت 15 ft/sec این طرف و آن طرف می‌دود . وقتی حسن و حسین به هم برسند ، سگ چه مسافتی‌را دویده است؟ این مسئله را به روش مقدماتی و جمعبندی یک سری مناسب‌حل‌نمایید .

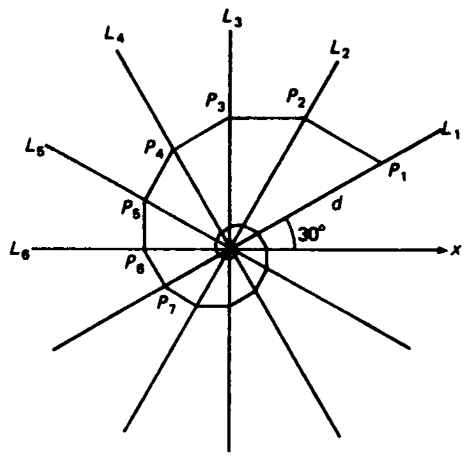
۴۰ . مسئلهٔ قبل را مجددا" به دو راه و با این فرض حل کنید که حسین به جای‌دویدن‌به سوی حسن باسرعت 10 ft/sec باسرعت 5 ft/sec از وی دور شود .

---

1. John Maynard Keynes

۴۱ . عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه‌شمار یک ساعت وقت ظهر برهم منطبق‌اند . زمان (تا نزدیکترین ثانیه) را بیابید که عقربه‌ها مجددا" برهم منطبق شوند . این را به دو طریق انجام دهید .

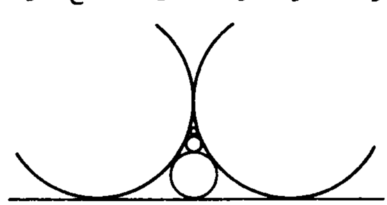
۴۲ . همانند شکل ۸ ، فرض کنید $L_1, L_2, \ldots, L_6$ شش خط باشند به طوری که L_1 با محور مثبت x زاویهٔ $30°$ ساخته و زاویهٔ بین هر جفت خط مجاور نیز $30°$ باشد (توجه‌کنید



شکل ۸

که L_3 بر محور y و L_6 بر محور x منطبق است) . از نقطهٔ P_1 بر L_1 به فاصلهٔ d تا مبداء عمودی بر L_2 فرود می‌آوریم تا آن را در نقطهٔ P_2 قطع کند ، از P_2 عمودی بر L_3 فرود می‌آوریم تا آن را در P_3 قطع کند ، و همین‌طور تا آخر (خط بعد از L_6 مجددا" L_1 است) . پاره‌خطهای متوالی $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_{n+1}, \ldots$ مسیر چند ضلعی مارپیچی $P_1P_2 \ldots P_n \ldots$ راتشکیل می‌دهند که حول مبداء پیچیده و در عین حال به سمت آن منقبض می‌شود . نشان دهید که این مسیر به طول $(2+\sqrt{3})d$ می‌باشد .

۴۳ . شکل ۹ ناحیهٔ محدود به دو دایرهٔ مماس به شعاع 1 و یک خط مماس بر هر دو آنها



شکل ۹

را نشان می‌دهد. دنباله‌ای از دوایر کوچکتر را به شیوهٔ نموده شده محاط می‌کنیم. از هندسه می‌دانیم که اقطار این دوایر جملات یک سری‌اند که مجموعشان 1 می‌باشد. این سری چیست؟

۴۴. نشان دهید که سری $\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta + \cdots$ به ازای هر θ واگراست، ولی سری $\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta + \cdots$ واگراست مگر آنکه $\theta = k\pi$، که در آن k عددی صحیح است.

راهنمایی. از اتحادهای

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta,$$
$$\sin(n-1)\theta = \sin n\theta \cos\theta - \cos n\theta \sin\theta,$$
$$\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$$

استفاده کنید.

۴۵. تقی فشارخون دارد، و دکترش یک سری معالجات با دارو را تجویز کرده است. تقی اولین نوبت را در لحظهٔ $t = 0$ می‌خورد، و نوبتهای بعدی در لحظات $t = T, 2T, \ldots, nT, \ldots$ می‌باشند. در هر نوبت غلظت دارو در خون وی به سرعت به میزان C_0 بالا می‌رود، ولی در همان حال بدنش برای حذف دارو وارد عمل می‌شود. فرض کنید $C = C(t)$ غلظت دارو در خون تقی در لحظهٔ t باشد. در این صورت، مثل مسئلهٔ ۲۵، صفحهٔ ۵۴۵، C در معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

صدق می‌کند، که در آن $k > 0$ ثابت حذف می‌باشد. نشان دهید که C مآلاً بین سطح

$$R = \frac{C_0}{e^{kT} - 1},$$

به نام *غلظت مانده‌ای*، و سطح $R + C_0$ نوسان می‌کند. فرض کنید دکتر بخواهد مطمئن شود که غلظت هیچگاه زیر سطح C_e که در آن دارو موثر است و نیز هیچگاه بالای سطح C_s که در آن دارو بی‌مصرف می‌ماند قرار نمی‌گیرد. نشان دهید که این با انتخاب

$$C_0 = C_s - C_e, \qquad T = \frac{1}{k} \ln \frac{C_s}{C_e}$$

صورت خواهد گرفت.

۳.۹ سریهای نامنفی؛ آزمونهای مقایسه و آزمون انتگرال

سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

را *نامنفی* گوییم اگر تمام جملات آن نامنفی باشند؛ یعنی، اگر به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$، $a_n \geq 0$. هر مجموع جزئی $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ از سری‌نامنفی $\sum a_n$ مجموع‌تعدادی متناهی عدد نامنفی است؛ و درنتیجه، خود عددی نامنفی می‌باشد. به‌علاوه، $\{s_n\}$ یک دنباله‌ٔ صعودی است، زیرا

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

این نکات ما را فوراً" به حکم زیر می‌رساند که در بررسی سریهای نامنفی از اساس می‌باشد.

قضیهٔ ۴ (محک همگرایی برای سریهای نامنفی). *سری نامنفی $\sum a_n$ همگراست‌اگردنبالهٔ $\{s_n\}$ مجموعهای جزئی آن کران بالایی داشته باشد؛ یعنی، عددی مانند $C > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر n،*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq C$$

اگر این عدد موجود نباشد، سری واگرا خواهد بود.

برهان. هرگاه $\{s_n\}$ کران بالایی داشته باشد، آنگاه $\{s_n\}$ یک دنبالهٔ صعودی کراندار است. اما در این صورت، طبق قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۷۹۶، $\{s_n\}$ همگراست؛ و درنتیجه، $\sum a_n$ نیز چنین است. از آن‌سو، هرگاه $\{s_n\}$ کران بالایی نداشته باشد، آنگاه s_n به‌ازای هر n به قدرکافی بزرگ از $C > 0$ داده شده متجاوز است؛ درنتیجه، وقتی $n \to \infty$، $s_n \to \infty$. در این‌حالت $\{s_n\}$ واگراست؛ و لذا، $\sum a_n$ نیز چنین است.

اعشاریها و سریهای نامتناهی

مثال ۱. اعشاری نامختوم $0.c_1c_2\ldots c_n\ldots$ که در آن به ازای هر n، $0 \leq c_n \leq 9$، اختصاری است برای سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots \qquad (1)$$

نشان دهید که هرچنین سری همگراست، و این تاکنون به‌طور تلویحی فرض شده بود.

حل . سری (۱) نامنفی است؛ و لذا ، طبق قضیهٔ ۴ ، همگرایی آن درصورتی‌ثابت می‌شود که بتوان نشان داد که دنبالهٔ $\{s_n\}$ مجموعهای جزئی آن کران بالایی دارد . اما این درست است ، زیرا به ازای هر n ،

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} \le \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ &= \frac{9}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right] = \frac{9}{10}\,\frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n < 1 \end{aligned}$$

مثال ۲ . فرض کنید $0.a_1 \ldots a_m\overline{b_1 \ldots b_n}\ (\neq 0)$ یک اعشاری مکرر باشد ، که در آن قالب ارقام $b_1 \ldots b_n$ به طول n که روی آن خط‌کشیده شده به‌طور نامحدود تکرار خواهد یافت . (مثلاً ، در اعشاری $0.51\overline{729} = 0.517292929\ldots$ داریم $a_1 = 5$ ، $a_2 = 1,\ a_3 = 7,$ $b_1 = 2,\ b_2 = 9$) . نشان‌دهید ، همانطورکه درصفحهٔ ۷ پیش‌بینی شد ، هر چنین اعشاری نمایش یک عدد گویاست که با خارج‌قسمت

$$\frac{p}{q} \qquad (q \neq 0)$$

دو عدد صحیح p و q تعریف می‌شود .

حل . فرض کنیم $A = a_1 \ldots a_m$ و $B = b_1 \ldots b_n$ ، که اینها رشته‌هایی از ارقام هستند نه حاصل ضرب ا در این صورت ، A و B اعداد صحیح مثبتی می‌باشند و ، پس از جمعبندی سری هندسی همگرا ،

$$\begin{aligned} 0.a_1 \ldots a_m\overline{b_1 \ldots b_n} &= \frac{A}{10^m} + \frac{1}{10^m}\sum_{k=1}^{\infty} B\left(\frac{1}{10^n}\right)^k = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^{m+n}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}\right)^k \\ &= \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^{m+n}}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^n}} = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^m}\,\frac{1}{10^n - 1}. \end{aligned}$$

بنابراین ،

$$0.a_1 \ldots a_m\overline{b_1 \ldots b_n} = \frac{A(10^n - 1) + B}{10^m(10^n - 1)}, \qquad (۲)$$

و اعشاری مکرر داده شده به صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح مثبت ، یعنی

$p = A(10^{n-1} - 1) + B$ و $q = 10^m(10^n - 1)$ ،بیان شده است . این خارج‌قسمت لزوماً " تحویل‌ناپذیر نیست .

مثال ۳. عـــدد گویای نموده شده با اعشاری مکرر $4.3\overline{21}$ را به صورت تحویل‌ناپذیر پیدا کنید .

حل . با نوشتن $4.3\overline{21}$ به صورت $4 + 0.3\overline{21}$ روش مثال قبل را بر اعشاری مکرر $0.3\overline{21}$ اعمال نمایید . در اینجا $A = 3, B = 21, m = 1, n = 2$ و فرمـول (۲) نتیجه می‌دهد که

$$0.3\overline{21} = \frac{3(10^2 - 1) + 21}{10(10^2 - 1)} = \frac{3(99) + 21}{10(99)} = \frac{318}{990},$$

که در آن آخرین کسر تحویل‌ناپذیر نیست ، زیرا صورت و مخرج هر دو (دقیقاً ") بر 2 و نیز بر 3 بخشپذیرند . بنابراین ،

$$0.3\overline{21} = \frac{106}{330} = \frac{53}{165},$$

که اکنون تحویل‌ناپذیر است ، زیرا 53 بر 3 ، 5 ، یا 11 بخشپذیر نیست ، عـوامـل اول عبارتنداز $165 = 3(5)(11)$. لذا ، بالاخره ،

$$4.3\overline{21} = 4 + \frac{53}{165} = \frac{713}{165},$$

که هنوز تحویل‌ناپذیر می‌باشد (چرا ؟)

باوجود موفقیتی که در بخش ۲.۹ در جمعبندی سریهای خاص داشتیم ، معمولاً " یافتن مجموع دقیق یک سری همگرا مشکل یا غیرممکن است . خوشبختانه اگر همگرایی یـک سری به‌قدر کافی " سریع " باشد ، مجموع آن را می‌توان با جمعبندی تعـداد نسبتاً " کمی از جملات اولیهٔ سری به‌خوبی تقریب کرد . بااینحال ، پیش از سعی در یافتن مجموع دقیق یا تقریبی یک سری باید ابتدا از همگرایی آن مطمئن بودا سری توافقی واگرا دراینجا اخطار است ، زیرا واگرایی آن چندان روشن نیست .

آزمون مقایسه . لذا ، هدف بعدی ما ارائهٔ آزمونهایی است که همگرایی یک‌سری را مشخص نماید . از قضیهٔ ۴ استفاده کرده ، آزمونی به دست می‌آوریم که در آن رفتار همگرایی یک سری رفتار همگرایی سری دیگر را معین می‌کند . این " آزمون مقایسه " مشابه دقیق قضیهٔ

۶ ، صفحهٔ ۶۸۲ ، برای انتگرالهای مجازی است .

قضیهٔ ۵ (آزمون مقایسه) . فرض کنیم $\sum a_n$ **و** $\sum b_n$ **دو سری نامنفی باشند به طوری‌که به ازای** n **های به قدر کافی بزرگ ،** $a_n \le b_n$ **. در این صورت ،**
(یک) اگر $\sum b_n$ **همگرا باشد ،** $\sum a_n$ **نیز چنین است ؛**
(دو) اگر $\sum a_n$ **واگرا باشد ،** $\sum b_n$ **نیز چنین است .**

برهان . می‌توان فرض کرد که به ازای هر n ، $a_n \le b_n$ ، زیرا همانطور که در صفحهٔ ۸۱۳ نشان دادیم ، دو سری که فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق دارند یا هر دو همگرا هستند یا هر دو واگرا . فرض کنیم مجموعهای جزئی n م $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به ترتیب s_n و t_n باشند . در این صورت ، به ازای هر n ،

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \le b_1 + \cdots + b_n = t_n$$

هرگاه $\sum b_n$ همگرا با مجموع T باشد ، آنگاه به ازای هر n ، $t_n \le T$ (چرا ؟) ؛ و لذا ، چون $s_n \le t_n$ به ازای هر n خواهیم داشت $s_n \le T$ ؛ درنتیجه ، دنبالهٔ $\{s_n\}$ دارای کران بالایی می‌باشد . پس از قضیهٔ ۴ نتیجه می‌شود که $\sum a_n$ نیز همگراست . درهمین‌وضع هرگاه $\sum a_n$ واگرا باشد ، آنگاه $\sum b_n$ نیز چنین است زیرا ، همانطور که لحظه‌ای‌پیش نشان داده شد ، همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب خواهد کرد .

گوییم سری $\sum b_n$ بر سری $\sum a_n$ *مسلط‌است* اگر به ازای n های به قدر کافی بزرگ، $b_n \ge a_n$. لذا ،طبق قضیهٔ ۵ ،**هر سری تحت تسلط یک سری همگرا خود همگراست ولی هر سری مسلط بر یک سری واگرا خود واگراست** . در اینجا ، مثل جاهای دیگر در این بخش، سری مورد نظر نامنفی گرفته می‌شود .

مثال ۴ . سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad (۳)$$

(بنابرتعریف ، $0! = 1$) تحت تسلط سری

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \qquad (۴)$$

است . برای‌تحقیق این‌امر ملاحظه‌می‌کنیم که‌اگرچه‌نامساوی $n! > 2^n$ به ازای $n = 0, 1, 2, 3$ برقرار نیست ، به ازای هر $n \ge 4$ برقرار است ؛ درنتیجه ، هر جملهٔ سری (۳) باشروع از

جملهٔ پنجم از جملهٔ نظیردرسری (۴)کوچکتراست .اماسری (۴) همگراست ، زیرا از جملهٔ دوم به بعد یک سری هندسی باقدرنسبت $\frac{1}{2}$ است؛و در واقع ، مجموع آن 3 می‌باشد . بنابر این ، طبق آزمون مقایسه ، سری (۳) نیز همگراست و ، همانطور که در مثال ۵ ، صفحهٔ ۸۷۰ نشان داده شده است ، مجموعش مساوی e می‌باشد .

مثال ۵ . فرض کنیم p عددی کوچکتر از 1 باشد . چون $1^p = 1$ و n^x یک تابع صعودی‌از x به ازای $n \geq 2$ است ، داریم

$$n^p \leq n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

یا معادلاً

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

بنابراین ، اگر $p < 1$ ، سری

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots,$$

به نام سری p ، بر سری توافقی واگرای

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

مسلط است ؛ و درنتیجه ، بنابر قضیهٔ ۵ ، خود واگرا می‌باشد . در واقع ، سری p واگـراست اگر $p \leq 1$ ، زیرا به ازای $p = 1$ به سری توافقی تحویل می‌یابد . در مثال ۱۰ نشان داده شد که سری p همگراست‌اگر $p > 1$. از قضیهٔ۵ می‌توان‌آزمون‌مقایسهٔ مفیدتری‌را نتیجه گرفت .

آزمون مقایسهٔ حد .

قضیهٔ ۶ (آزمون مقایسهٔ حد) . *فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند به‌طوری که*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \qquad (۵)$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز است . در این صورت ، همگرایی $\sum b_n$ همگـرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 \leq L < \infty$ ، حال آنکه واگرایی $\sum b_n$ واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب‌می‌کند اگر $L > 0$ یا $L = \infty$. بخصـوص ، اگر L عدد مثبتی باشد ، دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یاهر دو همگرایند یا هر دو واگرا .

برهان . چون a_n و b_n مثبت‌اند ، نسبت a_n/b_n و متقابل آن b_n/a_n به ازای هر n تعریف شده‌اند . فرض کنیم (۵) برقرار بوده و $0 \le L < \infty$ (حاجت به گفتن نیست که L نمی‌تواند منفی باشد) . در این صورت ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N هست به طوری که

$$\frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$

یا معادلا" ، به ازای هر $n > N$ ،

$$a_n < (L + \varepsilon)b_n.$$

اگر $\sum b_n$ همگرا باشد ، سری نامنفی $\sum (L + \varepsilon)b_n$ ، حاصل‌از ضرب جملات $\sum b_n$ در عامل مثبت $L + \varepsilon$ ، همگراست (ر.ک. صفحهٔ ۸۱۲) ، و سپس همگرایی $\sum a_n$ از آزمون‌مقایسهٔ معمولی نتیجه‌می‌شود (قضیهٔ۵) . از آن سو ، هرگاه $\sum b_n$ واگرا بوده‌و $L > 0$ یا $L = \infty$ آنگاه ، چون نسبت متقابل b_n/a_n با رفتن $n \to \infty$ به حدی نامنفی نزدیک می‌شود (0 اگر $L = \infty$) ، سری $\sum a_n$ نیز واگراست ، زیرا در غیر این صورت ، همانطور که لحظه‌ای قبل نشان داده شد ، $\sum b_n$ همگراست که با فرض متناقض می‌باشد .

مثال ۶ . فرض کنیم

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad b_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

درنتیجه ، $\sum a_n$ سری p به ازای $p = 2$ است ، و $\sum b_n$ سری مطرح شده در مثال ۴ ، صفحهٔ ۸۰۸ است . در این صورت ، $\sum b_n$ همگرا (با مجموع 1) است ، و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

بنابراین ، طبق قضیهٔ ۶ ، سری $\sum a_n = \sum (1/n^2)$ نیز همگراست . خواهیم دید که مجموع این سری $\pi^2/6$ می‌باشد .

مثال ۷ . با استفاده از قضیهٔ ۶ می‌توان برهان دیگری از همگرایی سری توافقی $\sum (1/n)$ به دست آورد . فرض کنیم

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

در این صورت ، همانطور که در مثال ۵ ، صفحهٔ ۸۰۹ ، به آسانی نشان داده شد ، $\sum a_n$ واگراست و ، به کمک جانشانی $u = 1/x$ و قاعدهٔ هوپیتال ،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u\to 0^+}\frac{D_u \ln(1+u)}{D_u u} = \lim_{u\to 0^+}\frac{1}{1+u} = 1.$$

بنابراین ، طبق قضیهٔ ۶ ، سری $\sum b_n$ ، یعنی سری توافقی ، نیز واگرا می‌باشد .

مثال ۸ . آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \qquad (۶)$$

همگراست یا واگرا؟

حل . تقریب

$$\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \approx \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

به ازای n های بزرگ تقریب خوبی است ، و چون $1/\sqrt{n} \ge 1/n$ ، از این تقریب معلوم می‌شود که سری (۶) بر سری توافقی واگرا مسلط است؛ و درنتیجه ، خود واگرا می‌باشد . لذا ، سری (۶) را با سری توافقی مقایسه می‌کنیم :

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{\sqrt{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \infty,$$

و چون $\sum b_n$ سری توافقی واگراست ، از قضیهٔ ۶ معلوم می‌شود که سری $\sum a_n$ ، یعنی سری (۶) ، نیز واگرا می‌باشد .

مثال ۹. آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}} \tag{۷}$$

همگراست یا واگرا ؟

حل. تقریب

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}} \approx \frac{2n}{\sqrt{n^6}} = \frac{2}{n^2}$$

به ازای n های بزرگ تقریب خوبی است ،و پیشنهاد می‌کند که سری (۷) باسری $\sum(1/n^2)$ که همگرایی آن در مثال ۶ ثابت شد ، مقایسه شود . لذا ، اختیار می‌کنیم

$$a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

در این صورت ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = 2,$$

و چون $\sum b_n = \sum(1/n^2)$ همگراست ، از قضیهٔ ۶ معلوم می‌شود که سری $\sum a_n$ ، یعنی سری (۷) ، نیز همگرا می‌باشد .

آزمون انتگرال. ما قبلاً " به تشابه بین سریهای نامتناهی و انتگرالهای مجازی اشاره کرده‌ایم (ر.ک. صفحهٔ ۸۰۶) . با آزمون همگرایی بعدی اغلب می‌توان همگرایی یا واگرایی یک سری نامتناهی را از انتگرال مجازی مربوط به آن نتیجه گرفت .

قضیهٔ ۷ (آزمون انتگرال). *فرض کنیم $f(x)$ یک تابع مثبت پیوسته باشد که بر بازهٔ $1 \le x < \infty$ نزولی است ، و به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $a_n = f(n)$. در این صورت ، سری*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

و انتگرال مجازی

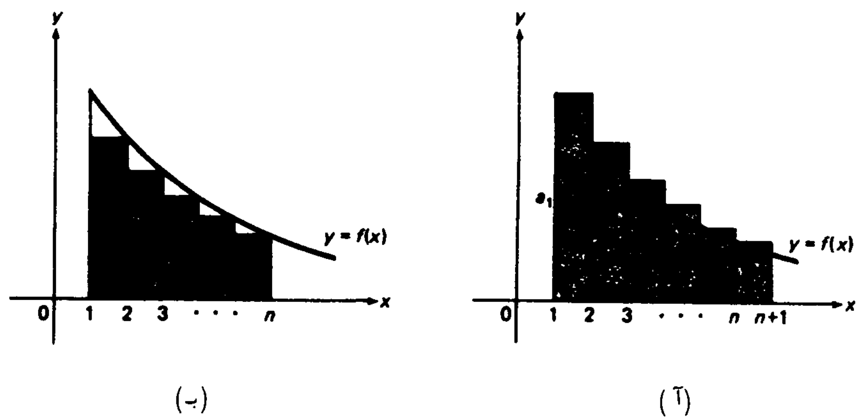
$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx \tag{۸}$$

یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

برهان. در شکل ۱۰ (آ) مساحت تحت منحنی $y=f(x)$ از $x=1$ تا $x=n+1$ کمتراز مساحت کل مستطیلهای محیطی سایه‌دار است؛ و لذا،

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s_n, \tag{۹}$$

که در آن s_n مجموع جزئی n م سری $\sum a_n$ است. در شکل ۱۰ (ب) کمی متفاوت، مساحت



شکل ۱۰

تحت منحنی $y=f(x)$ از $x=1$ تا $x=n$ از مساحت کل مستطیلهای محاطی سایه‌دار بزرگتر است؛ درنتیجه، این بار

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)\,dx. \tag{۹'}$$

فرض‌کنیم انتگرال مجازی (۸) واگرا باشد. در این صورت، چون $f(x)$ مثبت است، این فقط می‌تواند به این معنی باشد که حد مذکور در (۸) مساوی ∞ است. لذا، طرف چپ (۹) با رفتن $n\to\infty$ به ∞ نزدیک می‌شود؛ و درنتیجه، طرف راست s_n نیز چنین می‌کند؛ یعنی، $\sum a_n$ واگرا می‌باشد. از آن سو، فرض‌کنیم انتگرال (۸) همگرا با حد L

باشد . در این صورت ، به خاطر (۹') ، به ازای هر n ،

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < a_1 + \int_1^n f(x)\,dx < a_1 + L$$

درنتیجه ، مجموعهای جزئی سری نامنفی $\sum a_n$ کران بالایی دارند . اما در این صورت ، بنابر قضیهٔ ۴ ، $\sum a_n$ همگرا می‌باشد .

اگر $\sum a_n$ یک سری با جملهٔ عمومی a_n باشد که با فرمول صریحی داده شده است ، ساده‌ترین راه برای یافتن تابع $f(x)$ که $f(n) = a_n$ تعویض n با x در فرمول مربوط به a_n است . اگر تابع حاصل بر $[1, \infty)$ پیوسته ، مثبت ، و نزولی باشد ، آزمون انتگرال قابل‌به کار بردن خواهد بود .

مثال ۱۰ . نشان دهید که سری p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگراست .

حل . از تعویض x با n در جملهٔ عمومی سری ، تابع مثبت پیوستهٔ $1/x^p$ به دست می‌آید که اگر $p > 0$ بر $[1, \infty)$ نزولی است ؛ درنتیجه ، آزمون انتگرال قابل‌اعمال است . به‌ازای $p = 1$ ، $1/x^p$ به صورت $1/x$ درمی‌آید و

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \to \infty} \ln x \Big|_1^u = \lim_{u \to \infty} \ln u = \infty,$$

حال آنکه به ازای $0 < p < 1$ یا $p > 1$ ،

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^u = \lim_{u \to \infty} \left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right).$$

اما ، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود ،

$$\lim_{u \to \infty} \left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{، اگر } p > 1 \\ \infty & \text{، اگر } 0 < p < 1 \end{cases}$$

بنابراین ، طبق آزمون انتگرال ، سری p همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $0 < p \leq 1$. (توجه کنید که برهان دیگری از واگرایی سری توافقی به دست آمده است .) اگر $p \leq 0$ ،

جملهٔ n م $1/n^p$ با رفتن $n \to \infty$ بــه 0 نزدیک می‌شود ، و سری p طبق قضیهٔ ۳ ، صفحهٔ ۸۱۱ ، واگراست . از تلفیق این حالات ، بالاخره معلوم می‌شود که سری p همگــراست اگــر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$.

مثال ۱۱ . سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

طبق آزمون انتگرال واگراست ، زیرا انتگرال مجازی مربوطه واگرا می‌باشد :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{u \to \infty} \int_2^{u} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{u \to \infty} \ln(\ln x)\Big|_2^{u} = \lim_{u \to \infty} [\ln(\ln u) - \ln(\ln 2)] = \infty.$$

در اینجا چون $1/(n \ln n)$ به ازای $n = 1$ تعریف نشده است ، برای حد جمعبندی پایینی و حد انتگرالگیری پایینی به جای 1 عدد 2 را اختیار می‌کنیم .

مثال ۱۲ . سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

بنابر آزمون انتگرال همگراست ، زیرا انتگرال مجازی مربوطه همگراست :

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{u \to \infty} \int_2^{u} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{u \to \infty} \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{u} = \lim_{u \to \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln u}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

مسائل

عدد گویا به شکل تحویل‌ناپذیر را بیابید که اعشاری مکرر داده شده نمایش آن باشد .

۱ . $0.4\overline{9}$ ۲ . $3.\overline{79}$ ۳ . $0.\overline{215}$

۴ . $6.3\overline{63}$ ۵ . $4.000\overline{72}$ ۶ . $0.0\overline{544}$

۷ . $0.\overline{047619}$ ۸ . $0.0\overline{384615}$ ۹ . $5.10\overline{285714}$

۱۰ . تحقیق کنید که هر عدد اعشاری مختوم به بی‌نهایت ۹ نمایش همان عدد گویایی است که عدد اعشاری مختوم " بلافاصله پس از آن " نشان می‌دهد ، مثلا $0.\overline{9} = 1$ ، $1.325\overline{9} = 1.326$ ، و از این قبیل .

با استفاده از آزمونهای مقایسه (قضیهٔ ۵ یا ۶) همگرایی یا واگرایی سری داده شده را تعیین کنید .

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3}$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)(n+4)}$

۱۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4-n^2+1}{5n^6-n^3-2}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)(n+4)}}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n} \quad (c>1)$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{100n-99}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

۳۰. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2-5}$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n}+1)^3}$

۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

۳۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+c^n} \quad (c>0)$

با استفاده از آزمون انتگرال (قضیهٔ ۷)، معین کنید که سری داده شده همگرا است یا واگرا.

۳۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

۳۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$

۳۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

۳۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$

۳۹. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-6}$

۴۰. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-3}$

۴۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

۴۲. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$

۴۳. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/2}$

۴۴. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

۴۵. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}$

۴۶. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

۴۷. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)}$

۴۸. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

۴۹. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\, [\ln(\ln n)]^2}$

۵۰. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} \sinh n$

۵۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$

۵۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch}^2 n$

۵۳. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری نامنفی همگرا باشد. نشان دهید که سری $\sum a_n^2$ نیز همگرا است.

۵۴. فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی همگرا باشند. نشان دهید که سری $\sum a_n b_n$ نیز همگراست.

۵۵. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری نامنفی همگرا باشد. در صورت وجود حد

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \qquad \text{(یک)}$$

سری نامنفی همگرای $\sum a_n$ را طوری بیابید که در (یک) صدق نکند.

۵۶. نشان دهید که هر سری نامنفی همگرا که در آن $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد در (یک) صدق می‌کند.

۵۷. اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ نزولی بوده و در شرط (یک) صدق کند، آیا سری نامنفی $\sum a_n$ همگراست؟

۵۸. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ نزولی از اعداد مثبت باشد. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

همگراست اگر و فقط اگر سری مربوطهٔ

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots$$

همگرا باشد . این نتیجه به **آزمون تراکم‌کشی** معروف است .

راهنمایی . فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م $\sum a_n$ باشد . تحقیق کنید که‌اگر $n < 2^k$ ، $s_n \le a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^{k-1}}$ ، حال آنکه اگر $n > 2^k$ ، $s_n \ge \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k})$.

۵۹ . با استفاده از آزمون تراکم‌کشی ، نشان دهید که سری p همگراست اگـر $p > 1$ وواگـرا است اگـر $p \le 1$ ،و این قبلا" به‌وسیلهٔ آزمون انتگرال در مثال ۱۰ ثابت شده‌است.

۶۰ . با استفاده از آزمون تراکم‌کشی ، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \le 1$ (این امر مثالهای ۱۱ و ۱۲ را تعمیـم می‌دهد) .

۶۱ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$$

به ازای هر مقدار p واگراست .

۶۲ . نشان دهید که سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln (\ln n)]^{\ln n}} \quad \text{و} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

هر دو همگرایند ، اما سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln (\ln n)}}$$

واگرا می‌باشد .

۴.۹ همگرایی مطلق و مشروط

سری به‌طور مطلق همگرا . بخش پیش به بررسی سریهای نامنفی ، یعنی سریهایی کـه تمام جملاتشان اعدادی نامنفی‌اند ، اختصاص داشت . حال به مطالعهٔ سریهای دلخواه (مثل بخش ۲.۹) پرداخته ، اجازه می‌دهیم سری مورد نظر جملات مثبت و منفی داشته‌باشد. گوییم سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

به‌طور مطلق همگراست اگر سری مربوطهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots, \tag{1'}$$

که جملاتش قدرمطلقهای جملات (۱) اند ، همگرا باشد . توجه کنید که این مفهوم جدید نقشی در نظریهٔ سریهای نامنفی ندارد ، زیرا اگر به ازای هر n ، $a_n \geq 0$ ، سریهای (۱) و (۱') یکی خواهند بود . اهمیت واقعی همگرایی مطلق فقط در رابطه با سریهایی است که هم‌جملهٔ مثبت و هم جملهٔ منفی (و در واقع ، بی‌نهایت جمله از هر علامت) دارند،زیرا یک سری همگرا از این نوع ممکن است به‌طور مطلق همگرا باشد یا نباشد . به طور دقیقتر ، همانطور که لحظه‌ای بعد خواهیم دید ،باآنکه یک سری به‌طور مطلق همگرا باید همگرا باشد ، یک سری می‌تواند بدون همگرای مطلق بودن همگرا باشد .

مثال ۱ . سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots \tag{2}$$

همگرا با مجموع

$$\frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{3}{5}$$

است (در مثال ۱ ، صفحهٔ ۸۰۶ ، قرار می‌دهیم $a = 1, r = -\frac{2}{3}$). همچنین ، این سری به طور مطلق همگراست ، زیرا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots \tag{2'}$$

سری هندسی همگرای دیگری است ، این بار نامنفی با مجموع

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

میزان بزرگتر بودن مجموع دوم از مجموع اول را چگونه توضیح می‌دهید ؟

مثال ۲ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \tag{3}$$

به نام ***سری توافقی متناوب*** ، به‌طور مطلق همگرا نیست ، زیرا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \qquad (۳')$$

سری توافقی معمولی است ، که البته واگراست . علی‌رغم اینکه سری (۳) به‌طور مطلق همگرا نیست ولی همگراست . این امر در مثال ۴ به کمک یک آزمون همگرایی خاص نشان داده‌شده است .

سریهای به‌طور مشروط همگرا . همانطور که در ابتدای بخش گفتیم و با آخرین مثال نشان دادیم ، سریهایی وجود دارند که بدون همگرای مطلق همگرا می‌باشند . یک چنین سری را *به طور مشروط همگرا* می‌نامند . وجود سری به‌طور مشروط همگرا نشان می‌دهد که *همگرایی همگرایی مطلق را ایجاب نمی‌کند* . از آن سو ، همانطور که قضیهٔ بعد نشان می‌دهد ، *یک سری به‌طور مطلق همگرا باید همگرا باشد* .

قضیهٔ ۸ (همگرایی مطلق همگرایی را ایجاب می‌کند) . *فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری باشد به طوری که $\sum |a_n|$ همگرا باشد . در این صورت ، $\sum a_n$ نیز همگرا می‌باشد .*

برهان . فرض کنیم $\sum |a_n|$ همگرا باشد . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|) \qquad (۴)$$

نامنفی است ، زیرا

$$a_n+|a_n| = \begin{cases} 2a_n = 2|a_n| \quad ، & a_n \ge 0 \text{ اگر} \\ 0 \quad ، & a_n < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

و به‌علاوه (۴) تحت تسلط سری نامنفی همگرای $\sum 2|a_n|$ می‌باشد . از آزمون مقایسه (قضیهٔ ۵ ، صفحهٔ ۸۲۴) نتیجه می‌شود که سری (۴) نیز همگراست . اما در این صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+|a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

نیز چنین است ، زیرا تفاضل بین دوسری همگرا همگراست (ر.ک. صفحهٔ ۸۱۲) .

مثال ۳ . سری

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\cdots \qquad (۵)$$

را درنظر می‌گیریم که از سری هندسی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots \tag{۵'}$$

به‌وسیلهٔ تغییر یک درمیان علایم از جملات‌سوم و چهارم به‌بعد به‌دست آمده است . چون سری (۵') همگرا (با مجموع 2) است ، سری (۵) به‌طور مطلق همگراست؛ و درنتیجه ، بنابر قضیهٔ ۸ ، همگرا نیز هست . به عنوان تمرین ، نشان دهید که مجموع این‌سری‌هندسی تعدیل شده $\frac{4}{5}$ است .

سریهای متناوب . گوییم یک سری نامتناهی **متناوب** است اگر جملاتش به تناوب مثبت‌ومنفی باشند یعنی ، اگر جملات متوالی همواره مختلف‌العلامه باشند . لذا ، سری(۲) و (۳) مثالهای ۱ و ۲ متناوبند ولی سری (۵) در مثال قبل متناوب نیست ، زیرا شامل (بی‌نهایت) جفت جملات متوالی همعلامت می‌باشد . واضح است که هر سری متناوب را می‌توان به یکی از دو شکل زیر نوشت :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots,$$

که در آن اعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ همه مثبت می‌باشند . توجه کنید که در شکل اول می‌توان به جای $(-1)^{n-1}a_n$ نوشت $(-1)^{n+1}a_n$.

آزمون سری متناوب . برای سریهای متناوب یک آزمون همگرایی خاص مهم وجود دارد که‌به لایب‌نیتز منسوب است :

قضیهٔ ۹ (آزمون سریهای متناوب با تخمین خطا) . *هرگاه $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ اکیداً "نزولی از اعداد مثبت باشد به‌طوری که*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0, \tag{۶}$$

آنگاه سری متناوب

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots \tag{۷}$$

همگراست . فرض کنیم $R_n = S - s_n$ خطای حاصل از تقریب مجموع S سری (۷) به وسیلهٔ مجموع جزئی n م آن باشد؛ یعنی ، فرض کنیم

$$R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \cdots \tag{۸}$$

باقیمانده پس از n جملهٔ سری (۷) باشد . در این صورت ، قدرمطلق R_n از اولین جملهٔ استفاده نشده در تقریب $S \approx s_n$ کوچکتر بوده و علامت این جمله را خواهد داشت؛ یعنی، $|R_n| < a_{n+1}$ و R_n با $(-1)^n a_{n+1}$ همعلامت است (این‌همان علامت $(-1)^n$ را دارد زیرا a_{n+1} مثبت است) .

برهان . شرط (۶) باید اعمال شود ، زیرا در غیر این صورت سری (۷) واگـرا خواهد بود (چرا؟) . فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م سری باشد . در این صورت ؛ مجموعهای جزئی s_{2k} با اندیس زوج را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$s_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}),$$

که طرف راست مجموعی از اعداد مثبت است ، زیرا $a_n > a_{n+1}$ ؛ و درنتیجه ، به ازای هر n $a_n - a_{n+1} > 0$. لــذا ، مجموعهای جزئی با اندیس زوج همه مثبت‌اند ، و دنبالهٔ اکیداً صعودی $s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$ را تشکیل می‌دهند . این دنباله کراندار نیز هست ، زیرا

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} < a_1$$

(اعداد تفاضلی $a_2 - a_3, \ldots, a_{2k-2} - a_{2k-1}, a_{2k}$ همه مثبت‌اند) . بنابراین ، طبق قضیهٔ ۲ ، صفحهٔ ۷۹۶ ، دنبالهٔ $s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$ دارای حد متناهی S است؛ یعنی ،

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = S,$$

که در آن S بوضوح مثبت می‌باشد . برای مجموعهای جزئی با اندیس فرد داریم

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1},$$

و درنتیجه ، به‌خاطر (۶) ،

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k} = S + 0 = S.$$

چون مجموعهای جزئی با اندیس زوج و اندیس فرد به همان حد S نزدیک می‌شوند، سری (۷) همگرا با مجموع S است ، و سری (۸) به همان دلیل صفحهٔ ۸۱۳ همگرا می‌باشد .

برای اثبات تخمین خطا ملاحظه می‌کنیم که خطا یا باقیماندهٔ R_n را می‌توان به شکل

زیر نوشت:

$$R_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots),$$

که در آن سری داخل پرانتز به یک مجموع مثبت همگراست، زیرا یک سری متناوب از نوع سری اصلی (۷) می‌باشد. بنابراین، R_n با $(-1)^n$ همعلامت است، و

$$\begin{aligned}|R_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \cdots\\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots < a_{n+1},\end{aligned}$$

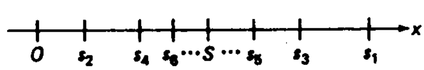
که در آن نامساوی از مثبت بودن اعداد تفاضلی $a_{n+2} - a_{n+3}, a_{n+4} - a_{n+5}, \ldots$ به‌دست می‌آید.

به آسانی معلوم می‌شود که هرگاه $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ اکیدا" نزولی از اعداد مثبت در شرط (۶) صدق کند، آنگاه سری متناوب

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots, \qquad (۷')$$

که به جای a_1 با $-a_1$ شروع می‌شود، نیز همگراست با مجموع S' که مساوی قرینهٔ مجموع S سری (۷) می‌باشد. این نتیجهٔ فوری این امر است که سری (۷') حاصل ضرب سری (۷) در -1 می‌باشد. به عنوان تمرین، نشان دهید هرگاه R'_n باقیمانده پس از n جملهٔ سری (۷') باشد، آنگاه $|R'_n| < a_{n+1}$ و R'_n با $(-1)^{n+1}a_{n+1}$، یعنی $(-1)^{n+1}$، همعلامت می‌باشد.

برهان قضیهٔ ۹ ظاهرا" پیچیده است، ولی معنی شهودی آن کاملا" ساده می‌باشد. فرض کنید مجموعهای جزئی $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ سری متناوب (۷) را بر خط اعداد مثل شکل ۱۱ رسم کرده باشیم. در این صورت، s_1 سمت راست O قرار دارد زیرا $s_1 = a_1 > 0$،



شکل ۱۱

s_2 سمت چپ s_1 است زیرا $s_2 - s_1 = -a_2 < 0$، s_3 سمت راست s_2 است زیرا $s_3 - s_2 = a_3 > 0$، s_4 سمت چپ s_3 است، زیرا $s_4 - s_3 = -a_4 < 0$، و تاآخر. (چرا هر مجموع جزئی s_n سمت راست مبداء قرار دارد؟) همچنین، همانطور که شکل نشان می‌دهد، مجموعهای جزئی $s_2, s_4, \ldots$ با اندیس زوج یک دنبالهٔ صعودی تشکیل می‌دهند، حال آنکه مجموعهای جزئی $s_1, s_3, \ldots$ با اندیس فرد یک دنبالهٔ نزولی تشکیل می‌دهند. هر دو دنباله کراندار و یکنوایند؛ و درنتیجه، همگرا می‌باشند؛ به‌علاوه، باید حد یکسان

S را داشته باشند، زیرا جملات دو دنباله با رفتن $n \to \infty$ به هم نزدیک می‌شوند (توجه کنید که وقتی $n \to \infty$ ، $|s_{n+1} - s_n| = a_{n+1} \to 0$) واضح است که s_n سمت چپ S است اگر n زوج باشد و سمت راست S است اگر n فرد باشد؛ و درنتیجه، باقیماندهٔ $R_n = S - s_n$ با زوج بودن n مثبت و با فرد بودن n منفی می‌باشد. اما، دراین‌صورت. R_n بـا $(-1)^n a_{n+1}$ همعلامت است، زیـرا $(-1)^n a_{n+1}$ با زوج بودن n مثبت و فرد بودن n منفی می‌باشـد. بالاخره، چون S بین هر جفت مجموع جزئی متوالی s_n و s_{n+1} قـرار دارد، نتیجه می‌شود که

$$|R_n| = |S - s_n| < |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}.$$

مثال ۴. اگر $p > 0$ ، دنبالهٔ $\{1/n^p\}$ اکیدا" نزولی و همگرا به 0 است. بنابراین، طبق قضیهٔ ۹، سری متناوب

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{۹}$$

همگرا می‌باشد. اگر $p > 1$ ، سری به‌طور مطلق همگراست، زیرا سری

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots, \tag{۹'}$$

که جملاتش قدرمطلق جملات سری متناوب (۹) اند، یک سری p همگرا می‌باشد. امـا اگر $0 < p \le 1$ ، ســری (۹') یک سری p واگراست، و در این حالت سری (۹) به‌طور مطلق همگرا نبوده بلکه فقط به‌طور مشروط همگرا می‌باشد. به ازای $p = 1$ سری توافقی متناوب

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

به دست می‌آید که قبلا" در مثال ۲ مورد بحث قرار گرفت. خواهیم دید که مجمـوع این سری به‌طور مشروط همگرا $\ln 2$ است (ر.ک. مثال ۷، صفحهٔ ۸۷۳).

مثال ۵. سری متناوب

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots \tag{۱۰}$$

در شرایط قضیهٔ ۹ صدق می‌کند؛ و لذا، همگراست. اما سری

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots, \tag{۱۰'}$$

که جملاتش قدرمطلق جملات سری (۱۰)اند، واگرا می‌باشد. در واقع،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/(2n-1)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

درنتیجه، واگرایی (۱۰′) از واگرایی $\sum(1/n)$ [به کمک آزمون مقایسهٔ حد (قضیهٔ ۶، صفحهٔ ۸۲۵)] نتیجه می‌شود. لذا، سری (۱۰) به‌طور مشروط همگرا می‌باشد. در مثال۸، صفحهٔ ۸۷۴، نشان خواهیم داد که مجموع این سری $\pi/4$ است.

مثال ۶. سری متناوب

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots \tag{۱۱}$$

بنابر قضیهٔ ۹ همگراست، ولی همگرایی آن از همگرایی مطلقش نیز نتیجه می‌شود زیرا، همانطور که در مثال ۴، صفحهٔ ۸۲۴، نشان‌دادیم، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots \tag{۱۱′}$$

همگرا می‌باشد. به‌کمک قسمت‌دوم قضیهٔ ۹ می‌توان خطای ناشی از تقریب مجموع‌سری (۱۱) با مجموع n جملهٔ اول آن را تخمین زد. مثلاً، فرض‌کنیم S مجموع (۱۱) بوده، و 8 جملهٔ اول را نگه می‌داریم:

$$S=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+R_8.$$

در این صورت، $1/8!$ اولین جملهٔ به کار نرفته است؛ درنتیجه، R_8 مثبت بوده و از $1/8!=0.0000248\ldots$ کوچکتر است، حال آنکه

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}=\frac{1854}{5040}=\frac{103}{280}=0.367857\ldots.$$

لذا، می‌توان نتیجه گرفت که خطای تقریب $S\approx 103/280$ مثبت و کوچکتر از 0.000025 می‌باشد. در واقع، همانطور که در مثال۵، صفحهٔ ۸۷۱، نشان داده شد، $S=e^{-1}=0.367879\ldots$.

آزمون سری متناوب (قضیهٔ ۹) در صورت نزولی بودن $\{a_n\}$ (ولی نه‌*اکیداً* "نزولی) برقرار است اگر تخمین خطا از $|R_n|<a_{n+1}$ به $|R_n|\le a_{n+1}$ تغییر نماید. برهان‌تعدیل جزئی برهان برای $\{a_n\}$ اکیداً" نزولی است و به عنوان تمرین گذارده می‌شود.

مثال ۷. دنبالهٔ

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$$

نزولی است ولی اکیدا" نزولی نیست. سری متناوب مربوطهٔ

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots$$

به‌طور مشروط به مجموع 0 همگراست، و باقیماندهٔ R_n به ازای n زوج مساوی 0 و به ازای n فرد برابر اولین جملهٔ به کار نرفته می‌باشد.

مثال ۸. مجموع $2n$ جملهٔ اول سری متناوب

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots \tag{۱۲}$$

دوبرابر مجموع جزئی n م سری توافقی واگراست، زیرا

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

لذا، سری (۱۲) نیز (با آنکه وقتی $n \to \infty$ ، $a_n \to 0$) واگرا می‌باشد. این آزمون سری متناوب را نقض نمی‌کند، زیرا دنبالهٔ $\{a_n\}$ نزولی نیست. در واقع، همانطور که به آسانی تحقیق می‌شود، به ازای $k = 1, 2, \dots$ ، a_{2k+1} از a_{2k} متجاوز می‌باشد.

تبصره. نباید این تصور پیش آید که یک سری متناوب که در شرایط قضیهٔ ۹ صدق نمی‌کند لزوما" واگراست. مثلا"، سری

$$2 - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{2}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots,$$

حاصل از سری $\sum (-1)^{n-1} (1/n^2)$ به‌وسیلهٔ ضرب تمام جملات با اندیس فرد در 2 (از

طریق مقایسه با سـری $(\sum (2/n^2))$ به‌طورمطلق همگراست ، ولی قدرمطلق هر جمله باانديس فرد از جملهٔ پنجم به بعد از جملهٔ قبلی بزرگتر می‌باشد .

آرایش مجدد سریها . ***اگر یک‌سری به‌طور مطلق همگرا باشد ، می‌توان جملاتش را بدون‌تغییر مجموع سری بدلخواه آرایش کرد ،ولی‌اگر سری به‌طور مشروط همگرا باشد ،جملاتشرا می‌توان طوری آرایش کرد که سری جدید هر مجموعی را داشته باشد!*** اثبات این حکم ازحوصلهٔ یک درس مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است ، ولی می‌توان آن را دریک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت . لذا ، به بیان کیفی ، همگرایی مطلق یک سری ناشی از کوچکی ذاتی جملاتش است؛ درنتیجه ، سری حتی اگر تمام جملاتش با قدر مطلق آنها عوض شوند ، همگرا می‌ماند ، ولی همگرایی مشروط یک سری فقط به خاطر "مزیت"حذف دوبه‌دو جملات مثبت و منفی است؛ و لذا ، به ترتیب آمدن این جملات بستگی دارد . در واقع ، می‌توان تجدید آرایشهای ***واگرایی***از یک سری به‌طور مشروط همگرا پیدا نمود .

مثال ۹ . فرض کنیم S مجموع سری توافقی متناوب به‌طور مشروط همگرای

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

باشد (همانطور که در مثال ۴ گفتیم ، $S=\ln 2 \approx 0.693$) . تجدید آرایشی از این سری بیابید که مجموعش $\frac{1}{2}S$ باشد .

حل . چون

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots.$$

امـــا درج هر تعداد صفر بین جملات سری اثری بر همگرایی یا مقدار مجموع آن ندارد؛ و لذا ،

$$S=1+0-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+0-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+0-\frac{1}{6}+\cdots, \tag{۱۳}$$

$$\frac{1}{2}S=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots. \tag{۱۳'}$$

از تفریق جمله به جملهٔ دوسری، یعنی تفریق هر جملهٔ (۱۳) از جملهٔ (۱۳)که دربالای آن قرار دارد، تجدید آرایش مطلوب به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots.$$

مسائل

معین کنید که سری داده‌شده (با جملات مثبت و منفی) به‌طور مطلق همگرا، به‌طورمشروط همگرا، همگرا، یا واگراست. درحالتی که سری با دادن چند جملهٔ اولیه مشخص‌شده‌است، فرض کنید قانون تشکیل برآمده از این جملات به ازای جمیع جملات سری برقرار باشد.

۱. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots$

۲. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$

۵. $\frac{1}{8} - \frac{2}{12} + \frac{3}{16} - \frac{4}{20} + \cdots$

۶. $\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} - \frac{1}{5\ln 5} + \cdots$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$

۹. $1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{201} - \frac{1}{301} + \cdots$

۱۰. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \cdots$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{2n}}$

۱۲. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n+1}{n}$

۱۵. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} - \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots$

۱۶. $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\cdots$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^n$

۱۸. $1+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{49}-\dfrac{1}{64}+\cdots$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi/2)}{n}$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\sin(2n\pi/3)}{\sqrt{3}\,n}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{a}{n}\quad(a>0)$

۲۳. $a-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{4}a^4+\cdots\quad(a>0)$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n(n+1)}$

هر یک از سریهای زیر طبق آزمون سری متناوب (قضیهٔ ۹) همگراست . فرض کنید R_n باقیماندهٔ سری پس از n جمله ، یعنی خطای ناشی از تقریب مجموع سری به‌وسیلهٔ مجموع جزئی n م ، باشد . در مسائل ۲۵ تا ۲۹ علامت R_n را یافته و ، به ازای n داده شده ، یک کران بالایی برای $|R_n|$ پیدا نمایید . در مسائل ۳۰ تا ۳۴ کوچکترین مقداری از n را بیابید که به ازای آن R_n در نامساوی ذکرشده صدق نماید . (طبق معمول ، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از چندجملهٔ اول برای جمیع جملات سری برقرار باشد .)

۲۵. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots,\ n=99$

۲۶. $-1+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^4}-\cdots,\ n=5$

۲۷. $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!}+\cdots,\ n=6$

۲۸. $\dfrac{1}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 3}+\dfrac{1}{\ln 4}-\dfrac{1}{\ln 5}+\cdots,\ n=998$

$$-1+\frac{1}{3}-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}-\cdots, n=8$$ ۲۹.

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots, |R_n|<0.001$$ ۳۰.

$$1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots, |R_n|<0.0002$$ ۳۱.

$$\frac{1}{1!2!}-\frac{1}{2!3!}+\frac{1}{3!4!}-\frac{1}{4!5!}+\cdots, |R_n|<10^{-8}$$ ۳۲.

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots, |R_n|<0.0005$$ ۳۳.

$$-\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{4\cdot 2^3}-\frac{1}{5\cdot 2^4}+\frac{1}{6\cdot 2^5}-\cdots, |R_n|<0.0001$$ ۳۴.

۳۵. تجدید آرایش واگرایی از سری متناوب به‌طور مشروط همگرای

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

به دست آورید.

مجموع سری توافقی متناوب $\ln 2$ است. تجدید آرایشی از سری بیابید که مجموع زیر را داشته باشد.

۳۶. $\frac{3}{2}\ln 2$ ۳۷. $2\ln 2$ ۳۸. 0

۳۹. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت و همگرا به 0 بوده، و

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

یک‌سری (در حالت کلی واگرا) باشد که مجموعهای جزئی $B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ دنبالهٔ کرانداری چون $\{B_n\}$ بسازند. به کمک مسئلهٔ ۳۸، صفحهٔ ۳۶۶، نشان‌دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$$

همگراست. این آزمون همگرایی به **آزمون دیریکله** معروف است. نشان دهید که این آزمون سری متناوب را به عنوان حالتی خاص دربردارد.

همگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون دیریکله تحقیق نمایید.

$$1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{2}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{2}{15}+\frac{1}{17}-\cdots$$ ۴۰.

۴۱. $1+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{9}}+\cdots$

۴۲. $1-\frac{3}{2}-\frac{5}{3}+\frac{7}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{6}-\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{1}{9}-\frac{3}{10}-\frac{5}{11}+\frac{7}{12}+\cdots$

توجه کنید که هیچیک از این سریها متناوب نیست.

۵.۹ آزمونهای نسبت و ریشه

حال دو آزمون همگرایی دیگر را عرضه می‌کنیم. این آزمونها، که در جای خود مهمند، در بررسی سریهای توانی که از بخش بعد شروع می‌شود، ابزارهای لازمی می‌باشند.

آزمون نسبت

قضیهٔ ۱۰ (آزمون نسبت). فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L, \tag{1}$$

که در آن حالت $L=\infty$ مجاز است. در این صورت، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \le L < 1$ و واگراست اگر $L > 1$ یا $L=\infty$. آزمون به‌ازای $L=1$ بی‌حاصل می‌باشد.

برهان. فرض کنیم (۱) به ازای $0 \le L < 1$ برقرار باشد (حاجت به گفتن نیست که L نمی‌تواند منفی باشد)، و r عددی در بازهٔ باز $(L, 1)$ باشد. در این صورت، به‌خاطر (۱) به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$$

بنابراین،

$$|a_{N+1}| < |a_N|r,$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|r < |a_N|r^2,$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|r < |a_N|r^3,$$

و به‌طورکلی،

$$|a_{N+n}| < |a_N|r^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{۳}$$

درنتیجه،

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots < |a_N|r + |a_N|r^2 + |a_N|r^3 + \cdots$$
$$= |a_N|r(1 + r + r^2 + \cdots).$$

سری سمت راست همگراست، زیرا یک سری هندسی همگرا می‌باشد؛ و درنتیجه، بنابرآزمون مقایسه (ر.ک. قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۸۲۴)، سری سمت چپ نیز همگرا می‌باشد. اما، دراین صورت، $\sum |a_n|$ همگراست، زیرا حذف تعدادی متناهی جمله از یک‌سری بر همگرایی‌آن اثری ندارد. به عبارت دیگر، $\sum a_n$ به‌طور مطلق همگرا می‌باشد.

حال فرض کنیم $L > 1$ یا $L = \infty$، و r را عددی در بازهٔ باز $(1, L)$ می‌گیریم اگر $L > 1$ یا در بازهٔ $(1, \infty)$ می‌گیریم اگر $L = \infty$. به‌خاطر (۱)، عدد صحیحی مانند N وجود دارد به‌طوری که به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد،

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1$$

و با همان استدلال قبل که در آن نامساویها عکس شده‌اند، به جای (۲) به دست‌می‌آوریم

$$|a_{N+n}| > |a_N|r^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (۲')$$

اما، در این صورت،

$$|a_{N+n}| > |a_N| > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

که با شرط لازم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

برای همگرایی $\sum a_n$ ناسازگار است؛ درنتیجه، $\sum a_n$ واگرا می‌باشد.

بالاخره، برای نشان‌دادن اینکه آزمون به‌ازای $L = 1$ بی‌حاصل است، آن را درمورد سه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

به کار می‌بریم. در هر حالت $L = 1$، و به آسانی می‌توان تحقیق کرد که با آنکه سری اول به‌طور مطلق همگراست، دومی به‌طور مشروط همگرا و سومی واگرا می‌باشد.

البته، اگر سری $\sum a_n$ نامنفی باشد، واژهٔ " به‌طور مطلق " در صورت قضیه زایدبوده و می‌توان آن را حذف کرد، و در این حالت (۱) به

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \qquad (۱')$$

ساده می‌شود . آزمون نسبت خصوصاً " وقتی موٴثر است که جملهٴ n م a_n شامل فاکتوریل باشد ، چون در این صورت بسیاری از عوامل مشترک صورت و مخرج را می‌توان در محاسبهٴ نسبت $|a_{n+1}/a_n|$ حذف کرد .

مثال ۱ . در مثال ۴ ، صفحهٴ ۸۲۴ ، نشان داده شد که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

همگراست . این همگرایی از آزمون نسبت نیز نتیجه می‌شود ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

(در اینجا ، و در زیر ، a_n نمایش جملهٴ n م سری مورد نظر می‌باشد) .

مثال ۲ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$

به‌طور مطلق همگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \approx 0.37 < 1.$$

مثال ۳ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4 > 1.$$

مثال ۴ . حالت $L = \infty$ به‌وسیلهٴ سری $\sum n!$ توضیح داده شده است ، که از قبل می‌دانیم

واگراست (جملهٔ n م آن با رفتن $n \to \infty$ به 0 نزدیک نمی‌شود)؛ و در واقع ، آزمون نسبت در این سری نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

آزمون ریشه. برهان آزمون همگرایی زیر شبیه برهان آزمون نسبت است ، ولی عملاً" از آن ساده‌تر می‌باشد .

قضیهٔ ۱۱ (آزمون ریشه) . فرض کنیم سری $\sum a_n$ چنان باشد که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L, \tag{۳}$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز می‌باشد . در این صورت ، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \le L < 1$ و واگراست اگر $L > 1$ یا $L = \infty$. سری در حالت $L = 1$ بی‌حاصل خواهد بود .

برهان. اگر $0 \le L < 1$ ، r را عددی در بازهٔ باز $(L, 1)$ می‌گیریم . در این صورت ، به خاطر (۳) ، به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد ،

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$$

یا معادلاً"

$$|a_n| < r^n \qquad (n = N, N+1, \ldots). \tag{۴}$$

بنابراین ،

$$\begin{aligned} |a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots &< r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \cdots \\ &= r^N(1 + r + r^2 + \cdots), \end{aligned}$$

که در آن سری سمت راست یک سری هندسی همگراست . لذا ، طبق آزمون مقایسه ، $\sum |a_n|$ نیز همگراست؛ یعنی ، $\sum a_n$ به‌طورمطلق همگراست . اگر $L > 1$ یا $L = \infty$ ، r را عددی در بازهٔ $(1, L)$ می‌گیریم . در این صورت ، به جای (۴) ، داریم

$$|a_n| > r^n > 1 \qquad (n = N, N+1, \ldots), \tag{۴'}$$

درنتیجه ، دنبالهٔ $\{a_n\}$ به 0 نزدیک‌نشده و سری $\sum a_n$ واگرا می‌باشد . اگر $L = 1$، آزمون

ریشه بی‌حاصل است، و این را می‌توان با اعمال آن بر سه سری مذکور در آخر برهان آزمون نسبت تحقیق نمود.

در اعمال آزمون ریشه، توجه به

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} e^{(1/n)\ln c} = e^0 = 1,$$

که در آن $c > 0$، و به همین نحو، همانطور که در مسئلهٔ ۵۶، صفحهٔ ۸۰۳، پیش بینی شده،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{(1/n)\ln n} = e^0 = 1,$$

یاری‌دهنده است.

مثال ۵. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$$

به‌طور مطلق همگراست، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

مثال ۶. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

همگراست، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

مثال ۷. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

واگراست، زیرا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4} = 2 > 1.$$

مثال ۸. حالت $L=\infty$ باسری $\sum n^n$ توضیح دادهشده ، کهاز قبل واگرایی آن را میدانیم (چرا؟) ؛ و در واقع ، آزمون ریشه دراین سری نتیجه میدهد که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

مسائل

همگرایی سریهای داده شدهرا با آزمون نسبت یا آزمون ریشه تحقیقکنید . اگر هردوآزمون بیحاصل بود ، از آزمون همگرایی دیگر استفادهنمایید . در سریهای با جملات مثبتومنفی بین همگرایی مطلق و شرطی را از هم تمیز دهید .

۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^{100}}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2}$

۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{(2n)!}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^n$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5^n}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^2-1}{(1.01)^n}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/9}}{3^n}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\left(\frac{19}{7}\right)^n$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{4^n}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(-3)^n}{(2n+1)!}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n/2}}{n\pi^n}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(c+1)\cdots(c+n-1)}{n^n}$

۲۱. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^p}{n!}$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$

۲۵. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات ناصفر باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

نشان دهید که $\{a_n\}$ همگرا به 0 است.

تحقیق کنید که

۲۶. $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$ (c دلخواه)

۲۷. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^n$ همگراست.

۲۹. می‌توان نشان داد هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز است، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L. \qquad \text{(یکَ)}$$

سریی مثال بزنید که همگرایی آن را بتوان با آزمون ریشه ثابت‌کرد، ولی‌آزمون‌نسبت به خاطر عدم وجود (یک) از کار بیفتد. (لذا، با آنکه محاسبهٔ حد (یک) اغلب‌از حد (یکَ) در حالاتی‌که هر دو وجود دارند آسانتر است،آزمون ریشه عملا "ازآزمون نسبت قویتر می‌باشد.)

تحقیق کنید که

۳۰. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

۳۱. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n} = \frac{4}{e}$

۳۲. همگرایی سری

$$a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \cdots$$

را، که در آن a و b اعداد مثبت متمایزی هستند، تحقیق نمایید.

۶.۹ سریهای توانی

فرض کنیم x متغیر مستقلی بوده ، و $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد . در این صورت ، هر سری نامتناهی به شکل

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{۱}$$

یک *سری توانی* (نسبت به x) نام دارد ، و اعداد $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *ضرایب* یا جملات سری نامیده می‌شوند . در اینجا حد پایینی جمعبندی به جای 1 مساوی 0 است ، زیرا سری توانی معمولا" با " جملهٔ صفرم " شروع می‌شود . توجه کنید که جملات سری توانی $\sum a_n x^n$ ، به‌جای عدد مثل سریهایی‌که قبلا" درنظر گرفته‌ایم (که گاهی‌برای تمایز آنها با سریهایی که جملاتشان تابع‌اند سریهای عددی نامیده می‌شوند) *تابع* می‌باشند . اگر $a_N \neq 0$ و به ازای هر $n > N$ ، $a_n = 0$ ، سری‌توانی (۱) به‌صورت زیر تحویل‌می‌شود :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N \qquad (a_N \neq 0),$$

که یک‌چندجمله‌ای از درجهٔ N است . لذا ، به‌بیان نادقیق ، سریهای‌توانی‌چندجمله‌ایهایی هستند که بی‌نهایت جمله دارند . اگر $x = 0$ ، طرف راست (۱) به تنها جملهٔ ثابت a_0 تحویل‌می‌شود . برای‌آنکه طرف چپ (۱) نیز به ازای $x = 0$ به a_0 تحویل شود ، قرارداد $0^0 = 1$ را می‌پذیریم ؛ درنتیجه ، حتی اگر $x = 0$ ، $a_0 x^0 = a_0$.

اگر c ثابت باشد ، می‌توان سری توانی کلیتر

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots \tag{۱'}$$

را نیز درنظر گرفت که به‌جای‌توانهای x مستلزم توانهای $x - c$ است . طبیعی است که (۱') به ازای $c = 0$ به (۱) تحویل می‌شود . در واقع ، نیازی به بررسی جداگانهٔ سری‌به شکل (۱') نیست ، زیرا هرچیز بخواهیم در باب سری (۱') بدانیم می‌توانیم از تحلیل سری (۱) با همان ضرایب آموخته و سپس تغییر متغیر به $x - c$ بدهیم (ر.ک. بحث صفحهٔ ۸۶۰) .

فرض کنیم x مقدار ثابت r را بگیرد که عددی حقیقی است . در این صورت ، سری توانی $\sum a_n x^n$ ، که جملاتش تابعند ، به صورت سری $\sum a_n r^n$ درمی‌آید که جملاتش عدد می‌باشند ، و سری عددی $\sum a_n r^n$ را می‌توان با استفاده از روشهای بخشهای ۲.۹ تا ۵.۹ بررسی کرد . هر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای $x = 0$ (بداهتا") همگراست ، زیرا به تنها جملهٔ ثابت a_0 تحویل می‌شود . سری ممکن است فقط به ازای $x = 0$ همگرا باشد ، یا ممکن

است به ازای هر مقدار از x همگرا باشد، ولی به‌طورکلی به ازای مقادیر ناصفری‌از x همگرا و به ازای سایر مقادیر واگرا می‌باشد.

مثال ۱. فرض کنیم $a_n = n!$ که در آن $0! = 1$. در این صورت، سری توانی $\sum a_n x^n$ فقط به ازای $x = 0$ همگراست. این از آزمون نسبت نتیجه می‌شود، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty,$$

مگر آنکه $x = 0$.

مثال ۲. اگر $a_n = 1/n^n$، سری توانی $\sum a_n x^n$ (با حد جمعبندی پایینی ۱) به ازای‌هر x به‌طور مطلق همگراست. این از آزمون ریشه نتیجه می‌شود، زیرا به ازای هر مقدار x،

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n} = 0$$

مثال ۳. یکی از ساده‌ترین سریهای توانی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

است که، همانطور که قبلاً از مثال ۱، صفحهٔ ۸۰۶، می‌بینیم، به ازای هر x دربازهٔ باز $(-1, 1)$ همگراست و به ازای سایر مقادیر x واگرا می‌باشد.

همگرایی سریهای توانی. بررسی همگرایی ما از سریهای توانی مبتنی بر نتیجهٔ کلیدی زیر است.

قضیهٔ ۱۲ (خاصیت همگرایی اساسی سریهای توانی). *هرگاه سری توانی $\sum a_n x^n$ به‌ازای $x = r$ که $r \neq 0$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای‌هر x که $|x| < |r|$ به‌طورمطلق همگراست. هرگاه سری به ازای $x = s$ واگرا باشد، آنگاه به ازای هر x که $|x| > |s|$ نیز واگرا می‌باشد.*

برهان. هرگاه سری $\sum a_n r^n$ همگرا باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۸۱۱، دنبالهٔ $\{a_n r^n\}$ همگرا به 0 است. بخصوص، بنابر قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۷۹۳، $\{a_n r^n\}$ کراندار است به این معنی که ثابتی چون $C > 0$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر n، $|a_n r^n| \le C$. اما در

این صورت ،

$$|a_n x^n| = |a_n r^n|\left|\frac{x}{r}\right|^n \le C\left|\frac{x}{r}\right|^n,$$

درنتیجه ، سری $\sum |a_n x^n|$ تحت تسلط سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} C\left|\frac{x}{r}\right|^n = C\left(1+\left|\frac{x}{r}\right|+\left|\frac{x}{r}\right|^2+\cdots\right)$$

می باشد. اگر $|x/r| < 1$ ، یا معادلا " $|x| < |r|$ ، این سری هندسی همگراست، و در این‌صورت ، بنا بر آزمون مقایسه $\sum |a_n x^n|$ نیز همگرا می‌باشد . به عبارت دیگر ، $\sum a_n x^n$ به ازای هر x که $|x| < |r|$ به‌طور مطلق همگرا می‌باشد .

برای اثبات حکم دوم ، ملاحظه‌می‌کنیم که اگر سری $\sum a_n x^n$ به ازای $x = s$ واگرا باشد، نمی‌تواند در نقطهٔ x که $|s| < |x|$ همگرا باشد . زیرا در این صورت ، بنابر قسمت اول برهان، $\sum a_n s^n$ نیز همگراست ، که با فرض متناقض می‌باشد .

بازهٔ همگرایی . فرض کنیم I مجموعهٔ نقاطی باشد که به ازای آنها سری $\sum a_n x^n$ همگراست. در این صورت ، همانطور که از نماد برمی‌آید ، I همواره یک بازه است ، به نام *بازهٔ همگرایی* (که احتمالا " می‌تواند تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ یا " بازهٔ تباه شدهٔ " $I = [0, 0]$ شامل فقط نقطهٔ 0 باشد) .

قضیهٔ ۱۳ (بازهٔ همگرایی یک سری توانی) . *فرض کنیم I مجموعهٔ تمام نقاط x باشد که به ازای آنها سری توانی $\sum a_n x^n$ همگراست. در این صورت ، I بازه‌ای است که 0 نقطهٔ میانی آن می‌باشد .*

برهان (اختیاری). نقطهٔ 0 همواره متعلق به I است ، زیرا هر سری توانی به‌ازای $x = 0$ همگراست . هرگاه $x = 0$ تنها نقطه در I باشد ، آنگاه I به بازهٔ $[0, 0]$ تحویل می‌شود ، ولی در غیر این صورت I شامل دست کم دو نقطهٔ متمایز u و v می‌باشد . فرض کنیم r نقطه‌ای بین u و v باشد . در این صورت ، $|r| < |u|$ یا $|r| < |v|$ ، زیرا r باید از دست کم یکی یا هر دو نقطهٔ u و v به مبداء نزدیکتر باشد . لذا ، طبق قضیهٔ ۱۲ ، سری $\sum a_n x^n$ بـه ازای $x = r$ (به‌طور مطلق) همگراست ؛ یعنی ، r نیز متعلق به I است . لذا ، هروقت مجموعهٔ I شامل دو نقطهٔ متمایز u و v باشد ، شامل هر نقطهٔ r بین u و v نیز می‌باشد. بنابراین ، I یک بازه می‌باشد (ر.ک. تبصرهٔ صفحهٔ ۳۰) . به‌علاوه ، هرگاه r یک نقطهٔ

درونی I باشد. آنگاه $-r$ نیز متعلق به I می‌باشد. در واقع، در این حالت همیشه می‌توان نقاط u و v در I را طوری یافت که r بین u و v واقع باشد. اما، در این صورت، بنا بر استدلالی که هم اکنون شد، $\sum |a_n r^n|$ همگراست؛ ودرنتیجه، $\sum |a_n(-r)^n|$ چنین است. به عبارت دیگر، $\sum a_n x^n$ به ازای $x = -r$ (به‌طور مطلق) همگراست؛ یعنی، $-r$ متعلق به I می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که I دارای نقطهٔ میانی 0 می‌باشد.

به‌طور خلاصه، از قضیهٔ ۱۳ فوراً نتیجه می‌شود که سری توانی $\sum a_n x^n$ درست به یکی از صور زیر رفتار می‌کند:

(یک) سری فقط به ازای $x = 0$ همگراست، مثل مثال ۱، و در این صورت، بازهٔ همگرایی I به بازهٔ $[0, 0]$ تحویل می‌شود که فقط شامل نقطهٔ 0 است.

(دو) سری به ازای هر x (به‌طورمطلق) همگراست، مثل مثال ۲، و در این صورت، I تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

(سه) سری به‌ازای مقادیر ناصفری از x همگرا و به‌ازای سایر مقادیر واگراست. دراین‌صورت، I یک بازهٔ متناهی به شکل $(-R, R)$، $[-R, R]$، $[-R, R)$، یا $(-R, R]$، که $R > 0$، است و این بسته به‌رفتار سری درنقاط $x = R$ و $x = -R$ است که‌باید جداگانه بررسی شود. در اینجا مهم‌است توجه شود که برهان قضیهٔ ۱۳ ما را مجاز به‌این‌نتیجه‌گیری که نقاط انتهایی I متعلق به I هستند نمی‌کند؛ و در واقع، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، بازهٔ همگرایی I ممکن است شامل یک یا هر دونقطهٔ انتهایی نباشد. به‌عبارت دیگر، سری ممکن است به ازای $x = R$ یا $x = -R$ همگرا باشد یا نباشد.

شعاع همگرایی. عدد R درحالت (سه) ***شعاع همگرایی*** سری‌توانی $\sum a_n x^n$ نام دارد. حالت (یک) را می‌توان حالت جزء (سه) نظیر به $R = 0$، و حالت (دو) را حالت جزء (سه) نظیر به $R = \infty$ تلقی کرد.

مثال ۴. در سری هندسی $\sum x^n$ مثال ۳، شعاع همگرایی 1 است. بازهٔ همگرایی بازهٔ باز $(-1, 1)$ است، زیرا $\sum x^n$ به ازای $|x| \geq 1$، بخصوص به ازای $x = \pm 1$، واگراست. به طورکلی، سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = 1 + \frac{x}{R} + \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{R}\right)^n + \cdots$$

دارای شعاع همگرایی R و بازهٔ همگرایی $(-R, R)$ می‌باشد.

مثال ۵. با اعمال آزمون نسبت بر سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots \tag{۲}$$

معلوم می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\frac{n+1}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}|x| = |x|.$$

لذا، سری به ازای $|x| < 1$ به‌طورمطلق همگرا و به ازای $|x| > 1$ واگرا می‌باشد. درنتیجه، شعاع همگرایی 1 می‌باشد. بازهٔ همگرایی بازهٔ نیمباز $[-1, 1)$ است. در واقع، به ازای $x = 1$، سری (۲) به سری توافقی واگرای

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

تبدیل می‌شود، ولی به ازای $x = -1$ به سری متناوب به‌طور مشروط همگرای

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

بدل خواهد شد. اگر در (۲) x را به $-x$ تغییر دهیم، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots$$

را به‌دست می‌آوریم که مجدداً شعاع‌همگرایی 1 را دارد، ولی به ازای $x = 1$ به‌طورمشروط همگراست و به ازای $x = -1$ واگرا می‌باشد. بنابراین، این بار بازهٔ همگرایی $(-1, 1]$ است؛ یعنی، بازهٔ نیمباز دیگر باهمان نقاط انتهایی ± 1.

مثال ۶. سری متناوب

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4} + \cdots \tag{۳}$$

یک سری توانی است‌که فقط شامل توانهای زوج x است. بااعمال‌آزمون نسبت نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{2n+2}}{n+2}\frac{n+1}{x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}|x|^2 = x^2.$$

لذا، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $x^2 < 1$ یا معادلاً $|x| < 1$، و واگراست‌اگر $x^2 > 1$ یا معادلاً $|x| > 1$؛ درنتیجه، شعاع همگرایی 1 می‌باشد. بازهٔ همگرایی بازهٔ بستهٔ

$[-1, 1]$ می‌باشد. در واقع، با گذاردن $x = 1$ و $x = -1$ در سری (۳)، یک سری به‌طور مشروط همگرا، یعنی سری توافقی متناوب، به دست می‌آوریم.

مثال ۷. با اعمال آزمون نسبت بر سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(n+1)^2} = 1 + \frac{x}{5 \cdot 2^2} + \frac{x^2}{5^2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 4^2} + \cdots \qquad (۴)$$

معلوم می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+2)^2} \frac{5^n(n+1)^2}{x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \frac{|x|}{5} = \frac{|x|}{5}.$$

لذا، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $|x| < 5$ و واگراست اگر $|x| > 5$؛ درنتیجه، شعاع همگرایی 5 می‌باشد. بازهٔ همگرایی بازهٔ بستهٔ $[-5, 5]$ می‌باشد. در واقع، سری (۴) به ازای $x = 5$ به سری همگرای

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

تبدیل می‌شود (سری p به ازای $p = 2$)، حال آنکه به ازای $x = -5$ به سری به طور مطلق همگرای

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

بدل خواهد شد.

از مثالهای قبل واضح است که یک سری توانی ممکن است در هر دو نقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی I خود به‌طور مطلق همگرا، به‌طور مشروط همگرا، یا واگرا باشد، یا در یک نقطهٔ انتهایی I به‌طور مشروط همگرا و در نقطهٔ انتهایی دیگر واگرا باشد. به‌عنوان تمرین نشان دهید یک سری توانی نمی‌تواند در یک نقطهٔ انتهایی I به‌طور مطلق همگرا و در نقطهٔ انتهایی دیگر واگرا یا به‌طور مشروط همگرا باشد.

البته، یک سری توانی لازم نیست جملهٔ ثابت داشته باشد؛ و در واقع، ممکن است با توانی از x شروع شده و ممکن است فاقد توانی (متناهی یا نامتناهی) از x باشد.

مثال ۸. با اعمال آزمون ریشه بر سری توانی

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n} = \frac{2^2 x^4}{(\ln 2)^2} + \frac{3^2 x^6}{(\ln 3)^3} + \frac{4^2 x^8}{(\ln 4)^4} + \cdots,$$

که شامل فقط توانهای زوجی از x با شروع از x^4 است ،معلوم می‌شود که به ازای هرمقدار x،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2x^{2n}}{(\ln n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{\ln n}|x|^2 = 0$$

(به یاد آورید که وقتی $n\to\infty$ ، $\sqrt[n]{n}\to 1$) . لذا ، این سری به ازای هر x به طور مطلق همگراست؛ یعنی ، شعاع همگرایی ∞ و بازهٔ همگرایی $(-\infty, \infty)$ دارد .

در سری توانی به شکل کلیتر $\sum a_n(x-c)^n$ ، که در آن c ثابت دلخواهی است ، مجموعهٔ نقاطی که به‌ازای آنها سری همگراست مجددا "یک بازهٔ مانند I ، به نام ***بازهٔ همگرایی*** ، است"؛ و در واقع ، سه حالت ذکر شده در صفحهٔ ۸۵۷ به صورت زیر درمی‌آید :

(یک) سری فقط به ازای $x=c$ همگراست ، و در این صورت بازهٔ همگرایی I به بازهٔ $[c, c]$ شامل تنها نقطهٔ c تحویل می‌شود .

(دو) سری به ازای هر x (به‌طورمطلق) همگراست ، و در این صورت I تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد .

(سه) سری به ازای بعضی مقادیر x که مساوی c نیستند همگرا بوده و به ازای سایر مقادیر واگرا می‌باشد . دراین‌صورت ، I یک‌بازهٔ متناهی به‌شکل $(c-R, c+R)$ ، $[c-R, c+R]$ ، $[c-R, c+R)$ یا $(c-R, c+R]$ است و این‌بسته به‌رفتار سری‌درنقاط $x=c+R$ و $x=c-R$ است که باید جداگانه بررسی شوند .

برای به دست آوردن این حالات از حالات قبلی (یک) ، (دو) ، و (سه) در مورد سری توانی به شکل $\sum a_nx^n$ ، کافی است توجه کنیم که هرگاه متغیر یک سری توانی از x به $x-c$ تغییر کند ، آنگاه بازهٔ انتگرالگیری آن c واحد به راست در امتداد خط حقیقی انتقال می‌یابد اگر $c>0$ ، و $|c|$ به چپ انتقال می‌یابد اگر $c<0$. مثل قبل ،عدد R در حالت (سه) ***شعاع همگرایی*** سری توانی $\sum a_n(x-c)^n$ نام دارد ، و حالات (یک) و (دو) نظیر $R=0$ و $R=\infty$ می‌باشند . توجه کنید که R همواره نصف طول بازهٔ همگرایی است ، و طول بازه‌های $[c, c]$ و $(-\infty, \infty)$ مساوی 0 و ∞ تلقی می‌شود .

مثال ۹ . سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n+1} = 1 + \frac{x-6}{2} + \frac{(x-6)^2}{3} + \frac{(x-6)^3}{4} + \cdots \qquad (۲')$$

یک سری توانی نسبت به $x-6$ است‌که از تعویض x با $x-6$ در سری (۲) به‌دست‌می‌آید. چون (۲) دارای شعاع همگرایی 1 و بازهٔ همگرایی $[-1, 1)$ است، سری (۲′) همان شعاع همگرایی 1 را دارد ولی با بازهٔ همگرایی مختلف؛ یعنی، بازهٔ $[6-1, 6+1) = [5, 7)$ شش واحد به راست.

به صورت دیگر، با اعمال مستقیم آزمون نسبت بر سری (۲′)، به دست می‌آوریم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^{n+1}}{n+2}\,\frac{n+1}{(x-6)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}|x-6| = |x-6|.$$

پس نتیجه‌می‌شودکه سری (۲) به طورهمگراست اگر $|x-6| < 1$، یعنی‌اگر $-1 < x-6 < 1$ یا معادلاً $5 < x < 7$، و واگراست اگر $|x-6| > 1$، یعنی‌اگـر $x-6 > 1$ یا $x-6 < -1$ که با $x > 7$ یا $x < 5$ معادل می‌باشد. به‌علاوه، به ازای $x = 7$ سری به سری توافقی واگرا تبدیل می‌شود، حال آنکه به ازای $x = 5$ به سری توافقی متناوب (به‌طور مشروط) همگرا بدل می‌شود. لذا، مثل قبل، سری به شعاع همگرایی 1 و بازهٔ همگرایی $[5, 7)$ می‌باشد.

مثال اخیر ما روش صریحی برای ساختن تمام ردهٔ سریهای توانی بـا شعاع همگرایی یکسان به دست می‌دهد، و در بخش بعد به کار خواهد رفت.

مثال ۱۰. فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی بوده، و $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = 1. \qquad (۵)$$

نشان دهید که سری $\sum c_n a_n x^n$ همان شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ را دارد.

حل *(اختیاری)*. فرض کنیم R شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ و R' شعاع همگرایی $\sum c_n a_n x^n$ باشد. همچنین، $R \neq 0, R \neq \infty$. بـه ازای هر نقطهٔ $x \neq 0$ در $(-R, R)$، ابتـدا نقطـهٔ r را طوری می‌گیریم کـه $|x| < |r| < R$؛ درنتیجه، $\sum |a_n r^n|$ همگراست، و بعداز عدد صحیح N داریم

$$\sqrt[n]{c_n} < \frac{|r|}{|x|},$$

یا معادلاً، به ازای هر $n > N$،

$$c_n|x|^n < |r|^n$$

(این به خاطر (۵) و نامساوی $|r|/|x| < 1$ میسر است) . پس اگر $n > N$ ،

$$|c_n a_n x^n| = c_n |a_n| \, |x|^n < |a_n| \, |r|^n = |a_n r^n|$$

درنتیجه ، سری $\sum |c_n a_n x^n|$ تحت تسلط سری همگرای $\sum |a_n r^n|$ می‌باشد . بنابراین ، طبق آزمون مقایسه ، $\sum c_n a_n x^n$ (به‌طور مطلق) همگراست . لذا ، نشان داده‌ایم که x متعلق‌به بازهٔ همگرایی $\sum c_n a_n x^n$ است‌هروقت x متعلق به بازهٔ همگرایی $\sum a_n x^n$ باشد. پس‌نتیجه می‌شود که $R' \geq R$ (همگرایی هر دو سری به ازای $x = 0$ بدیهی است) .

حال فرض کنیم

$$a'_n = c_n a_n, \qquad c'_n = \frac{1}{c_n}.$$

در این صورت ،

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c'_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = 1,$$

و دقیقا " همین استدلال در مورد سری $\sum a'_n x^n = \sum c_n a_n x^n$ با شعاع همگرایی R' و سری $\sum c'_n a'_n x^n = \sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R نشان می‌دهد که $R \geq R'$. اما نامساویهای $R' \geq R$ و $R \geq R'$ همراه باهم ایجاب می‌کنند که $R' = R$.

بالاخره ، اگر $R = 0$ ، نامساوی $R \geq R'$ ایجاب می‌کند که $R' = 0$ ، حال‌آنکه اگر $R = \infty$ ، $\sum c_n a_n x^n$ به‌ازای هر x همگراست (چرا؟) ؛ درنتیجه ، $R' = \infty$. لذا ، در هر حالت ، $R' = R$ ؛ یعنی ، دو سری $\sum a_n x^n$ و $\sum c_n a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی یکسان می‌باشند .

به عنوان کاربردی از مثال ۱۰ ، ملاحظه می‌کنیم که دو سری $\sum a_n x^n$ و $\sum n^p a_n x^n$ به ازای هر عدد حقیقی p شعاع همگرایی یکسانی دارند ، زیرا

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n \to \infty} (\sqrt[n]{n})^p = 1.$$

مسائل

شعاع همگرایی و بازهٔ همگرایی سری توانی داده شده را بیابید .

۱ . $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x - \pi)^n$

۲ . $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$

۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

۴. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$

۵. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!}$

۶. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)^{3/2}}$

۷. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$

۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}(x+5)^n$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

۱۰. $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\ln n} x^n$

۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} x^n \quad (0 < c < 1)$

۱۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!(n+4)!} x^n$

۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)} x^{2n}$

۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}(x-3)^n$

۱۵. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2}(x+e)^n$

۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a > 0, b > 0)$

۱۸. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} x^n$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right) x^n$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+\frac{2^n}{n^2}\right) x^n$

۲۱. $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2+\cdots+2^n) x^n$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!}$

۲۴. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\ln n}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n}$

۲۶. $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n \left(\frac{x-1}{5}\right)^n$

۲۷. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+c^n) x^n \quad (0 \le c < \infty)$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} x^{4n}$

۲۹. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n}$ ۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{3^{n^2}}$

۳۱. به ازای سری توانی $\sum a_n x^n$ ، فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L, \qquad \text{(یک)}$$

یا

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L, \qquad \text{(یکَ)}$$

که در آن حالت $L=\infty$ مجاز است. نشان دهید که شعاع همگرایی R سری دادهشده با فرمول

$$R = \begin{cases} 1/L ، & 0 < L < \infty \quad \text{اگر} \\ 0 ، & L = \infty \quad \text{اگر} \\ \infty ، & L = 0 \quad \text{اگر} \end{cases} \qquad \text{(دو)}$$

داده می‌شود (در این مسئله نتایج آزمونهای نسبت وریشه درمورد شعاع همگرایی یک سری توانی که در آن یکی از حدود (یک) و (یکَ) وجود دارد خلاصه شده‌است. درواقع، وجود (یک) وجود (یکَ) را ایجاب می‌کند ولی عکس آن درست نیست؛ (ر.ک مسئلهٔ ۲۹، صفحهٔ ۸۵۳.) لذا، سریهایی توانی وجود دارند که در آنها حد (یکَ) وجود دارد ولی حد (یک) موجود نیست. همچنین، سریهای مانند سری مسئلهٔ ۳۷ وجوددارند که به ازای آنها نه حد (یک) وجود دارد نه حد (یکَ).)

سری توانی $\sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R داده شده است که $0 < R < \infty$. شعاع همگرایی سریهای زیر را بیابید.

۳۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ ۳۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} a_n x^n$

۳۴. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n$

۳۵. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p x^n$ (p دلخواه)

۳۶. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn} \quad (p = 2, 3, \ldots)$

فرض کنید حد (یک) یا (یکَ)، بنابر نیاز، وجود داشته باشد.

۳۷. نشان دهید که هیچیک از حدود (یک) و (یکَ) در مورد سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n x^n$$

وجود ندارد. شعاع همگرایی و بازهٔ همگرایی این سری را بیابید.

۷.۹ مشتقگیری و انتگرالگیری از سریهای توانی

مجموع یک سری توانی. فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی با بازهٔ همگرایی I بوده، و f تابعی باشد که بر I تعریف‌شده و مقدارش در هر نقطهٔ r در I مجموع سری $\sum a_n r^n$ است. در این صورت، f مجموع سری توانی $\sum a_n x^n$ نام دارد، و می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{۱}$$

همواره به یاد داشته باشید که مجموع سری توانی $\sum a_n x^n$ *تابعی* از متغیر x است برخلاف مجموع سری $\sum a_n r^n$ که عدد می‌باشد. انتظار این می‌رفت، زیرا $\sum a_n x^n$ سریی است که جملاتش توابعی از x اند، ولی $\sum a_n r^n$ یک سری عددی است؛ یعنی، سریی که جملاتش عدد می‌باشند (r یک‌مقدار خاص‌از x است). فرمول (۱) **بسط سری توانی** f (در $x = 0$) نام دارد.

مثال ۱. سری توانی $\sum x^n$ یک‌سری‌هندسی بابازهٔ همگرایی $I = (-1, 1)$ است. به‌علاوه همانطور که از مثال ۱، صفحهٔ ۸۰۶، می‌دانیم،

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

لذا، تابع

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

مجموع سری $\sum x^n$ است ولی فقط بر بازهٔ I، زیرا سری خارج I واگرا می‌باشد. درنتیجه،

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \tag{۲}$$

بسط سری توانی این تابع می‌باشد.

به‌طورکلی، فرض کنیم $\sum a_n (x-c)^n$ یک‌سری‌توانی نسبت‌به $x - c$ با بازهٔ همگرایی

I بوده، و f تابعی باشد که بر I تعریف شده و مقدارش در هر نقطهٔ r در I مجموع سری عددی $\sum a_n(r-c)^n$ می‌باشد. در این صورت، f مجموع سری توانی $\sum a_n(x-c)^n$ نام دارد، و می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n. \qquad (1')$$

فرمول (۱َ) بسط سری توانی f در $x = c$ نام دارد[1]، و این در صورت $c = 0$ به فرمول (۱) تحویل می‌شود. در مثال ۴ نشان دادیم که ضرایب $a_n\ (n = 0, 1, \ldots)$ در عبارت (۱َ) به‌طور منحصر به فرد توسط تابع f و ثابت c معین می‌شود.

مثال ۲. سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots \qquad (۳)$$

همگراست اگر و فقط اگر $|x-1| < 1$، ولی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots, \qquad (۳')$$

که نیز هندسی است، همگراست اگر و فقط اگر $|x/2| < 1$ یا معادلاً $|x| < 2$. از تعویض x در فرمول (۲) ابتدا با $x - 1$ و سپس با $x/2$، معلوم می‌شود که هر دو سری (۳) و (۳َ) دارای مجموع یکسان

$$\frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$$

می‌باشند. لذا، تابع

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$

دارای بسط سری توانی

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots \qquad (|x| < 2)$$

---

۱. بسط «در $x = c$» به این معنی است که نقطهٔ میانی بازهٔ همگرایی سری توانی $x = c$ می‌باشد. گاهی به جای این از عبارت «نسبت به $x = c$» استفاده می‌کنیم که به همان معنی می‌باشد.

در $x = 0$ و بسط

$$\frac{1}{2-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \cdots \qquad (|x-1| < 1)$$

در $x = 1$ است. توجه کنید که بازهٔ همگرایی سری (۳′) مساوی $(-2, 2)$ است، حال‌آنکه بازهٔ همگرایی (۳) بازهٔ کوچکتر $(0, 2)$ می‌باشد. این با معنی است، زیرا بازهٔ همگرایی سری توانی f نمی‌تواند شامل نقطهٔ $x = 2$ باشد که در آن f به بی‌نهایت نزدیک‌می‌شود.

به ازای سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad (۴)$$

می‌توان با مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از (۴) دو سری توانی جدید تشکیل می‌داد؛ یعنی، می‌توان سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \qquad (۵)$$

را تشکیل داد که جملهٔ عمومی‌اش مشتق $a_n x^n$ است، و سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \cdots, \qquad (۶)$$

که جملهٔ عمومی‌اش انتگرال $a_n x^n$ (از 0 تا x) می‌باشد. هر سه سری *(۴)، (۵)، و (۶) دارای شعاع همگرایی یکسان‌اند*. در واقع، ضرب یک سری توانی در x یا تقسیم یک سری توانی بدون جملهٔ ثابت بر x اثری بر شعاع همگرایی ندارد (چرا نه ؟)؛ درنتیجه، سری (۵) همان شعاع همگرایی

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \qquad (۵′)$$

را دارد، ولی سری (۶) شعاع همگرایی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n \qquad (۶′)$$

را خواهد داشت. اما (۵′) و (۶′) هر دو به‌شکل $\sum c_n a_n x^n$ می‌باشند، که در آن‌وقتی $n \to \infty$ $\sqrt[n]{c_n} \to 1$، زیرا وقتی $n \to \infty$، $\sqrt[n]{n} \to 1$ (ر.ک. صفحهٔ ۸۵۱) و

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{-(1/n)\ln(n+1)} = e^0 = 1.$$

بنابراین، طبق مثال ۱۰، صفحهٔ ۸۶۱، معلوم می‌شود که دوسری (۵′) و (۶′) همان شعاع

همگرایی سری اصلی (۴) را دارند؛ و درنتیجه، سریهای مشتقگیری شده و انتگرالگیری شدهٔ (۵) و (۶) نیز چنین می‌باشند. کاربرد مکرر این استدلال نشان می‌دهد که *حاصل هرچند بار مشتقگیری یا انتگرالگیری جمله به جمله از سری توانی $\sum a_n x^n$ سری‌توانی دیگری با همان شعاع همگرایی می‌باشد.*

مشتقگیری از سری توانی. قضیهٔ زیر رابطهٔ بین تابع مجموع یک سری توانی و تابع مجموع سری مشتقگیری شده را به ما می‌دهد. علی‌رغم سادگی صورت قضیه، برهانی تکنیکی دارد و لذا حذف می‌شود. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به کتابی در حساب دیفرانسیل‌وانتگرال پیشرفته مراجعه نماید.

قضیهٔ ۱۴ (مشتقگیری جمله به جمله از یک سری توانی). *فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی R باشد. در این صورت، تابع*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

یعنی مجموع سری توانی که بر بازهٔ باز $(-R, R)$ مشتقپذیر و دارای‌مشتق‌زیراست:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{۷}$$

که مساوی مجموع سری حاصل از مشتقگیری جمله به جمله از سری داده شده می‌باشد.

با کاربرد مکرر قضیهٔ ۱۴، معلوم می‌شود که f در هر نقطهٔ $(-R, R)$ از هر مرتبه مشتق دارد؛ این امر را می‌توان خلاصه‌کرد و گفت‌که f بر $(-R, R)$ *بی‌نهایت بار مشتقپذیر* است. به‌علاوه، مشتقپذیری f بر $(-R, R)$ پیوستگی f بر $(-R, R)$را ایجاب می‌کند. لذا، *مجموع هر سری توانی یک تابع پیوسته می‌باشد.*

انتگرالگیری از سریهای توانی. به کمک قضیهٔ ۱۴ می‌توان به‌آسانی رابطهٔ بین f و تابعی که مجموع سری *انتگرالگیری* شده است را به دست آورد.

قضیهٔ ۱۵ (انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی). *فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی R باشد. در این صورت، تابع*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

بر هر زیربازهٔ بستهٔ $[0,x]$ از $(-R,R)$ انتگرالپذیر است که انتگرالش

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

مساوی مجموع سری حاصل از انتگرالگیری جمله به جمله از سری داده‌شده‌است .

برهان . انتگرالپذیری f بر $[0,x]$ نتیجهٔ فوری پیوستگی f بر $(-R,R)$ است . قبلاً نشان داده‌ایم که سری

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

دارای شعاع همگرایی R است ، و بوضوح $F(0)=0$. مشتقگیری جمله به جمله ازاین سری فوراً سری اصلی $f(x)=\sum a_nx^n$ را نتیجه می‌دهد ؛ ولذا ، بنابرقضیهٔ ۱۴ ، $F'(x)=f(x)$. پس نتیجه می شود که

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

(توجه کنید که این چگونه شرط $F(0)=0$ را وارد می‌کند) . حال فرمول مطلوب (۸) را می‌توان با متحدگرفتن دو عبارت مربوط به $F(x)$ به دست آورد .

حال چند مثال از مشتقگیری جمله به جمله از سریهای توانی عرضه می‌کنیم .

مثال ۳ . کاربرد آزمون نسبت یا ریشه فوراً نشان می‌دهد که سری توانی

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\tag{۹}$$

دارای شعاع همگرایی 1 است . ازرابطهٔ (۹) با استفاده از قضیهٔ ۱۴ دوبار مشتق می‌گیریم به دست می‌آید

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\tag{۹'}$$

و

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2}.\tag{۹''}$$

سه سری (۹) ، (۹') ، و ("۹) همه دارای شعاع همگرایی 1 هستند ، ولی به آسانی تحقیق می‌شود (به عنوان تمرین انجام دهید) که بازهٔ همگرایی (۹) بازهٔ بستهٔ $[-1,1]$

است ، بازهٔ همگرایی (۹') بازهٔ نیمباز $(-1,1]$ است ، و بازهٔ همگرایی ("۹) بازهٔ *باز* $(-1,1)$ می‌باشد . لذا ، با آنکه مشتقگیری از یک سری توانی همگرایی را در هر نقطهٔ درونی بازهٔ همگرایی I حفظ می‌کند ، ممکن است همگرایی در نقاط انتهایی I را نابود سازد .

مثال ۴ . هرگاه دوسری توانی $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ در همسایگی نقطهٔ $x = 0$ مجموع یکسان داشته باشند ، آنگاه دوسری یکی هستند؛ یعنی ، توانهای یکسان x دارای ضرایب یکسان می‌باشند . در واقع ، با گذاردن $x = 0$ در اتحاد

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \tag{۱۰}$$

فورا" به دست می‌آوریم $a_0 = b_0$. به‌علاوه ، به خاطر قضیهٔ ۱۴ ، اتحاد (۱۰) در صورت مشتقگیری از طرفین به تعداد دفعات مساوی برقرار می‌ماند . با n بار مشتقگیری از (۱۰) معلوم می‌شود که

$$n!a_n + (n+1)!a_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}x^2 + \cdots$$
$$= n!b_n + (n+1)!b_{n+1}x + \frac{(n+2)!}{2!}b_{n+2}x^2 + \cdots,$$

که پس‌از قراردادن $x = 0$ به‌دست‌می‌آید $a_n = b_n$. بنابراین ، به‌ازای‌هر $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $a_n = b_n$. این استدلالی است مشابه استدلال به کار رفته در قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۶۴۲ ، راجع به ضرایب چندجمله‌ایهای یکسان که در مورد سریهای توانی بیان شده است . به طور کلی ، هرگاه $\sum a_n(x-c)^n$ و $\sum b_n(x-c)^n$ دو سری توانی نسبت به $x - c$ باشند که در همسایگی نقطهٔ $x = c$ دارای مجموع یکسانند ، آنگاه دو سری یکی می‌باشند (در اتحاد $\sum a_n(x-c)^n \equiv \sum b_n(x-c)^n$ و اتحادهای ناشی از مشتقگیری مکرر قرار دهید $x = c$) . لذا ، ضرایب یک بسط به صورت سری توانی $f(x) = \sum a_n(x-c)^n$ *منحصرا"* به وسیلهٔ تابع f معین می‌شوند؛ و نیز ، البته با انتخاب ثابت c .

مثال ۵ . از آزمون نسبت فورا" نتیجه می‌شود که سری توانی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

به ازای هر x همگراست . بنابرقضیهٔ ۱۴ ،

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

درنتیجه ، سری مشتقگیری شده دقیقاً" همان سری اصلی است. لذا ، تابع مجموع $y = f(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = y,$$

تحت شرط اولیهٔ

$$y|_{x=0} = 1,$$

که با گذاردن $x = 0$ در سری مربوط به $f(x)$ به دست می‌آید ، صدق می‌نماید . همانطور که از بخش ۶.۶ می‌دانیم ، $y = e^x$ جواب منحصر به فرد این مسئلهٔ مقدار اولیه است . بنابر این ،

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \tag{۱۱}$$

و ما بسط به صورت سری توانی e^x در $x = 0$ را یافته‌ایم .

اگر در فرمول (۱۱) اول $x = 1$ و سپس $x = -1$ اختیار کنیم ، می‌توانیم دو سری عددی که قبلاً" با آنها مواجه شدیم جمعبندی کنیم ؛ یعنی ،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = e \tag{۱۲}$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots = e^{-1}. \tag{۱۲'}$$

در واقع ،حال می‌توان بااستفاده‌از (۱۲) عدد e را با هر دقت مطلوب حساب‌کرد . مثلاً" ، فرض کنید هشت جملهٔ اول سری (۱۲) را نگهداشته و از جملات دیگر صرف‌نظرکرده‌باشیم . در این صورت ، خطای مرتکب شده مساوی است با

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \cdots = \frac{1}{8!} + \frac{1}{8! \cdot 9} + \frac{1}{8! \cdot 9 \cdot 10} + \cdots,$$

که مسلماً" از مجموع سری هندسی

$$\frac{1}{8!}\left[1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1}{8!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8!}\,\frac{9}{8} \approx 2.8 \times 10^{-5}$$

کوچکتر است . بنابراین ، می‌توان مطمئن بود که تقریب

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \frac{685}{252} \approx 2.7183$$

تا چهار رقم اعشار دقیق است (در واقع ، ... $e = 2.7182818$) . دراینجا از این امر استفاده می‌کنیم که یک تقریب **تا n رقم اعشار دقیق** است اگر قدر مطلق خطای تقریب از $0.5 \times 10^{-n} = 5 \times 10^{-n-1}$ کوچکتر باشد .

تبصره . در مثال قبل تمایز مختصری بین تقریب $e \approx \frac{685}{252}$ و تقریب $e \approx 2.7183$ وجود دارد . تقریب اول فقط تحت *خطای برشی* ناشی از حذف تمام جز هشت جملهٔ اول سری (۱۲) است ، حال آنکه تقریب دوم تحت *خطای گردکردن* اضافی که در نمایش کسر $\frac{685}{252}$ به صورت یک اعشاری با چهار رقم صورت می‌گیرد نیز قرار دارد . اگر قدر مطلق خطای گردکردن نزدیک کران بالایی خود 5×10^{-5} بوده و خطای برشی همان علامت خطای گردکردن را داشته باشد ، مجموع خطاهای برشی و گردکردن ممکن‌است‌از 5×10^{-5} تجاوز کند؛ لذا ، چهارمین رقم تقریب $e \approx 2.7183$ را می‌توان غیرمسلم (ولی فقط به اندازهٔ ± 1) دانست . تحلیل بیشتر نشان می‌دهد که این رخ نمی‌دهد؛ درنتیجه ، تقریب $e \approx 2.7183$ تا چهار رقم اعشار درست است . برای آنکه مطالب ساده باشند ، از حالا به بعد در تقریبات مبتنی بر سریهای نامتناهی از خطاهای گردکردن صرف نظر خواهیم کرد .

مثال ۶ . ما قبلا" از مثال ۱ می‌دانیم که

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (|x| < 1). \tag{۱۳}$$

با استفاده از قضیهٔ ۱۴ ، از این سری جمله به جمله مشتق می‌گیریم ، به دست می‌آید

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \qquad (|x| < 1), \tag{۱۳'}$$

که بسط به صورت سری توانی تابع $1/(1-x)^2$ در $x = 0$ است . توجه کنید که (۱۳') را می‌توان از (۱۳) نیز با ضرب صوری " چند جمله‌ای نامتناهی " $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ در خودش به دست آورد :

$$\begin{array}{r} 1+\ x+\ x^2+\ x^3+\cdots \\ 1+\ x+\ x^2+\ x^3+\cdots \\ \hline 1+\ x+\ x^2+\ x^3+\cdots \\ x+\ x^2+\ x^3+\cdots \\ x^2+\ x^3+\cdots \\ x^3+\cdots \\ \hline 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots \end{array}$$

مشروعیت این روند نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر منسوب به کشی، که آن را بدون برهان ذکر می‌کنیم: *فرض کنیم* $f(x)=\sum a_n x^n$ *و* $g(x)=\sum b_n x^n$ *دو سری توانی با شعاعهای همگرایی* R_a *و* R_b باشند. در این صورت، اگر $|x|<\min\{R_a, R_b\}$،

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2 \\ &\quad +\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots \end{aligned}$$

حال، به کمک قضیهٔ ۱۵، به چند مورد انتگرالگیری جمله به جمله از سریهای توانی می‌پردازیم.

مثال ۷. با انتگرالگیری جمله به جمله از سری هندسی همگرای

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = 1-x+x^2-x^3+\cdots = \frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x} \qquad (|x|<1) \tag{۱۴}$$

به دست می‌آوریم

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\int_0^x\frac{dt}{1+t}.$$

اما

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x),$$

زیرا $|x|<1$؛ و لذا،

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad (|x|<1), \tag{۱۵}$$

که بسط سری توانی تابع $\ln(1+x)$ در $x=0$ است. قضیهٔ ۱۵ اعتبار این بسط را فقط

به ازای $-1 < x < 1$ تضمین می‌کند، ولی شک داریم که به ازای $x = 1$ نیز برقرار باشد، زیرا طرف راست (۱۵) به ازای $x = 1$ به یک سری توافقی متناوب به طور مشروط همگرا تبدیل می‌شود. در واقع، بسط (۱۵) به ازای $x = 1$ برقرار *است*؛ و لذا، نتیجه می‌گیریم که

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2. \qquad (\text{۱۵}')$$

این نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر که به ریاضیدان اعجوبهٔ نروژی نیلز آبل[1] (۱۸۰۲–۱۸۲۹) منسوب می‌باشد: *هرگاه‌سری‌توانی $\sum a_n x^n$ باشعاع‌همگرایی R به‌ازای $x = R$ همگرا باشد، آنگاه مجموعش از چپ در $x = R$ پیوسته است؛ یعنی،*

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

قضیهٔ آبل در اعمال بر سری (۱۵)، که در $x = 1$ همگراست، می‌گوید که

$$\lim_{x \to 1^-} \ln(1 + x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

و این فرمول (۱۵′) را ثابت می‌کند، زیرا حد موجود در آن چیزی جز $\ln 2$ نیست.

مثال ۸. از تغییر x به x^2 در بسط (۱۴) معلوم می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (|x| < 1).$$

انتگرالگیری جمله به جمله از این سری توانی نتیجه می‌دهد که

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}.$$

اما

$$\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan x,$$

درنتیجه، بسط سری توانی $\arctan x$ در $x = 0$ مساوی است با

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (|x| < 1). \qquad (\text{۱۶})$$

1. Neils Abel

این نتیجه به افتخار ریاضیدان اسکاتلندی، جیمز گرگوری[1]، که آن را در ۱۶۷۱ کشف کرد، سری گرگوری نام دارد. به‌ازای $x = 1$، طرف‌راست (۱۶) به‌صورت سری $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ درمی‌آید که بنابر آزمون متناوب به‌طور مشروط همگراست. بنابراین، قضیهٔ آبل می‌گوید که

$$\lim_{x \to 1^-} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

چون این حد $\arctan 1 = \pi/4$ است، پس نتیجه می‌شود که

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

این سری آنقدر کند همگراست که برای محاسبهٔ π مفید نیست، ولی راه دیگری برای استفاده از سری گرگوری برای محاسبهٔ π وجود دارد که دقتش زیاد می‌باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۸۴، صفحهٔ ۹۱۸).

مثال ۹. در مثال ۴، صفحهٔ ۶۷۱، از قاعدهٔ سیمپسون برای تقریب انتگرال

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

تا چهار رقم اعشار استفاده کردیم. حال راه بسیار ساده‌تری برای تقریب I نشان می‌دهیم که مبتنی بر استفاده‌از سریهای توانی‌است، که درآن مقادیر عددی انتگرالده‌لازم نمی‌شوند. از تغییر x به $-x^2$ در فرمول (۱۱)، بسط سری توانی

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

به دست می‌آید، که به ازای هر x معتبر است. در این صورت، با انتگرالگیری جمله‌به‌جمله از این سری از 0 تا 1، معلوم می‌شود که

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \cdots$$

فرض کنیم R_n خطای حاصل از تقریب I به وسیلهٔ مجموع n جملهٔ اول سری عددی سمت راست باشد. در این صورت، بنابر قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۸۳۷، قدرمطلق R_n از اولین جملهٔ

1. James Gregory

استفاده نشده کوچکتر است؛ یعنی،

$$|R_n| < \frac{1}{(2n+1)n!},$$

و اگر $|R_n| < 5 \times 10^{-5}$ ، می‌توان مطمئن بود که تقریب تا چهار رقم اعشار دقیق است. چون

$$\frac{1}{13 \cdot 6!} \approx 1.1 \times 10^{-4}, \qquad \frac{1}{15 \cdot 7!} \approx 1.3 \times 10^{-5},$$

کوچکترین عدد صحیح n که $|R_n| < 5 \times 10^{-5}$ مساوی 7 است. پس نتیجه‌می‌شود که‌تقریب

$$\begin{aligned} I &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0.7468 \end{aligned}$$

تا چهار رقم اعشار دقیق است.

سری دوجمله‌ای. بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای، هرگاه r عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} (1+x)^r &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots + x^r \end{aligned} \tag{۱۷}$$

(در فرمول (۵)، صفحهٔ ۳۶۴، قرار می‌دهیم $a = 1, b = x, n = r$). مثال اخیر این فرمول را به حالتی که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است تعمیم می‌دهد.

مثال ۱۰. سری توانی

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n \\ &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است، **سری دوجمله‌ای** نام دارد. اگر r عدد صحیح نامنفی باشد، سری دوجمله‌ای مختوم بوده و به چندجمله‌ای (۱۷) از درجهٔ r تحویل می‌شود، ولی در غیر این صورت بی‌نهایت جمله وجود دارند و سری دارای شعاع همگرایی

1 می‌باشد (این را به کمک آزمون نسبت نشان دهید) . لذا ، تابع $f(x)$ بر بازهٔ $-1 < x < 1$ تعریف شده است . با مشتقگیری جمله به جمله از (۱۸) به‌دست می‌آوریم

$$f'(x) = r + r(r-1)x + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots, \tag{۱۸'}$$

که پس از ضرب در x به صورت زیر درمی‌آید :

$$xf'(x) = rx + r(r-1)x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}x^n + \cdots$$

حال پس از توجه به این امر که ضریب x^n در (۱۸') آخرین جملهٔ نوشته شده نبوده بلکه جملهٔ بعدی (نوشته نشده) یعنی

$$\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)}{n!}x^n.$$

است ، دو سری اخیر را به هم می‌افزاییم . درنتیجه ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
f'(x) &+ xf'(x) \\
&= r + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)}{n!} + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}\right]x^n \\
&= r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{(n-1)!}\left(\frac{r-n}{n}+1\right)x^n \\
&= r + r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n \\
&= r\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n\right] = rf(x).
\end{aligned}$$

لذا ، تابع مجموع $y = f(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1+x)y' = ry, \tag{۱۹}$$

تحت شرط اولیهٔ

$$y|_{x=0} = 1, \tag{۱۹'}$$

حاصل از قراردادن $x = 0$ در (۱۸) صدق می‌کند .

معادلهٔ (۱۹) را می‌توان با جداسازی متغیرها حل کرد ، ولی ساده‌تر است که جواب $y = (1+x)^r$ را حدس بزنیم ، ناشی از این امر که چون مشتقگیری درجهٔ $(1+x)^r$ را یکی کم می‌کند ، عامل اضافی $1 + x$ طرف چپ (۱۹) آن را جبران خواهد کرد . فوراً " می‌بینیم که این جواب در شرط اولیهٔ (۱۹') صدق می‌کند . لذا ، بالاخره تابع $f(x)$ در

(۱۸) را مساوی $(1+x)^r$ یافته‌ایم؛ درنتیجه، (۱۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1). \qquad (۲۰)$$

این بسط سری دوجمله‌ای $(1+x)^r$ قضیهٔ دوجمله‌ای (۱۷) را به‌حالت نمای حقیقی‌دلخواه r تعمیم می‌دهد.

مسائل

تابع گویای داده شده را به صورت سری توانی در $x = 0$ بسط داده، و شعاع همگرایی R را مشخص نمایید.

۱. $\dfrac{1}{3-x}$ ۲. $\dfrac{x}{1+x}$ ۳. $\dfrac{1}{(1+x)^2}$

۴. $\dfrac{x^{11}}{1-x}$ ۵. $\dfrac{x}{2x+1}$ ۶. $\dfrac{1}{1-x^2}$

۷. $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$ ۸. $\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$ ۹. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

۱۰. فرض کنید $f(x) = \sum a_n x^n$. به کمک مثال ۴، نشان دهید اگر f زوج باشد، $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$، حال آنکه اگر f فرد باشد، $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$.

فرض کنید، مثل مثال ۲، $f(x) = 1/(2-x)$. بسط سری توانی f را در نقاط زیر بیابید.

۱۱. در $x = 3$ ۱۲. در $x = -1$

تابع داده شده را در $x = 0$ به صورت سری توانی بسط داده، و شعاع همگرایی R را مشخص نمایید.

۱۳. $x^2 e^{-x}$ ۱۴. xe^{x^2} ۱۵. $\sinh x$

۱۶. $\cosh x$ ۱۷. $a^x \quad (a > 0)$ ۱۸. $\ln \dfrac{1}{1-x^2}$

۱۹. $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ ۲۰. $(1+x)\ln(1+x)$ ۲۱. $\ln(1-x+x^2)$

به کمک فرمول (۲۰)، پنج جملهٔ اول بسط سری دوجمله‌ای تابع داده شده را بیابید.

۲۲. $(1+x)^{1/2}$ ۲۳. $(1+x)^{1/3}$ ۲۴. $(1+x)^{-1/2}$

۲۵. $(4-x)^{3/2}$ ۲۶. $(8+x)^{2/3}$ ۲۷. $(1-x^2)^{-10}$

بسط سری توانی زیر را بیابید.

۲۸. $\ln x$ در $x = 1$ ۲۹. $\ln(2+2x+x^2)$ در $x = -1$

۳۰. سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx} + \cdots \qquad (\text{یک})$$

یک سری توانی نیست، زیرا جملات‌نمایی‌اند نه توانهایی از x. نشان دهیدکه‌سری (یک) همگراست اگر و فقط اگر x در بازهٔ $(0, \infty)$ قرار داشته باشد. مجموع این سری روی $(0, \infty)$ چیست؟ آیا $(0, \infty)$ یک بازهٔ همگرایی ممکن برای یک سری‌توانی است؟

با استفاده از سه جملهٔ اول سری دو جمله‌ای (۲۰)، ریشهٔ داده شده را تقریب کنید. در هر حالت تحقیق کنید که تقریب تا پنج رقم اعشار دقیق است.

۳۱. $\sqrt{1.04}$ ۳۲. $\sqrt[3]{0.975}$ ۳۳. $\sqrt[4]{79}$

۳۴. $\sqrt[5]{33}$ ۳۵. $\sqrt[6]{65}$ ۳۶. $\sqrt[7]{126}$

۳۷. با استفاده از سری دوجمله‌ای، نشان دهید که

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

مشروط براینکه $|x| < 1$.

۳۸. با مشتقگیری مستقیم از بسط سری توانی $\cosh x$ و $\sinh x$ (ر.ک. مسائل ۱۵ و ۱۶)، تحقیق کنید که $D_x \cosh x = \sinh x,\ D_x \sinh x = \cosh x$.

۳۹. با استفاده از سری گرگوری (۱۶)، نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

۴۰. نشان دهید که مجموع $y = f(x)$ سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

در معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' - y = 0$ صدق می‌کند.

۴۱. سری توافقی‌متناوب $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ آنقدر کند همگراست که در محاسبهٔ $\ln 2$ ارزش عملی ندارد. نشان دهید که $\ln 2$ مجموع سری‌همگرای بسیار سریعترزیر نیز هست:

$$\ln 2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \cdots\right). \qquad (\text{دو})$$

۴۲. با استفاده از فرمول (دو)، $\ln 2$ را تا پنج رقم اعشار تقریب نمایید.

مجموع سریهای توانی زیر را بیابید.

۴۳. $1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$

۴۴. $1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \cdots \quad (|x| < 1)$

بسط سری توانی تابع x تعریف شده با انتگرال داده شده را بیابید.

۴۵. $\int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t^2}\, dt$ ۴۶. $\int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t}\, dt$

۴۷. $\int_0^x \frac{\ln(1 + t)}{t}\, dt$ ۴۸. $\int_0^x \cosh t^2\, dt$

در مسائل ۴۵ تا ۴۷، انتگرالده $f(x)$ را در $x = 0$ با پیوستگی تعریف کنید؛ یعنی، قرار دهید $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

با استفاده از سری توانی، انتگرال داده شده را تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

۴۹. $\int_0^{1/2} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ ۵۰. $\int_0^{1/5} \frac{\sinh x}{x}\, dx$

۵۱. $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ ۵۲. $\int_0^{2/3} \frac{dx}{1 + x^5}$

۵۳. فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \frac{f(x)}{1 - x}.$$

بسط سری توانی g در $x = 0$ را بیابید.

۸.۹ قضیهٔ تیلور و موارد استعمال آن

در بخش بعد به مسئلهٔ یافتن بسط سری توانی یک تابع می‌پردازیم. در حل این مسئله از یک قضیهٔ اساسی در تقریب توابع به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایها استفاده می‌کنیم که به بروک‌تیلور[1] ریاضیدان انگلیسی (۱۷۳۱–۱۶۸۵) منسوب است. برای آشنایی با قضیهٔ تیلور، ابتدا حالت خاصی را درنظر می‌گیریم که به **قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته** معروف است.

قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته. *فرض کنیم تابع f بر بازهٔ I مشتقپذیر باشد؛ یعنی، f*

---

1. Brook Taylor

در هر نقطه از I مشتق متناهی داشته باشد. در این صورت، با نوشتن x و t به جای b و c در قضیهٔ مقدار میانگین (۷)، صفحهٔ ۲۵۸، داریم

$$f(x) = f(a) + f'(t)(x-a), \tag{۱}$$

که در آن t نقطه‌ای بین a و x است. اگر t را با a عوض کنیم، تقریب خط مماس

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x \neq a) \tag{۲}$$

را خواهیم داشت.

وقتی این تقریب در بخش ۳.۲ معرفی شد، دیدیم که خطای تقریب به ازای $|x-a|$ کوچک کوچک است، ولی ما به تخمین خطا به‌ازای مقدار داده شده‌ای از $x-a$ (جز مسائل ۲۹ و ۳۰، صفحهٔ ۲۰۴) نمی‌پردازیم. حال تعمیمی از قضیهٔ مقدار میانگین (۱) را ثابت می‌کنیم که با آن می‌توان خطا را در حالتی که f، علاوه‌بر مشتق اول داشتن، مشتق دوم دارد تخمین زد.

قضیهٔ ۱۶ (قضیهٔ مقدار میانی تعمیم یافته). فرض کنیم f در هر نقطه از بازهٔ I مشتق دوم متناهی داشته باشد[1]، و a و x نقاط دلخواهی از I باشند. در این صورت، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست به طوری که

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(t)}{2}(x-a)^2. \tag{۳}$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم

$$h(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a), \qquad g(x) = (x-a)^2,$$

درنتیجه، در حالت خاص،

$$h(a) = g(a) = 0, \qquad h'(x) = f'(x) - f'(a).$$

در این صورت، با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین‌کشی (ر.ک. قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۲۶۱) بر توابع h و g بر بازهٔ $[a, x]$ اگر $x > a$ یا بر $[x, a]$ اگر $x < a$، داریم

---

۱. وجود مشتق دوم f'' بر I وجود و پیوستگی تابع f و مشتق اولش f' بر I را ایجاب می‌کند (چرا؟). به‌طورکلی، وجود مشتق مرتبهٔ $n+1$، $f^{(n+1)}$ بر I وجود و پیوستگی $f, f', \ldots, f^{(n)}$ بر I را ایجاب می‌کند.

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{h(x)-h(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{h'(t_1)}{g'(t_1)}=\frac{f'(t_1)-f'(a)}{2(t_1-a)},$$

که درآن t_1 بین a و x قرار دارد (تحقیق کنید که مفروضات قضیهٔ کشی برقرارند) . اما ، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین معمولی اعمال شده بر تابع f' در بازهٔ $[a, t_1]$ یا $[t_1, a]$ ،

$$f'(t_1)-f'(a)=f''(t)(t_1-a),$$

که در آن t بین a و t_1 ، و درنتیجه بین a و x ، قرار دارد . لذا ، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست که

$$\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{f''(t)(t_1-a)}{2(t_1-a)}=\frac{f''(t)}{2}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$h(x)=\frac{f''(t)}{2}\,g(x)=\frac{f''(t)}{2}(x-a)^2,$$

که با فرمول (۳) معادل می‌باشد . به‌طورکلی ، نقطهٔ t به هر دوی a و x بستگی دارد .

خطای تقریب خط مماس. جملهٔ آخر سمت راست (۳) خطای

$$E_{\mathrm{TL}}=\frac{f''(t)}{2}(x-a)^2$$

تقریب خط مماس (۲) است . بخصوص ، اگر f'' بر I پیوسته باشد ، نتیجه می‌شود که

$$|E_{\mathrm{TL}}|\le\frac{1}{2}(x-a)^2\max|f''|, \tag{۴}$$

که در آن $\max|f''|$ ماکزیمم $|f''(t)|$ بر بازهٔ بسته با نقاط انتهایی a و x می‌باشد .

مثال ۱ . $\cos 47°$ را بااستفاده‌از تقریب خط مماس (۲) به ازای $a=45°=\pi/4$ تخمین بزنید . سپس، با استفاده از نامساوی (۴) ، نشان دهید این تقریب تا سه رقم‌اعشاردقیق است .

حل . هرگاه $f(x)=\cos x$ ، آنگاه $f'(x)=-\sin x, f''(x)=-\cos x$ ، و فرمول (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\cos x=f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)=\cos a-(x-a)\sin a.$$

با اختیار

$$x=47°=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90},$$

داریم

$$\cos 47° = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right) \approx \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{90}\right) \approx 0.682.$$

ماکزیمم $|f''(t)| = |\cos t|$ بر بازهٔ $[45°, 47°]$ عبارت است از $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$. بنابراین طبق نامساوی (۴)،

$$|E_{TL}| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 4.3 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4},$$

و می‌توان مطمئن بود که تقریب ما از $\cos 47°$ تا سه رقم اعشار دقیق است.

قضیهٔ تیلور. قضیهٔ ۱۶ اولین تظریف قضیهٔ مقدار میانگین مستلزم مشتقات متوالی f و توانهای متوالی $x - a$ است. اینها همه حالات خاصی از قضیهٔ زیرند که اثباتش تا حدودی تکنیکی است؛ و لذا، به آخر بخش موکول شده است.

قضیهٔ ۱۷ (قضیهٔ تیلور). *فرض کنیم f در هر نقطه از بازهٔ I مشتق مرتبهٔ $n+1$ متناهی داشته، و a و x نقاط دلخواهی از I باشند. در این صورت، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست به طوری که*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \tag{۵}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

فرمول تیلور و چند جمله‌ایهای تیلور. فرمول (۵) به فرمول تیلور (*با باقیمانده*) معروف است. این فرمول تابع $f(x)$ را در مجاورت $x = a$ به صورت مجموع

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

چندجمله‌ای

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{۶}$$

از درجهٔ n نسبت به متغیر $x - a$ و جملهٔ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

به نام *باقیمانده*، نمایش می‌دهد. (چون $P_n(x)$ در حالت کلی مجموع $n+1$ جمله‌است، باقیمانده‌ٔ $R_n(x)$ علی‌رغم زیرنویس n عملا" باقیمانده پس‌از $n+1$ جمله می‌باشد.) چند جمله‌ای $P_n(x)$ **چند جمله‌ای تیلور** n م f در $x = a$ نام‌دارد، و دارای این خاصیت‌کلیدی است که مقدار آن و مقادیر n مشتق اولش در نقطهٔ $x = a$ با مقدارتابع f و مقادیرn مشتق اول f در $x = a$ یکی است. در واقع، j مشتقگیری متوالی از فرمول (۶) نتیجه می‌دهدکه

$$P_n^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}$$

$$= f^{(j)}(a) + f^{(j+1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-j)!}(x-a)^{n-j}$$

$$(j = 0, 1, \ldots, n),$$

و سپس با گذاردن $x = a$ در آن فورا" خواهیم داشت

$$P_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

در پرتو این تناسب مشتقات، انتظارداریم $P_n(x)$ تقریب‌مناسبی‌به $f(x)$ درمجاورت $x = a$ باشد، که با بزرگترشدن n بهترمی‌شود، و این، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، معمولا" درست است[۱].

مثال ۲. تابع $f(x) = e^x$ را به‌وسیلهٔ چهار چندجمله‌ای‌تیلور اول‌خود درمجاورت $x = 0$ تقریب نمایید.

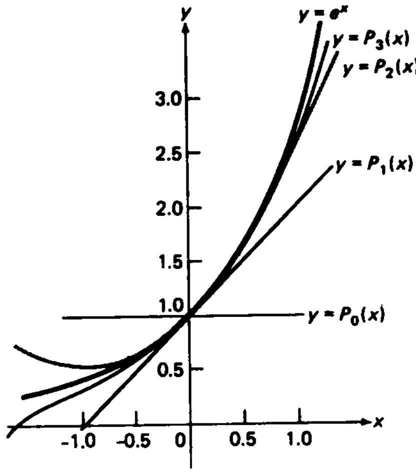
حل. چون به ازای هر n، $f^{(n)}(x) = D_x^n e^x = e^x$، چهار چندجمله‌ای‌تیلور اولیه (به ازای $a = 0$) عبارتنداز

$$P_0(x) = f(0) = 1,$$
$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x,$$
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$
$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

---

۱. *این به خاطر وجود تابعی که در آن تقریب $f(x) \approx P_n(x)$ به ازای هر n ضعیف است (ر. ک. مثال ۷ درآخر بخش) استثناء نیز دارد.*

شکل ۱۲ نمودارهای e^x و این چندجمله‌ایها را در یک دستگاه مختصات قائم نشان می‌دهد. البته، تقریب $e^x \approx P_0(x)$ خیلی خام است، زیرا $P_0(x)$ دارای مقدار ثابت 1 است، ولی



تقریب e^x به‌وسیلهٔ چندجمله‌ایهای تیلور

شکل ۱۲

$e^x \approx P_1(x)$ تقریب خط مماس است، که به‌ازای مقادیر کوچک $|x|$ کاملا" مناسب است. تقریب بهتر با $e^x \approx P_2(x)$ داده می‌شود، که در آن نمودار e^x در مجاورت $x = 0$ با سهمی

$$y = P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$$

تقریب می‌شود تا با خط مستقیم $y = P_1(x) = 1 + x$. اما تقریب e^x به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای مکعبی $P_3(x)$ از این هم بهتر است. در واقع، بنابر قضیهٔ تیلور،

$$e^x = P_3(x) + R_3(x),$$

که در آن

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(t)}{4!}x^4 = \frac{e^t}{24}x^4 \quad (\text{بین } 0 \text{ و } x \;\; t)$$

درنتیجه، خطای تقریب $e^x \approx P_3(x)$ روی تمام بازهٔ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ مثبت و کوچکتر از

$$\frac{e^{1/2}}{24}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0.0043$$

است. در اینجا از این استفاده کرده‌ایم که ماکزیمم e^t بر این بازه $e^{1/2}$ است، زیرا e^t یک تابع صعودی است.

مثال ۳. فرمول تیلور را برای تابع $f(x) = 1/x$ در نقطهٔ $a = 1$ به ازای $n = 3$ بنویسید.

حل. تابع و چهار مشتق اول آن عبارتنداز

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

با گذاردن $a = 1$ و $n = 3$ در فرمول (۵) و فرض $x > 0$ (چرا؟)، معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{x} = f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-1)^4$$
$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{t^5},$$

که در آن t بین 1 و x است.

مثالهای زیر طرق استفاده‌از فرمول تیلور به‌عنوان یک‌ابزارمحاسبه‌ای‌را نشان‌می‌دهند.

مثال ۴. با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 3$، تقریب خط مماس $\cos 47°$ داده‌شده‌در مثال ۱ را بهتر کنید.

حل. فرض‌کنیم $f(x) = \cos x$. در این صورت، $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x$، $f'''(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x$، و با انتخاب $n = 3$ در فرمول (۵) داریم

$$\cos x = f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-a)^4$$
$$= \cos a - (x-a)\sin a - \frac{(x-a)^2}{2}\cos a + \frac{(x-a)^3}{6}\sin a + \frac{(x-a)^4}{24}\cos t,$$

که در آن t بین a و x است. این به ازای $a = 45° = \pi/4, x = 47°$ نتیجه می‌دهد که

$$\cos 47° = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\right) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2\cos\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4\cos t \qquad (45° < t < 47°),$$

و درنتیجه،

$$\cos 47^\circ \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\frac{\pi}{90}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{90}\right)^3\right] \approx 0.6819983, \qquad (۷)$$

که در آن خطای این تقریب، که به خاطر وجود " دو جملهٔ بیشتر " شامل توانهای دوم و سوم $\pi/90$ با تقریب خط مماس در مثال ۱ فرق دارد، با باقیماندهٔ زیر داده می‌شود:

$$R_3 = \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 \cos t \qquad (45^\circ < t < 47^\circ).$$

ولی ماکزیمم $\cos t$ بر بازهٔ $[45^\circ, 47^\circ]$ عبارت است از $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. بنابراین،

$$R_3 \le \frac{1}{24\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{90}\right)^4 \approx 4.4 \times 10^{-8} < 5 \times 10^{-8},$$

و می‌توان مطمئن بود که تقریب (۷) تا هفت رقم اعشار دقیق است.

مثال ۵. چندجمله‌ای $Q(x) = 4 - 2x - x^2 + x^3$ را به یک چندجمله‌ای با متغیر جدید $x + 1$ تبدیل نمایید.

حل. با اختیار $f(x) = Q(x), a = -1, n = 3$ در فرمول تیلور، داریم

$$Q(x) = Q(-1) + Q'(-1)(x+1) + \frac{Q''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{Q'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + R_3(x),$$

که در آن باقیماندهٔ $R_3(x)$ به دلیل $Q^{(4)}(x) \equiv 0$ صفر است (بیشتر توضیح دهید). ولی

$$Q'(x) = -2 - 2x + 3x^2, \qquad Q''(x) = -2 + 6x, \qquad Q'''(x) = 6,$$

و لذا،

$$Q(-1) = 4, \qquad Q'(-1) = 3, \qquad Q''(-1) = -8, \qquad Q'''(-1) = 6,$$

درنتیجه،

$$Q(x) = 4 + 3(x+1) - 4(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

این را می‌توان به‌طور جبری با تحقیق اینکه عبارت سمت راست متحدا" مساوی $4 - 2x - x^2 + x^3$ است به‌آسانی امتحان کرد.

مثال ۶. با استفاده از فرمول تیلور، نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

حل . با اختیار $f(x) = \sin x,\ a = 0,\ n = 4$ در فرمول تیلور و توجه به اینکه

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x$$

داریم

$$\sin x = \sin 0 + x\cos 0 - \frac{1}{2}x^2 \sin 0 - \frac{1}{6}x^3 \cos 0 + \frac{1}{24}x^4 \sin t$$
$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \sin t,$$

که در آن t بین 0 و x قرار دارد . بنابراین ،

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 \sin t}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}x \sin t\right) = \frac{1}{6}$$

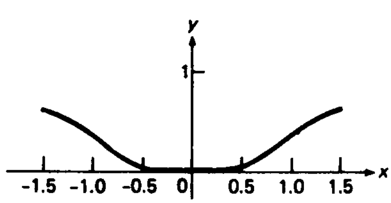
(وقتی $x \to 0$ ، $t \to 0$) . این حد قبلاً در مثال ۳ ، صفحهٔ ۳۱۶ ، به کمک قاعدهٔ هوپیتال حساب شده است .

با وجود آنکه یک تابع معمولاً بهوسیلهٔ چندجملهایهای تیلور با درجهٔ بهقدر کافی بالای آن بهخوبی تقریب میشود ، مثال بعدی نشان میدهد که حالاتی استثنایی نیز میتوانند رخ دهند .

مثال ۷ . فرض کنید $P_n(x)$ چندجملهای تیلور n م تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \text{ اگر} \\ 0, & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

رسم شده در شکل ۱۳ باشد . نشان دهید که به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $P_n(x) \equiv 0$.



نمودار $y = f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \text{ اگر} \\ 0, & x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$

شکل ۱۳

حل (اختیاری) . چون

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$$

$(t = 1/x^2)$ ، تابع f در $x = 0$ پیوسته است . به‌علاوه ، اگر $x \neq 0$ ،

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-1/x^2}, \ldots, \quad f^{(n)}(x) = Q_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2},$$

که در آن $Q_{3n}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $3n$ است . اما ، به کمک جانشانی $t = 1/x^2$ و قاعدهٔ هوپیتال ، به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، داریم

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{n/2}}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{e^{2t/n}}\right)^{n/2} = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{2t/n}}\right)^{n/2}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{D_t t}{D_t e^{2t/n}}\right)^{n/2} = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(2/n)e^{2t/n}}\right)^{n/2} = 0$$

درنتیجه ، به ازای هر چندجمله‌ای $Q(x)$ ،

$$\lim_{x\to 0} Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$$

فرض کنیم $f^{(k)}(0) = 0$. در این صورت ،

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} Q_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} Q^*_{3k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0,$$

که در آن از چندجمله‌ای بودن $Q^*_{3k+1}(x) = xQ_{3k}(x)$ از درجهٔ $3k + 1$ استفاده می‌کنیم. بنابراین ، اگر $f^{(k)}(0)$ مساوی صفر باشد ، $f^{(k+1)}(0)$ نیز چنین است . اما $f'(0)$ مساوی صفر است ، زیرا

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0,$$

و درنتیجه ،بنابراستقرا ی ریاضی ، به ازای هر $n = 1, 2, \ldots$ ، $f^{(n)}(0) = 0$ (ر.ک. ضمیمه، صفحهٔ ۱۵۷۸) .

لذا ، تابع f و تمام مشتقاتش (از هر مرتبهٔ دلخواه) در $x = 0$ صفرند . این به خاطر " تخت بودن " پایین منحنی $y = f(x)$ در مجاورت $x = 0$ است (ر.ک. شکل ۱۳) .

پس نتیجه می‌شود که هر چندجمله‌ای تیلور $P_n(x)$ از f در $x = 0$ متحد صفر است. درنتیجه اگر $x \neq 0$ ، درصد خطای تقریب $f(x) \approx P_n(x)$ همواره ، بی‌توجه به مقدار n ، مساوی 100% می‌باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۳۱ ، صفحهٔ ۲۰۴) .

برهان قضیهٔ ۱۷ *(اختیاری)*. فرض کنیم

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \qquad g(x) = (x-a)^{n+1}$$

(به یاد آورید که $f^{(0)} \equiv f$) . در این صورت ، پس از n مشتقگیری متوالی از h ،

$$\begin{aligned}
h'(x) &= f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},\\
h''(x) &= f''(x) - f''(a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2},\\
&\ \vdots\\
h^{(n-1)}(x) &= f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a),\\
h^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a),
\end{aligned}$$

حال آنکه

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (n+1)(x-a)^n,\\
g''(x) &= (n+1)n(x-a)^{n-1},\\
&\ \vdots\\
g^{(n-1)}(x) &= (n+1)n(n-1)\cdots 3(x-a)^2,\\
g^{(n)}(x) &= (n+1)!(x-a),
\end{aligned}$$

درنتیجه ، در حالت خاص ،

$$h(a) = g(a) = 0, \quad h'(a) = g'(a) = 0, \ldots, \quad h^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) = 0.$$

با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین کشی بر توابع h و g بر بازهٔ $[a, x]$ اگر $a < x$ یا بر $[x, a]$ اگر $x < a$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)},$$

که در آن t_1 بین a و x قرار دارد . با اعمال مجدد همین قضیه بر توابع h' و g' بر بازهٔ

$[a, t_1]$ یا $[t_1, a]$ ، درمی‌یابیم که

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{h'(t_1) - h'(a)}{g'(t_1) - g'(a)} = \frac{h''(t_2)}{g''(t_2)},$$

که در آن t_2 بین a و t_1 ، و درنتیجه بین a و x ، است . بالاخره ، پس از n بار کاربـرد قضیهٔ مقدار میانگین ، به دست می‌آوریم

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h^{(n)}(t_n)}{g^{(n)}(t_n)} = \frac{f^{(n)}(t_n) - f^{(n)}(a)}{(n+1)!(t_n - a)},$$

که در آن t_n بین a و t_{n-1} ، و درنتیجه بین a و x ، است . اما ، با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین بر تابع $f^{(n)}$ در بازهٔ $[a, t_n]$ یا $[t_n, a]$ ، داریم

$$f^{(n)}(t_n) - f^{(n)}(a) = f^{(n+1)}(t)(t_n - a),$$

که در آن t بین a و t_n ، و درنتیجه بین a و x ، است . لذا ، نقطه‌ای مانند t بین a و x وجود دارد به طوری که

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(t)(t_n - a)}{(n+1)!(t_n - a)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\, g(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

که با فرمول (۵) ، صفحهٔ ۸۸۳ ، معادل می‌باشد . به‌طور کلی ، نقطهٔ t به a ، x ، و n وابسته خواهد بود .

مسائل

اعداد زیر را با استفاده از تقریب خط مماس (۲) تخمین بزنید .

۱ . $\sqrt{171}$ ۲ . $\sqrt[3]{215}$

۳ . $1/2.01$ ۴ . $\ln(0.98)$

۵ . $\tan 43°$ ۶ . $\arctan(1.04)$

در هر حالت ، پس از تخمین خطا به وسیلهٔ (۴) ، تعداد ارقام اعشاری دقیق را پیدا نمایید .

چندجمله‌ای تیلور $P_n(x)$ و باقیماندهٔ $R_n(x)$ را به ازای مقادیر مشخص a و n برای تابع داده

شده بیابید .

۷. $\sqrt{x}, a = 4, n = 2$

۸. $1/x^2, a = -2, n = 3$

۹. $e^{-x}, a = 1, n = 3$

۱۰. $xe^x, a = 0, n = 4$

۱۱. $\ln x, a = 2, n = 4$

۱۲. $x \ln x, a = e, n = 3$

۱۳. $\cos x, a = 0, n = 6$

۱۴. $\sin x, a = \pi/4, n = 3$

۱۵. $\tan x, a = 0, n = 3$

۱۶. $x \cos x, a = \pi/2, n = 5$

۱۷. $\sin^2 x, a = 0, n = 6$

۱۸. $1/(1 - x), a = 2, n = 4$

۱۹. $\sinh x, a = 1, n = 3$

۲۰. $\ln(\cos x), a = 0, n = 4$

۲۱. محاسبات مسئلهٔ ۱ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 2$ به جای تقریب خط مماس تکرار کرده و، پس از تخمین باقیمانده، تعداد ارقام دقیق اعشاری را مشخص نمایید .

۲۲. همین کار را در مسئلهٔ ۲ انجام دهید .

۲۳. همین کار را در مسئلهٔ ۳ انجام دهید .

۲۴. محاسبات مسئلهٔ ۴ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 3$ تکرار کرده و، پس از تخمین باقیمانده، تعداد ارقام دقیق اعشاری را مشخص نمایید .

۲۵. همین کار را در مسئلهٔ ۵ انجام دهید .

۲۶. همین کار را در مسئلهٔ ۶ انجام دهید .

۲۷. تحقیق کنید که اگر $94 \le x \le 106$ ، تقریب $\sqrt{x} \approx 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$ تا دو رقم اعشار دقیق است .

۲۸. فرض کنید x نقطه‌ای در بازهٔ $[-1, 1]$ باشد. نشان دهید که قدرمطلق خطای تقریب $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ از $\frac{1}{24}$ متجاوز نیست، حال آنکه قدرمطلق خطای تقریب $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ از $\frac{1}{120}$ تجاوز نمی‌کند .

۲۹. فرض کنید $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور n م تابع بی‌نهایت مشتقپذیر f بر بازهٔ $[-a, a]$ در $x = 0$ باشد. نشان‌دهیداگر f بر $[-a, a]$ زوج باشد، $P_n(x)$ فقط شامل توانهای زوج x است و اگر f بر $[-a, a]$ فرد باشد، فقط شامل توانهای فرد x می‌باشد .

چندجمله‌ای داده شدهٔ $Q(x)$ را به یک چندجمله‌ای از متغیر جدید ذکر شده تبدیل نمایید .

۳۰. $Q(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, x + 1$

۳۱. $Q(x) = 4 - 3x^2 + 2x^4 - x^6, x - 1$

۳۲. $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4, x + 2$

۳۳. $Q(x) = 1 + 2x^2 - 4x^3 + x^4, x - 5$

۳۴. $Q(x)=x^3, x-\frac{1}{2}$

۳۵. $Q(x)=x^4+1, x-10$

حد داده شده را با استفاده از فرمول تیلور حساب کنید.

۳۶. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

۳۷. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

۳۸. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

۳۹. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$

۴۰. تعمیم زیر از آزمون مشتق دوم برای اکسترمم موضعی را ثابت کنید (قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۲۷۲) : هرگاه

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \qquad (n\geq 2),$$

و مشتق n م $f^{(n)}(a)$ متناهی و مخالف صفر باشد، آنگاه f در a مینیمم موضعی اکید دارد اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(a)>0$ ، و f در a ماکزیمم موضعی اکید دارد اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(a)<0$ ، ولی اگر n فرد باشد اکسترمم نخواهد داشت.

۹.۹ سریهای تیلور و ماکلورن

بنابر فرمول تیلور (ر.ک. صفحهٔ ۸۸۳) ، هرگاه تابع f در هر نقطه از بازهٔ I شامل نقطهٔ a دارای مشتق مرتبهٔ $n+1$ م متناهی باشد، آنگاه به ازای هر x در I ،

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \qquad (1)$$

که درآن باقیماندهٔ $R_n(x)$ عبارت است از

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (\text{بین } a \text{ و } x \text{ } t)\,.$$

فرض کنیم f بر I بی‌نهایت بار مشتقپذیر باشد؛ درنتیجه، f از هر مرتبه بر I مشتق دارد. در این صورت، (۱) به ازای n بدلخواه بزرگ برقرار است. این پیشنهاد می‌کند که سری

نامتناهی زیر را بررسی کنیم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots. \qquad (۲)$$

سری (۲) ، که یک‌سری توانی نسبت‌به متغیر $x - a$ است ، بی‌توجه به همگرا بودن‌یا نبودن سری به f ، *سری (بسط) تیلور* f در $x = a$ نامیده می‌شود . این انتساب لازم است ، زیرا حالاتی وجود دارند که سری تیلور f همگرا به f نمی‌باشد (ر.ک. مثال ۶ زیر) .بااینحال تنها حالتی که اهمیت عملی دارد وقتی است که سری تیلور f همگرا به f است ، و در این صورت گوییم " f مجموع سری تیلور خود می‌باشد" .

همگرایی سری تیلور . ممکن است بودن f به عنوان مجموع سری تیلور خود را تابع رفتار باقیماندهٔ $R_n(x)$ در فرمول تیلور (۱) بدانید . قضیهٔ زیر صحت این امر را نشان‌می‌دهد.

قضیهٔ ۱۸ (محک همگرایی برای یک سری تیلور) . *سری تیلور (۲) بر بازهٔ I همگرا به f است اگر و فقط اگر به ازای هر x در I ،*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (۳)$$

برهان . فرمول (۱) برحسب چندجمله‌ایهای تیلور

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

به صورت زیر درمی‌آید :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

و این چندجمله‌ایها مجموعهای جزئی سری تیلور (۲) می‌باشند . بنابراین ، (۲) بر I همگرا به f است اگر و فقط اگر

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) \quad (I \text{ در } x)$$

یا معادلا"

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - P_n(x)] = 0 = \lim_{n\to\infty} R_n(x) \quad (I \text{ در } x)$$

لذا، اگر شرط (۳) برقرار باشد، می‌توان نوشت

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \qquad (۴)$$

با اطمینان کامل از اینکه سری توانی سمت راست به تابع سمت چپ همگراست. به‌ازای $a = 0$، سری تیلور (۴) به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \qquad (۵)$$

یک سری تیلور به شکل خاص (۵) را غالبا"، به افتخار ریاضیدان اسکاتلندی، کولین ماکلورن[1] (۱۶۹۸–۱۷۴۶)، یک سری **ماکلورن** می‌نامند.

مثال ۱. فرض کنیم $\sum c_n(x-a)^n$ یک‌سری توانی با بازهٔ همگرایی I و مجموع f باشد. نشان دهید که $\sum c_n(x-a)^n$ سری **تیلور** f در $x = a$ است. (لذا، سری تیلور تابع مجموع یک سری توانی خود سری توانی می‌باشد.)

حل. بنابر قضیهٔ ۱۴، صفحهٔ ۸۶۸، می‌توان از سری توانی

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \quad (\text{در } I \ x)$$

n بار مشتق گرفت. از این نتیجه می‌شود که

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots \quad (\text{در } I \ x)$$

که پس از گذاردن $x = a$ در آن ایجاب می‌کند که

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(توجه کنید که $0! = 1$ ،$f^{(0)} \equiv f$). اما، در این صورت،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

یعنی، $\sum c_n(x-a)^n$ سری تیلور f در $x = a$ است. طبعا"، این سری تیلور در هر نقطه از I همگرا به f می‌باشد.

---

1. Colin Maclaurin

مثال ۲ . سری ماکلورن e^x را بیابید .

حل . هرگاه $f(x) = e^x$ ، آنگاه به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1$ ، و سری ماکلورن (۵) به صورت زیر درمی‌آید :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad (۶)$$

مشروط بر اینکه سری سمت راست همگرا به e^x باشد . برای تحقیق این امر ، باقیماندهٔ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}$$

را بررسی می‌کنیم ، که در آن t بین 0 و x قرار دارد (توجه کنید t علاوه‌بر x به n نیز وابسته است) . واضح است که اگر x معلوم باشد ، به ازای هر n

$$0 \leq |R_n(x)| \leq M \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \qquad (۷)$$

که در آن M ماکزیمم e^t بر بازهٔ $[0, x]$ است اگر $0 < x$ یا بر بازهٔ $[x, 0]$ است اگر $x < 0$ ؛ یعنی ،

$$M = \begin{cases} e^x & \text{، } x > 0 \text{ اگر} \\ 1 & \text{، } x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

به‌علاوه ، به ازای هر x ثابت ،

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0 \qquad (۸)$$

زیرا ، بنابر آزمون نسبت ، سری توانی با جملهٔ عمومی $x^n/n!$ به‌طور مطلق همگراست (تحقیق کنید) . بنابراین ، با گرفتن حد در (۷) وقتی $n \to \infty$ ، معلوم می‌شود که‌وقتی $n \to \infty$ ، $|R_n(x)| \to 0$ ، یا معادلاً" به ازای هر x ،

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

(توجه کنید که به ازای هر n ، $R_n(0) = 0$) . لذا ، سری (۶) بر تمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ همگرا به e^x می‌باشد .

به یاد می‌آورید که برقراری (۶) قبلاً" در مثال ۵ ، صفحهٔ ۸۷۰ ، به روش کاملاً"

متفاوتی ثابت شده است .

سریهای ماکلورن $\sin x$ و $\cos x$

مثال ۳ . سری ماکلورن $\sin x$ را بیابید .

حل . هرگاه $f(x) = \sin x$ ، آنگاه

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), & f''(0) &= 0,\\
f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), & f'''(0) &= -1,\\
&& &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0) &= \sin\frac{n\pi}{2},\\
f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

و (۵) به صورت زیر درمیآید :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{۹}$$

اما باقیمانده مساوی است با

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(t + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

که در آن t بین 0 و x است (x در اینجا دلخواه ولی ثابت است) . چون به ازای t و n دلخواه

$$\left|\sin\left(t + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right| \le 1$$

داریم

$$0 \le |R_n(x)| \le \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|,$$

و درنتیجه، به‌خاطر (۸)،

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

بنابراین، (۹) سری ماکلورن $\sin x$ برتمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ می‌باشد. سری (۹) را می‌توان به‌طور فشرده نیز نوشت:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

مثال ۴. سری ماکلورن $\cos x$ را بیابید.

حل. می‌توان استدلالی شبیه استدلال مثال قبل آورد، ولی ساده‌تر آن است که از سری ماکلورن $\sin x$، به کمک قضیهٔ ۱۴، صفحهٔ ۸۶۸، جمله به جمله مشتق بگیریم. از این فورا" نتیجه می‌شود که

$$\cos x = \frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

یعنی،

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

مثال ۵. سری تیلور $\sin x$ را در $x = \pi/4$ بیابید.

حل. این بار داریم

$$f(x) = \sin x, \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

و (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots\right],$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{[\![n/2]\!]}}{n!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n, \qquad (۱۰)$$

که در آن $[\![n/2]\!]$ قسمت صحیح $n/2$ است. اساساً همان تحلیل مثال ۳ از باقیمانده نشان می‌دهد که به ازای هر x،

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

لذا، سری تیلور (۱۰) بر تمام بازهٔ $(-\infty, \infty)$ همگرا به $\sin x$ می‌باشد.

مثال ۶. نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

مجموع سری تیلور خود در $x = 0$ نیست.

حل. فرض کنیم $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلور n م f در $x = 0$ باشد. همانطور که در مثال ۷، صفحهٔ ۸۸۸، نشان دادیم، به ازای هر $n = 0, 1, 2, \ldots$، $P_n(x) \equiv 0$؛ درنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) \equiv 0.$$

پس نتیجه می‌شود که مجموع سری تیلور f در $x = 0$ مساوی f نیست، بلکه مساوی تابعی است که متحد صفر می‌باشد.

لازم است تأکید کنیم که استفادهٔ مستقیم فرمول (۴) یا (۵) برای یافتن سری تیلور یا ماکلورن یک تابع اغلب به محاسباتی منجر می‌شود که بسیار زیاد یا دست‌نیافتنی هستند.

لذا ، همواره باید در پی راههایی برای بیان یک سری تیلور جدید برحسب سری تیلوری‌که از قبل بر ما معلوم است باشیم . مثلا" ، برای یافتن سری ماکلورن x^4e^x ، به‌جای محاسبهٔ مشتقات x^4e^x ، محاسبهٔ آنها در $x = 0$ ، و گذاردن مقادیر حاصل در فرمول (۵) ، کافی است سری ماکلورن معلوم e^x را در x^4 ضرب می‌کنیم ، که فورا" نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} x^4e^x &= x^4\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \\ &= x^4 + x^5 + \frac{x^6}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+4}}{n!} + \cdots . \end{aligned}$$

به همین نحو ، برای یافتن سری تیلور e^x در $x = 1$ ، کافی است توجه کنیم که

$$e^x = e^1e^{x-1} = e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \cdots\right],$$

زیرا در سری ماکلورن e^x می‌توان x را با $x - 1$ عوض کرد (چرا؟) .

هرگاه سری تیلور تابع f در $x = a$ *همگرا* به f باشد ، آنگاه دقیقا" مساوی چیزی است که قبلا" بسط سری توانی f در $x = a$ نامیده‌شد . این نتیجهٔ فوری خاصیت یکتایی سری توانی است که در مثال ۴ ، صفحهٔ ۸۷۰ ، بحث شد . لذا ، در یافتن سری تیلور ، تمام تکنیکهای بخش ۹٫۷ هنوز در اختیار ما بوده و می‌توان آنها را آزادانه به کار برد . به‌کمک آنهاست که اغلب می‌توان سری تیلور تابع معلوم f را غیرمستقیم ، بدون محاسبهٔ مشتقات f یا بررسی باقیماندهٔ $R_n(x)$ ، پیدا کرد . مثلا" ، ما قبلا" در مثال ۸ ، صفحهٔ ۸۷۴ ، سری ماکلورن $\arctan x$ را به دست آورده‌ایم .

مسائل

۱ . نشان دهید که به ازای هر x ،

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{(یک)}$$

از فرمول (۵) شروع کرده و رفتار باقیماندهٔ $R_n(x)$ را وقتی $n \to \infty$ بررسی نمایید .

۲ . از سری (یک) مستقیما" نتیجه بگیرید که سری

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{(یگ)}$$

به ازای هر x معتبر است .

۳. نشان دهید که

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad (0 \le x < 1). \tag{دو}$$

از فرمول (۵) شروع کرده، و رفتار باقیمانده‌ٔ $R_n(x)$ را وقتی $n \to \infty$ بررسی نمایید. (اعتبار این بسط سری توانی $\ln(1+x)$ بر بازه‌ٔ بزرگتر از $-1 < x < 1$ قبلا" در مثال ۷، صفحه‌ٔ ۸۷۳، به روشی دیگر ثابت شده است.)

۴. با بررسی باقیمانده‌ٔ $R_n(1)$، نشان دهید که فرمول (دو) به ازای $x = 1$ نیز معتبر است؛ درنتیجه، همانطور که قبلا" در صفحه‌ٔ ۸۷۴ به کمک قضیه‌ٔ آبل‌نشان‌دادیم،

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{دوʹ}$$

پنج جمله‌ٔ اول ناصفر سری ماکلورن عبارات زیر را بیابید.

۵. $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ۶. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

۷. $e^x \cos x$ ۸. $e^x \sin x$

سه جمله‌ٔ اول ناصفر سری ماکلورن عبارات زیر را بیابید.

۹. $\ln(1 + e^x)$ ۱۰. $e^{\sin x}$

۱۱. $e^{\cos x}$ ۱۲. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

۱۳. چهار جمله‌ٔ اول سری ماکلورن $e^{1/(1-x)}$ را بیابید.

۱۴. با استفاده از فرمول $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$، سری ماکلورن تابع $\cos^2 x$ را بیابید.

سری تیلور $\sin x$ را در نقاط زیر بیابید.

۱۵. $\pi/6$ ۱۶. $-\pi/3$ ۱۷. $\pi/2$ ۱۸. π

سری تیلور $\cos x$ را در نقاط زیر بیابید.

۱۹. $\pi/4$ ۲۰. $\pi/2$ ۲۱. $-\pi$ ۲۲. 2π

سری تیلور عبارات زیر را بیابید.

۲۳. $\sqrt{x}$ در $x = 4$ ۲۴. $\sqrt[3]{x}$ در $x = -1$

۲۵. $1/x^2$ در $x = 1$ ۲۶. e^x در $x = -2$

۲۷. $e^{x/3}$ در $x = 2$ ۲۸. $\sin^2 x$ در $x = 0$

۲۹. با استفاده از سری ماکلورن، نشان دهید به ازای هر x، $\cosh x \le e^{ax^2}$ اگر وفقط اگر

$a \ge \frac{1}{2}$

۳۰. سری ماکلورن توابع

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2\,dt, \qquad C(x) = \int_0^x \cos t^2\,dt,$$

به نام *انتگرالهای فرنل*[1] را بیابید که در بررسی بعضی از پدیده‌های نوری ظاهر می‌شوند.

۳۱. سری ماکلورن تابع

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$$

را به "روش ضرایب نامعین "بیابید ؛ یعنی ، با فرض $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ ، ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ را طوری اختیار کنید که

$$1 - x + x^2 \equiv (1 + x + x^2)(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots).$$

(این فرایند با " تقسیم متوالی " صورت بر مخرج معادل است .) مقدار $f^{(5)}(0)$ چقدر است؟

با استفاده از روش ضرایب نامعین ، چهار جملهٔ اول سری ماکلورن توابع زیر را بیابید .

۳۲. $\sec x$ ۳۳. $\tan x$

۹.۱۰ روش نیوتن

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ $I = [a, b]$ مشتقپذیر (و درنتیجه ، پیوسته) بوده ، و f' هرگز بر I صفر نشود . همچنین ، $f(a)f(b) < 0$ ؛ درنتیجه ، $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه‌اند . بنا بر قضیهٔ مقدار میانی ، معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای جواب یا ریشهٔ r در (a, b) است ، و r منحصر به فرد است ، زیرا f بر I یکنواست (چرا؟) . در صفحهٔ ۱۵۴ یک روش تقریب r با دقت مطلوب ، به نام **روش تنصیف** ، ارائه شد ، ولی روش ارزش عملی زیادی ندارد ، زیرا برای به دست آوردن دقتی کم به اعمال زیادی نیاز داریم . حال ، به کمک قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته (قضیهٔ تیلور به ازای $n = 1$) ، روش بسیار تواناتری برای تقریب r ، به نام **روش نیوتن** ، به دست می‌آوریم . در این روش ، که به **روش نیوتن ــ رفسون**[2] نیز معروف است ، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از " تقریبات متوالی " به r تولید می‌شود ، که‌دربسیاری

1. *Fresnel*

2. *Raphson*

از حالات خیلی سریع به r همگرا می‌باشد .

قضیهٔ ۱۹ (روش نیوتن) . فرض کنیم تابع f بربازهٔ $I = [a, b]$ مشتق دوم پیوسته داشته باشد به طوری که f' و f'' بر I ناصفر بوده و $f(a)f(b) < 0$. همچنین ، $\{x_n\}$ دنبالهٔ تعریف شده با فرمول بازگشتی زیر باشد :

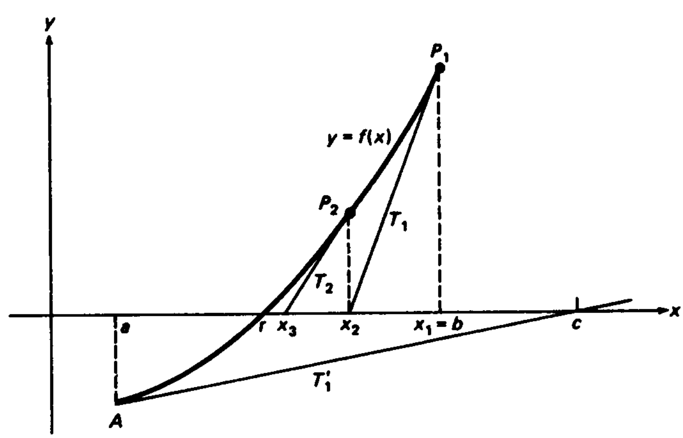
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

که در آن $x_1 = b$ اگر f' و f'' همعلامت باشند ، ولی $x_1 = a$ اگر f' و f'' مختلف العلامه باشند . در این صورت ، $\{x_n\}$ همگرا به r ، یعنی ریشهٔ منحصر به فرد معادلهٔ $f(x) = 0$ در I ، بوده و نیز

$$|x_{n+1} - r| \le \frac{M}{2m} |x_n - r|^2, \tag{2}$$

که در آن m مینیمم $|f'(x)|$ بر I و M ماکزیمم $|f''(x)|$ بر I است .

تعبیر هندسی روش نیوتن . برهان قضیهٔ ۱۹ نسبتاً " ظریف است ، و از اینرو به آخر بخش برده شده است . با اینحال ، تعبیر هندسی ساده‌ای برای روش نیوتن وجود داردکه‌درشکل ۱۴ برای حالتی که f' و f'' هر دو بر $I = [a, b]$ مثبت‌اند شرح داده شده است ؛ درنتیجه، f بر I صعودی و به بالا مقعر بوده و $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. چون f' و f'' همعلامت‌انـــد ،



تعبیر هندسی روش نیوتن

شکل ۱۴

جملهٔ اول دنبالهٔ x_n مساوی $x_1 = b$ ، یعنی نقطهٔ انتهایی راست I ، اختیار شده‌است . فرض کنیم T_1 مماس (چپ) بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P_1 = (x_1, f(x_1))$ باشد . در این صورت ، خط T_1

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$

با قطع x

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

می‌باشد ، که همان فرمول (۱) به ازای $n = 1$ است . به همین نحو ، هرگاه T_2 مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $P_2 = (x_2, f(x_2))$ باشد ، آنگاه خط T_2

$$y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2),$$

با قطع x

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

است ، که همان فرمول (۱) به ازای $n = 2$ می‌باشد ؛ و همین‌طور هرچند مرحله که مطلوب باشد . از شکل واضح است که تحت شرایط مطلوب ، دنبالهٔ تقریبات متوالی $\{x_n\}$ باسرعت زیاد به قطع x خود منحنی $y = f(x)$ ، یعنی ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ ، همگراست . این ، به‌طور جبری ، نتیجه‌ای است از فرمول (۲) ، که نشان می‌دهد که قدرمطلق خطا در هر مرحله از تقریب از حاصل‌ضرب یک ثابت در مربع خطای مرحلهٔ قبل تجاوز نمی‌کند. مثلاً " فرض کنیم $M/2m = 1$ و $|x_n - r| < 5 \times 10^{-5}$ ؛ درنتیجه ، تقریب $r \approx x_n$ تا چهار رقم اعشار دقیق است . پس

$$|x_{n+1} - r| < |x_n - r|^2 < 25 \times 10^{-10} = 2.5 \times 10^{-9},$$

درنتیجه ، تقریب بعدی $r \approx x_{n+1}$ قبلاً " تا هشت رقم اعشار دقیق خواهد بود!

شکل ۱۴ همچنین نشان می‌دهد که اگر دقیق نباشیم ،چگونه روش نیوتن فرومی‌ریزد. فرض کنید برای تابع f این شکل جملهٔ اول دنبالهٔ $\{x_n\}$ را (به خاطر نیاز در قضیهٔ ۱۹) به جای $x_1 = b$ ، $x_1 = a$ اختیار کرده باشیم . در این صورت ، چون مماس بر $y = f(x)$ در $A = (a, f(a))$ خط T'_1 است که قطع x ش c خارج بازهٔ I که f بر آن تعریف شده قرار دارد ، فرایند تقریب پس از درست یک مرحله به حال توقف درمی‌آید . اگر مفروضات دیگر قضیه نقض شوند ، ممکن است دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به وسیلهٔ فرمول (۱) **واگرا** گردد (ر.ک. مسائل ۲۰ و ۲۱) . حتی در حالاتی که دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا باشد ، البته مطلوب انتخاب تقریب اولیهٔ x_1 به قدر کافی نزدیک ریشهٔ r است و این کار با رسم نمودار f و

حدس مقدار r ، یااستفادەاز روش تقریب دیگری برای تخمین مقدماتی r ،صورت‌می‌گیرد .
از فرمول (۱) معلوم می‌شود که هرگاه $x_{n+1} = x_n$ ، آنگاه $f(x_n) = 0$ ؛ درنتیجـــه، $r = x_n$. در همیـــن وضع ، اگر N رقم اعشاری اولیهٔ x_n و x_{n+1} یکی باشند ، مرسوم است که فرض می‌کنند تقریب $r \approx x_n$ تا دست کم N رقم اعشار دقیق است ، ولـــی بـــرای آنکه مطمئن باشیم ، می‌توانیم خطا را با استفاده از فرمول (۲) تحلیل کنیم .

تبصره . گوییم دنبالهٔ

$$x_1, x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), \ldots, x_{n+1} = g(x_n), \ldots$$

از جملهٔ اولیهٔ x_1 خود با *تکرار* تابع g تولید می‌شود . اگر x_1 و g در شرایط مناسبی صدق کنند ، می‌توان نشان داد که دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به *نقطهٔ ثابتی* از g است ؛ یعنی ، به نقطه‌ای چون r به طوری که $g(r) = r$. لذا ، روش نیوتن متناظر تکرار با تابع

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{۳}$$

است ، و قضیهٔ ۱۹ شرایطی به ما می‌دهد که همگرایی این فرایند تکرار را تضمین می‌کنـــد . توجه کنید که r یک نقطهٔ ثابت تابع تکرار (۳) اســـت اگر و فقط اگـــر r ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ باشد .

مثال ۱ . با استفاده از روش نیوتن ، $\sqrt{3}$ را تا هشت رقم اعشار تقریب کنید .

حل . چون $(1.7)^2 = 2.89$ و $(1.8)^2 = 3.24$ ، پس $\sqrt{3}$ بین 1.7 و 1.8 قـــرار دارد . هـــرگـــاه $f(x) = x^2 - 3$ ، آنگاه $f(r) = 0$ اگر و فقط اگر $r = \sqrt{3}$. به‌علاوه ، $f'(x) = 2x$ ؛ و لذا ، طبق فرمول (۱) ،

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{3}{x_n}\right).$$

لذا ، تقریب $(n+1)$ م x_{n+1} متوسط تقریب قبلی x_n و 3 تقسیم بر x_n می‌باشد . بازهٔ I دراینجا $[1.7, 1.8]$ است ،و قضیهٔ۱۹ تقریب‌اولیهٔ $x_1 = 1.8$ را می‌خواهد ،زیرا $f'(x) = 2x$ و $f''(x) = 2$ هر دو بر I مثبت می‌باشند . با استفاده از ماشین حساب یا کامپیوتـــر ، چند تقریب بعدی را تا هشت رقم اعشار محاسبه می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$x_1 = 1.8$$
$$x_2 = 1.73333333$$

$$x_3 = 1.73205128$$
$$x_4 = 1.73205081$$
$$x_5 = 1.73205081$$

چون x_4 و x_5 تا هشت‌رقم اعشاریکی‌هستند ،نتیجه‌می‌گیریم که‌تقریب $r = \sqrt{3} \approx 1.73205081$ تا هشت رقم اعشار دقیق است ، و این در مثال بعد تأیید خواهد شد .

مثال ۲ . در مثال قبل ، تقریبهای $\sqrt{3} \approx x_3$ و $\sqrt{3} \approx x_4$ چقدر دقیق‌اند ؟

حل . با اختیار $r = \sqrt{3}$ در فرمول (۲) ، داریم

$$|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - \sqrt{3}|^2,$$

که در آن m مینیمم $|f'(x)| = 2|x|$ بر $I = [1.7, 1.8]$ و M ماکزیمم $|f''(x)| = 2$ بر I است . اما $m = 2(1.7) = 3.4$ ، $M = 2$ ؛ و درنتیجه ،

$$|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3.4} |x_n - \sqrt{3}|^2 < \frac{3}{10} |x_n - \sqrt{3}|^2$$

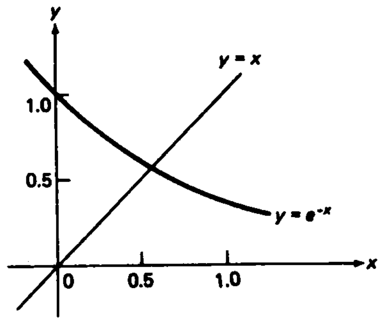
$(1/3.4 \approx 0.294)$. بنابراین ،

$$|x_2 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10} |x_1 - \sqrt{3}|^2 = \frac{3}{10} |1.8 - \sqrt{3}|^2 < \frac{3}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^2,$$
$$|x_3 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10} |x_2 - \sqrt{3}|^2 < \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 3^3 \times 10^{-7} = 2.7 \times 10^{-6},$$
$$|x_4 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10} |x_3 - \sqrt{3}|^2 < \left(\frac{3}{10}\right)^7 \left(\frac{1}{10}\right)^8 = 3^7 \times 10^{-15} \approx 2.2 \times 10^{-12}.$$

لذا ، تقریب $\sqrt{3} \approx x_3$ تا 5 رقم اعشار دقیق است ، حال آنکه تقریب $\sqrt{3} \approx x_4$ تا 11 رقم اعشار دقیق می‌باشد . توجه کنید که این تخمین خطا محاسبهٔ تقریب بعدی $\sqrt{3} \approx x_5$ را ، که تا 23 رقم اعشار دقیق است ، ناضرور می‌سازد .

مثال ۳ . معادلهٔ $x - e^{-x} = 0$ را به روش نیوتن حل کنید .

حل . از شکل ۱۵ معلوم می‌شود که این معادله فقط یک‌ریشهٔ r دارد که طول نقطهٔ اشتراک خط $y = x$ با منحنی $y = e^{-x}$ است ، و گویی $r \approx 0.5$ تقریب اولیهٔ مناسبی می‌باشد . با



شکل ۱۵

اختیار $f(x) = x - e^{-x}, f'(x) = 1 + e^{-x}$ در فرمول (۱)، به دست می‌آوریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} = \frac{x_n e^{-x_n} + e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} = \frac{x_n + 1}{e^{x_n} + 1}.$$

چند تقریب اولیه را تا شش رقم اعشار حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5 \\ x_2 &= 0.566311 \\ x_3 &= 0.567143 \\ x_4 &= 0.567143 \end{aligned}$$

لذا، نتیجه می‌گیریم که تا شش رقم اعشار $r \approx 0.567143$. اگر $x_1 = 0.6$ را تقریب اولیه بگیریم، در عوض به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.6 \\ x_2 &= 0.566950 \\ x_3 &= 0.567143 \\ x_4 &= 0.567143 \end{aligned}$$

که همان جواب با همان تعداد مراحل به ما می‌دهد. این با قضیهٔ ۱۹ تعارضی ندارد، که انتخاب x_1 را نقطهٔ انتهایی چپ بازهٔ $I = [0.5, 0.6]$ پیشنهاد می‌کند، زیرا $f'(x) = 1 + e^{-x}$ و $f''(x) = -e^{-x}$ مختلف‌العلامه می‌باشند. بالاخره، اگرچه قضیه همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در صورت انتخاب نقطهٔ انتهایی دیگر تضمین نمی‌کند، ولی مسلماً " نمی‌گوید که $\{x_n\}$ همگرا نمی‌شود، و اگر همگرایی رخ دهد، تعارضی برای پیروزی وجودندارد. توجه کنید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌ازای $x_1 = 0.5$ یکنواست، ولی نه به ازای $x_1 = 0.6$. این را چطور تحلیل می‌کنید؟

برهان قضیهٔ ۱۹ (اختیاری). با اختیار $x = r$ و $a = x_n$ در قضیهٔ مقدارمیانگین‌تعمیم یافته (۳)، صفحهٔ ۸۸۱، داریم

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(t_n)}{2}(r - x_n)^2,$$

که در آن t_n بین x_n و r قرار دارد. بنابراین،

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = r + \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

یا معادلاً"

$$x_{n+1} - r = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - r)^2, \tag{۴}$$

زیرا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{۵}$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که علامت $f(x_1)$ همواره با علامت f'' یکی است[1]. لذا، از (۴) و (۵) معلوم می‌شود که $r < x_2 < x_1 = b$ اگر f' و f'' همعلامت باشند ولی $a = x_1 < x_2 < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند. چون x_1 و x_2 در یک طرف r واقعند، $f(x_2)$ با $f(x_1)$ همعلامت‌است. لذا، کاربرد دیگری‌از فرمولهای (۴) و (۵) نشان‌می‌دهد که $r < x_3 < x_2 < x_1$ اگر f' و f'' همعلامت باشند، حال آنکه $x_1 < x_2 < x_3 < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند. در واقع، کاربرد مکرر این استدلال نشان می‌دهد که به ازای هر n، $r < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1$ اگر f' و f'' همعلامت باشند، حال آنکه به ازای هر n $x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند؛ لذا، در هر حالت، $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ یکنوای کراندار (نزولی در حالت اول و صعودی در حالت دوم) می‌باشد. بنابر قضیهٔ ۲، صفحهٔ ۷۹۶، $\{x_n\}$ به حد L همگراست. این حد مساوی r می‌باشد. در واقع، با حدگیری از طرفین (۵) وقتی $n \to \infty$، به دست می‌آوریم

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)},$$

---

۱. به‌طور مشروح، $f(a) < 0, f(b) > 0$ اگر $f' > 0$، ولی $f(a) > 0, f(b) < 0$ اگر $f' < 0$. هرگاه f' و f'' همعلامت‌باشند، آنگاه $f' > 0, f'' > 0$ یا $f' < 0, f'' < 0$، و در هر دوحالت $f(x_1) = f(b)$ با f'' همعلامت است. از آن سو، هرگاه f' و f'' مختلف‌العلامه‌باشند، آنگاه، $f' > 0, f'' < 0$ یا $f' < 0, f'' > 0$، و مجدداً" در هر دو حالت $f(x_1) = f(a)$ با f'' همعلامت می‌باشد.

که $f(L) = 0$ و درنتیجه $L = r$ را ایجاب می‌کند . برای اتمام برهان ، ملاحظه می‌کنیم که نامساوی (۲) درصورت قضیه نتیجهٔ فوری فرمول (۴) و معنی اعداد m و M می‌باشد .

مسائل

کمیات زیر را با استفاده از روش نیوتن تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید .

۱. $\sqrt{2}$ ۲. $\sqrt[3]{11}$ ۳. $\sqrt[4]{75}$

۴. $\sqrt[5]{1000}$ ۵. $\sqrt[6]{800}$

۶. فرض کنید c عددی مثبت و k عددی صحیح بزرگتر از 1 باشد . نشان دهید که دنبالهٔ تقریبات متوالی $\{x_n\}$ داده شده با فرمول بازگشتی

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n + \frac{1}{k} c x_n^{1-k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

به ازای هر تقریب‌اولیهٔ $x_1 > 0$ به $\sqrt[k]{c}$ همگراست .

۷. معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - x - 1 = 0$ دارای دو ریشهٔ $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ است . به ازای چه مقادیری از تقریب اولیهٔ x_1 دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده به وسیلهٔ روش نیوتن‌به‌ریشهٔ مثبت همگراست؟ به ریشهٔ منفی همگراست؟ به ازای چه مقداری از x_1 روش فرو می‌ریزد؟

۸. فرض کنید روش نیوتن برای تقریب $\sqrt[3]{7}$ ، با شروع از تقریب اولیهٔ $x_1 = 2$ ، به کار رفته باشد . نشان دهید که تقریب $\sqrt[3]{7} \approx x_4$ تا نه رقم اعشار دقیق است .

۹. در مثال ۱ ، صفحهٔ ۱۵۴، روش تنصیف برای یافتن تقریب خامی به ریشهٔ r معادلهٔ $2x^5 + 2x^2 + x - 3 = 0$ در بازهٔ $(0, 1)$ به کار گرفته شد . با استفاده از روش نیوتن ، r را تا شش رقم اعشار تقریب نمایید .

۱۰. با شکل نشان دهید که معادلهٔ $e^{-x} - \sin x = 0$ بی‌نهایت ریشهٔ مثبت دارد . سپس با استفاده از روش نیوتن ، دو کوچکترین ریشه را تا چهار رقم اعشار تقریب‌نمایید .

۱۱. نشان دهید که معادلهٔ $x^3 - 6x + 1 = 0$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد ، و هر ریشه را به کمک روش نیوتن تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید .

با استفاده از روش نیوتن ، معادلهٔ داده شده را تا سه رقم اعشار حل کنید .

۱۲. $x^4 - 4x - 4 = 0 \quad (-1 < x < 0)$

۱۳. $(x + 1)^2 x = 1$ ۱۴. $e^x - x^2 + 1 = 0$

۱۵. $x + \ln x - 3 = 0$ ۱۶. $x^2 + \ln x - 2 = 0$

۱۷. $4 \sin x - x = 0 \quad (x > 0)$

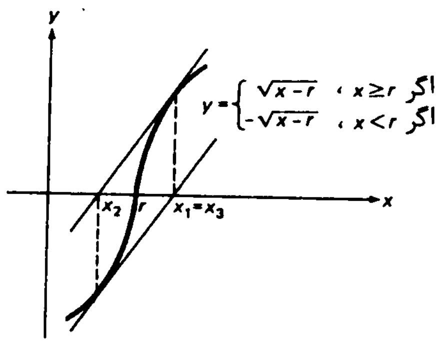
۱۸. $x^2 - \cos x = 0 \quad (x < 0)$

۱۹. $\tan x = x \quad (\pi/2 < x < 3\pi/2)$

۲۰. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-r} & \text{اگر } x \geq r \text{ ،} \\ -\sqrt{x-r} & \text{اگر } x < r \text{ ،} \end{cases}$$

رسم شده در شکل ۱۶، فقط در r ریشه دارد. نشان دهید که اگر $x_1 \neq r$، دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده در روش نیوتن واگراست، و بین مقادیر x_1 و $x_2 = 2r - x_1$ نوسان می‌کند. این مطلب را تعبیر هندسی کنید.



شکل ۱۶

۲۱. تابع $f(x) = (x - r)^{1/3}$ فقط در r ریشه دارد. نشان دهید اگر $x_1 \neq r$، دنبالهٔ $\{x_n\}$ تولید شده در روش نیوتن واگراست و مقادیر با قدرمطلق بدلخواه بزرگ اختیار می‌کند. این مطلب را تعبیر هندسی نمایید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

دنباله‌های نامتناهی

فرمولهای بازگشتی

حد یک دنباله، دنباله‌های همگرا و واگرا

دنباله‌های کراندار و بی‌کران، دنباله‌های یکنوا

همگرایی یک دنبالهٔ یکنوای کراندار

سریهای نامتناهی، مجموعهای جزئی یک سری

سریهای همگرا و واگرا، مجموع یک سری

سری هندسی ، سری توافقی ، سری p
شرط لازم برای همگرایی
باقیمانده‌ٔ یک سری
محک همگرایی برای سریهای نامنفی
آزمونهای مقایسه ، آزمون انتگرال
همگرایی مطلق در مقابل همگرایی مشروط
سری متناوب ، آزمون سری متناوب
تجدید آرایش سریها
آزمونهای نسبت و ریشه
سری توانی ، سریهای عددی در مقابل سریهای توابع
بازه‌ٔ همگرایی و شعاع همگرایی یک سری توانی
مجموع (تابع) یک سری توانی
مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی
سری دوجمله‌ای
قضیه‌ٔ مقدار میانگین تعمیم یافته
قضیه‌ٔ تیلور ، فرمول تیلور با باقیمانده
چندجمله‌ایهای تیلور
سریهای تیلور و ماکلورن
روش نیوتن

سریهای عددی مهم

سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ (همگرا به $a/(1-r)$ اگر $|r| < 1$ ، واگرا اگر $|r| \geq 1$)

سری توافقی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (واگرا)

سری p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (همگرا اگر $p > 1$ ، واگرا اگر $p \leq 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(سری گرگوری) $$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

(سری دوجمله‌ای) $$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n$$

(سری تیلور) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

خلاصه‌ای از آزمونهای همگرایی برای سریهای عددی[1]

هرگاه:	آنگاه:
$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	$\sum a_n$ واگراست (قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۸۱۱)
$a_n \ge 0, a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le C$	$\sum a_n$ همگراست (قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۸۲۱)
$a_n \ge 0, b_n \ge 0, a_n \le b_n$	همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند واگرایی $\sum a_n$ واگرایی $\sum b_n$ را ایجاب می‌کند (قضیهٔ ۵، صفحه ۸۲۴)
$a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$	همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 \le L < \infty$ واگرایی $\sum b_n$ واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 < L \le \infty$ (قضیهٔ ۶، صفحهٔ ۸۲۵)
$a_n = f(n)$ ، f بر $[1, \infty)$ پیوسته، مثبت، و نزولی باشد	$\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشد (قضیهٔ ۷، صفحهٔ ۸۲۸)
$\sum \lvert a_n \rvert$ همگرا باشد	$\sum a_n$ همگراست (قضیهٔ ۸، صفحهٔ ۸۳۶)
$a_n > a_{n+1}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0$	$\sum (-1)^{n-1} a_n$ همگراست (قضیهٔ ۹، صفحهٔ ۸۳۷)
$a_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = L$	$\sum a_n$ به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \le L < 1$ و واگراست اگر $1 < L \le \infty$ (قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ ۸۴۷)
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = L$	$\sum a_n$ به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \le L < 1$ و واگراست اگر $1 < L \le \infty$ (قضیهٔ ۱۱، صفحهٔ ۸۵۰)

۱. $\sum$ اختصاری است برای $\sum_{n=1}^{\infty}$

مسائل تکمیلی

حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ را (در صورت وجود) بیابید ، که‌در آن a_n ، n مین رقم در بسط‌اعشاری اعداد زیر است .

۱. $\frac{1}{6}$ ۲. $\frac{1}{8}$ ۳. $\frac{1}{7}$ ۴. π

دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو همگرا به 0 را طوری بیابید که

۵. $\{a_n/b_n\}$ همگرا به 0 باشد .

۶. $\{a_n/b_n\}$ همگرا به 1 باشد .

۷. $\{a_n/b_n\}$ واگرا و کراندار باشد .

۸. $\{a_n/b_n\}$ واگرا و بی‌کران باشد .

۹. نشان دهید هرگاه تابع $f(x)$ بر $[0, 1]$ طوری تعریف شده باشد که وقتی $x \to 0^+$ ، $f(x) \to L$ ، آنگاه وقتی $n \to \infty$ ، $f(1/n) \to L$.

حد داده شده را محاسبه کنید .

۱۰. $\lim\limits_{n \to \infty} n \tan \frac{1}{n}$ ۱۱. $\lim\limits_{n \to \infty} \cos\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

۱۲. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

۱۳. $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3n})$

۱۴. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$

۱۵. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^n}{1 + b + b^2 + \cdots + b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1)$

۱۶. $\lim\limits_{n \to \infty} nc^n \quad (|c| < 1)$ ۱۷. $\lim\limits_{n \to \infty} \arcsin \frac{2n - 1}{4n}$

۱۸. $\lim\limits_{n \to \infty} \arctan \sqrt[n]{n}$ ۱۹. $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{2}\sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})$

۲۰. تحقیق کنید که

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}\right) = 1,$$

حال آنکه

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$
$$=\ln(1+\sqrt{2})\approx 0.88.$$

راهنمایی . در حالت اول از قضیهٔ ساندویچ برای دنباله‌های داده شده در مسئلهٔ ۵۴ ، صفحهٔ ۸۰۲ ، استفاده کنید ؛ در حالت دوم ، طرف چپ را به صورت حد یک مجموع‌ریمان برای تابع $1/\sqrt{1+x^2}$ را بر $[0,1]$ تعبیر نمایید .

۲۱ . فرض‌کنید c چنان عددی‌باشد که $0<c<1$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$a_1=c \text{ ، } a_{n+1}=(2-a_n)a_n \text{ اگر } n\geq 2$$

همگرا به 1 است .

۲۲ . تحقیق کنید که جملهٔ عمومی دنبالهٔ فیبوناچی $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول‌بازگشتی

$$a_1=1 \text{ ، } a_2=1 \text{ ، } a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \text{ اگر } n\geq 3$$

(مثل مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۸۰۱) از فرمول صریح زیر به دست می‌آید :

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

۲۳ . فرض‌کنید c عددی مثبت باشد . نشان دهید که دنبالهٔ

$$a_1=\sqrt{c},\quad a_2=\sqrt{c+\sqrt{c}},\quad a_3=\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}},\ldots,$$

تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$a_1=\sqrt{c} \text{ ، } a_n=\sqrt{c+a_{n-1}} \text{ اگر } n\geq 2$$

همگرا به حد

$$L=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

می‌باشد . (توجه کنید اگر $c=2$ ، $L=2$.)

۲۴ . نشان دهید دنبالهٔ $\{c_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$c_1=a,\quad c_2=b,\quad c_n=\frac{1}{2}(c_{n-1}+c_{n-2}) \text{ اگر } n\geq 3$$

همگرا به حد $\frac{1}{3}(a+2b)$ است .

راهنمایی. توجه کنید که $c_n - c_{n-1} = -\frac{1}{2}(c_{n-1} - c_{n-2})$.

۲۵. فرض کنید $\{a_n\}$ دنبالهٔ همگرایی با حد L باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L. \qquad \text{(یک)}$$

آیا (یک) همگرایی $\{a_n\}$ به L را ایجاب می‌کند؟

۲۶. می‌توان نشان داد که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1. \qquad \text{(دو)}$$

این نتیجه، که به فرمول *استرلینگ*[1] معروف است، به تقریب

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \qquad \text{('دو)}$$

برای n فاکتوریل منجر می‌شود. خطای درصد این تقریب به ازای $n = 5$ ؟ به ازای $n = 10$ چقدر است؟

حدود زیر را با استفاده از فرمول (دو) حساب کنید.

۲۷. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

۲۸. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}$

۲۹. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$

۳۰. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{7^{n/2} n!}{n^n}$

۳۱. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$

۳۲. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right)$

عبارات زیر را با استفاده از فرمول ('دو) تقریب نمایید.

۳۳. $\ln 40!$

۳۴. $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 49$

۳۵. $\int_0^{\pi/2} \sin^{31} x\, dx$

۳۶. $\int_0^{\infty} x^{50} e^{-x}\, dx$

۳۷. $\int_0^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)^{11}}$

۳۸. $\int_0^1 x^{15}(1-x)^{16}\, dx$

اگر سری داده شده همگرا باشد، مجموع آن را بیابید. در غیر این صورت، واگرایی آن را مشخص نمایید. درحالتی که سری با چند جملهٔ اولیه داده شده است، فرض کنید قانون

---

1. *Stirling*

تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد .

۳۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$

۴۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}\right)^n$

۴۱. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$

۴۲. $\frac{3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{5}{(2\cdot 3)^2}+\frac{7}{(3\cdot 4)^2}+\cdots$

۴۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n)(c+n+1)}$

۴۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(c+n)(c+n+1)(c+n+2)}$

۴۵. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

۴۶. $\frac{1+2}{1-2}+\frac{1+2+4}{1-2+4}+\frac{1+2+4+8}{1-2+4-8}+\cdots$

۴۷. سری $\cdots+(1-\frac{3}{2})+(\frac{3}{4}-1)+(\frac{9}{8}-1)$ راه دیگر نوشتن سری هندسی همگرای $\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ را نشان می‌دهد . ثابت کنید سری حاصل از پرانتزها واگراست .

۴۸. **میانگین توافقی** دو عدد مثبت x و y عددی است چون h به طوری که

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

یعنی ، متقابل h متوسط (یا میانگین حسابی) متقابلهای x و y است . نشان دهید هر جملهٔ سری توافقی

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

جز اولی میانگین توافقی دوجملهٔ مجاور خود می‌باشد .

۴۹. به ازای دو عدد مثبت x و y ، فرض کنید $g=\sqrt{xy}$ میانگین هندسی آنها بوده و h میانگین توافقی آنها ، به صورت تعریف شده در مسئلهٔ قبل ، باشد . تحقیق کنید که $h<g$ مگرآنکه $x=y$ ، که دراین صورت $h=g$. (این را با مسئلهٔ ۱۹ ، صفحهٔ ۱۹ ، مقایسه کنید .)

۵۰. فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد . نشان دهید $1/n$ دارای نمایش اعشاری مختوم

است اگر و فقط اگر اعداد صحیح نامنفیی چون p و q وجود داشته باشند به‌طوری‌که $n = 2^p 5^q$.

اعداد گویای تحویل ناپذیر با نمایشهای اعشاری زیر را بیابید .

۵۱. $0.1234\overline{5}$ ۵۲. $0.12\overline{345}$ ۵۳. $0.\overline{12345}$

۵۴. نشان دهید که اعشاری $0.12345678910111213\ldots$ حاصل از نوشتن مرتب تمام اعداد صحیح مثبت پس از ممیز یک عدد گنگ است .

همگرایی سری داده شده را با هر آزمونی که می‌خواهید بررسی کنید . درحالتی که سری با چند جملهٔ اولیه داده شده است ، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد . اگر سری جملات مثبت و منفی داشته باشد ، همگرایی مطلق و مشروط را تمیز دهید .

۵۵. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n n!}{n^n}$ ۵۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$

۵۷. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$

۵۸. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

۵۹. $1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots$

۶۰. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ ۶۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^n}$

۶۲. $\frac{5}{2} + \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 8 \cdot 11}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \cdots$

۶۳. $100 - \frac{100 \cdot 101}{1 \cdot 3} + \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \cdots$

۶۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+(1/n)}}{[n+(1/n)]^n}$ ۶۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{\tanh n}$

۶۶. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin n$ ۶۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

۶۸. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{3}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{3}{2^6} + \cdots$

۶۹. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln (n!)}$

۷۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^n$

۷۱. فرض کنید d_n تعداد اعداد صحیح مثبتی باشدکه مقسوم علیه (کامل) n اند. مثلاً $d_4 = 3$ زیرا 4 دارای مقسوم علیه‌های 1 ، 2 ، و 4 است ، $d_5 = 2$ زیرا 5 دارای مقسوم علیه‌های 1 و 5 است ، $d_6 = 4$ زیرا 6 دارای مقسوم علیه‌های 1 ، 2 ، 3 ، و 6 است ، و از این قبیل . شعاع و بازهٔ همگرایی سری توانی $\sum d_n x^n = d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \cdots$ را بیابید .

تابع داده شده را در $x = 0$ به سری توانی بسط دهید .

۷۲. $\frac{1-x}{1+x^2}$

۷۳. $\frac{1}{1+x+x^2}$

۷۴. $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$

۷۵. $\frac{x^2}{(1-x^3)^2}$

۷۶. $(1-x^2)^{-3/2}$

۷۷. $\frac{1}{1+x-2x^2}$

۷۸. $\ln \frac{1+x}{1-x} + 2 \arctan x$

۷۹. $[\ln (1-x)]^2$

۸۰. $(\arctan x)^2$

۸۱. نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{3a+1} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{x^a+1} \qquad (a > 0). \tag{سه}$$

با استفاده از فرمول (سه) ، مجموع سریهای زیر را بیابید .

۸۲. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$

۸۳. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots$

۸۴. با شروع از فرمول ماشن

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$$

(ر.ک. مسئلهٔ ۶۲، صفحهٔ ۴۷۹) و استفاده از سری گرگوری برای $\arctan x$ ، π
را تا هشت رقم اعشار تقریب نمایید.

۸۵. نشان دهید

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}, \qquad \text{(چهار)}$$

که در آن $\{a_n\}$ دنبالهٔ فیبوناچی است.

۸۶. به کمک مسئلهٔ ۲۲، نشان دهید که شعاع همگرایی سری (چهار) مساوی است با
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\approx 0.618$.

۸۷. فرض کنید a عددی مثبت باشد. تحقیق کنید که

$$\ln a = 2\left(b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}+\cdots\right),$$

که در آن

$$b=\frac{a-1}{a+1},$$

و با استفاده از این فرمول، $\ln 3$ را تا چهار رقم اعشار تقریب کنید.

۸۸. بنابر نظریهٔ خصوصی نسبیت اینشتن (ر.ک. مسئلهٔ ۵۴، صفحهٔ ۴۴۳)، انرژی کل یک ذره به جرم m که با سرعت v حرکت می‌کند عبارت است از

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

که در آن c سرعت نور است $(\approx 300{,}000 \text{ km/sec})$. نشان دهید هرگاه v درمقایسه با c کوچک باشد، آنگاه، با تقریبی مناسب،

$$E = mc^2 + K,$$

که در آن $K=\frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی نیوتنی ذره است (ر.ک. صفحهٔ ۴۲۹). توجه کنید که هر دو فرمول مربوط به E انرژی mc^2 را به یک ذره به جرم m درحال سکون $(v=0)$ می‌دهند، بدین ترتیب " تعادل جرم و انرژی " را بیان می‌نمایند.

۸۹. فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ 4 باشد به‌طوری که

$$P(2)=-1, \qquad P'(2)=0, \qquad P''(2)=2,$$
$$P'''(2)=-12, \qquad P^{(4)}=24.$$

$P(-1)$ ، $P'(0)$ ، و $P''(1)$ را پیدا کنید.

۹۰. $\sin 55°$ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n=3$ و $a=60°=\pi/3$ تخمین زده، و

نشان دهید جواب تا پنج رقم اعشار دقیق است .

۹۱ . فرض کنید $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور n م تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = a$ بوده ، و $R_n(x)$ باقیماندهٔ نظیر باشد ؛ درنتیجه ، $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.نشان‌دهید $R_n(x)$را می‌توان به شکل *انتگرالی* زیر نوشت :

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(u)(x-u)^n\,du \qquad \text{(پنج)}$$

اگر $f^{(n+1)}(u)$ بر بازه با نقاط‌انتهایی a و x پیوسته باشد . نشان دهید (پنج) ایجاب می‌کند که

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(t بین a و x)

و این شکل باقیمانده است که در صفحهٔ ۸۸۳ داده‌ایم .

راهنمایی . از قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرالها استفاده‌کنید(ر .ک . مسئلهٔ ۲۷ ، صفحهٔ ۴۴۱) .

۹۲ . مشتق پنجم $x^2\sqrt[4]{1+x}$ در $x = 0$ را با استفاده از سری تیلور حساب‌کنید .

۹۳ . مشتق دهم x^6e^x در $x = 0$ را با استفاده از سری تیلور حساب کنید .

۹۴ . سری ماکلورن چندجمله‌ای $P(x)$ چیست ؟

۹۵ . شش جملهٔ اول سری ماکلورن e^{2x-x^2} را بیابید .

راهنمایی . توجه کنید که

$$e^{2x-x^2} = (e^{2x})(e^{-x^2}).$$

انتگرال داده شده را با استفاده از سری توانی تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید .

۹۶ . $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$

۹۷ . $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx$

در هر حالت ، انتگرالده $f(x)$را با پیوستگی در $x = 0$ تعریف کنید ؛ یعنی ، قرار دهید

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

معادلهٔ داده شده را به روش نیوتن تا سه رقم اعشار حل کنید .

۹۸ . $x \ln x = 1$

۹۹ . $xe^{x^2} = 1$

۱۰۰ . $x + \arctan x - 1 = 0$

هندسهٔ تحلیلی در صفحه و مختصات قطبی ۱۰

هندسهٔ تحلیلی، که توسط رنه دکارت[1] ابداع شده است، مبحثی است که در آن، پس از معرفی دستگاه مختصات مناسبی، روشهای جبری برای حل مسائل هندسی به کار گرفته می‌شوند. حال تکنیکهای هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال را درهم‌آمیخته بررسی منحنیها در صفحه را ادامه می‌دهیم. در بخش ۱۰۱۰ بحث را با نشان دادن اینکه چطور معادلهٔ یک منحنی در مختصات قائم ضمن انتقال یا دوران دستگاه مختصات تغییر می‌کند آغاز می‌کنیم. سپس در بخشهای ۲۰۱۰ تا ۴۰۱۰ سهمیها، بیضیها، و هذلولیها را به تفصیل بررسی می‌نماییم. این منحنیها در ریاضیات کار بسته اهمیت زیادی داشته، و همانطورکه دربخش ۵۰۱۰ توضیح دادیم، هرکدام یک "مقطع مخروطی" است؛ یعنی، اشتراک یک مخروط مستدیر قائم مضاعف با یک صفحهٔ قاطع مناسب می‌باشد. مقاطع مخروطی مبحث دلخواه هندسه‌دانان یونان باستان بوده است. در واقع، آپولونیوس[2] اهل پرگا (۱۷۰ — ۲۵۵ ق.م.) مقاله‌ای در این باب نوشت که شامل 400 قضیه بود، و اصطلاحات سهمی، بیضی، و هذلولی از آن اوست. مقاطع مخروطی همه دارای معادلات درجهٔ دوم به شکل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ هستند، و به عکس، نمودار هر چنین معادله یک مقطع مخروطی است جز چند حالت استثنایی که در بخش ۶۰۱۰ توصیف شده‌اند.

در یک دستگاه مختصات دکارتی موضع نقطهٔ P با مختصات قائم آن مشخص می‌شود. این یعنی دو خط، یکی افقی و دیگری قائم، رسم می‌کنیم که در P متقاطع باشند. دستگاههای مختصات غیرقائم نیز وجود دارند، و یکی از مفیدترین آنها ***دستگاه مختصات قطبی*** است که در بخشهای ۷۰۱۰ تا ۱۰۰۱۰ بررسی شده است. در این دستگاه موضع نقطهٔ P با مختصات قطبی آن مشخص می‌شود، به این ترتیب که دایره‌ای و شعاع آن را نشان

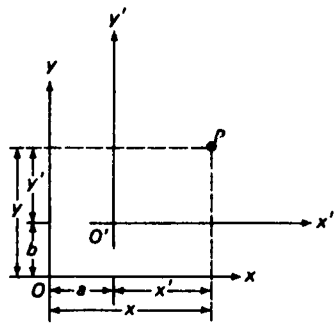
---

1. René Descartes
2. Apollonius

می‌دهیم که در P یکدیگر را قطع می‌کنند . خواهید دید که مختصات قطبی بخصوص برای نوشتن مقاطع مخروطی مفیدند .

۱۰.۱ انتقال و دوران محورها

شکل ۱ دستگاه مختصات دکارتی Oxy را نشان می‌دهد که *انتقال یافته است*؛ یعنی ، کلاً " بدون دوران طوری جابجا شده است که مبداء آن O موضع جدید $O' = (a, b)$ را اشغال کرده و بدین ترتیب دستگاه مختصات قائم دیگر $O'x'y'$ در همان صفحهٔ Oxy تولید شده است .



شکل ۱

حال نقطهٔ P در صفحه دو جفت مختصات دارد ، جفت (x, y) در دستگاه xy " قدیم " و جفت (x', y') در دستگاه $x'y'$ " جدید " . از شکل معلوم می‌شود که رابطهٔ بین این مختصات به صورت زیر است :

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b, \tag{1}$$

یا معادلاً "

$$x' = x - a, \qquad y' = y - b. \tag{1'}$$

معادلات (۱) و ('۱) *معادلات انتقال* نام دارند .

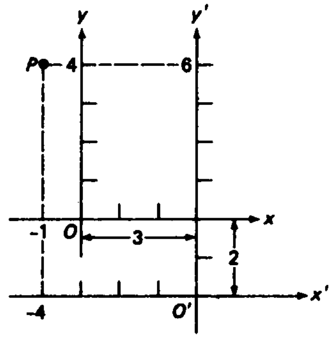
مثال ۱ . فرض کنید مبداء دستگاه جدید $x'y'$ نقطهٔ $(a, b) = (3, -2)$ در دستگاه xy قدیم باشد . مختصات جدید نقطهٔ P به مختصات قدیم $x = -1, y = 4$ چیست ؟

حل . از رابطهٔ ('۱) به ازای $a = 3, b = -2$ معلوم می‌شود که

$$x' = x - 3, \qquad y' = y + 2.$$

لذا، همانطور که شکل ۲ نشان داده، مختصات جدید نقطهٔ P عبارتند از

$$x' = -1 - 3 = -4, \qquad y' = 4 + 2 = 6,$$



شکل ۲

مثال ۲. با انتقال محورها، دستگاه مختصات x', y' را طوری بیابید که در آن معادلهٔ دایرهٔ

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

به

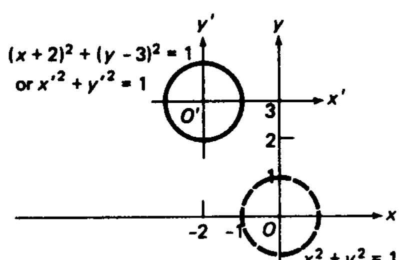
$$x'^2 + y'^2 = 1$$

ساده شود.

حل. واضح است که معادلات انتقال مربوطه عبارتند از

$$x' = x + 2, \qquad y' = y - 3.$$

دستگاه $x'y'$ جدید حاصل انتقال دستگاه xy قدیم 2 واحد به چپ و 3 واحد به بالاست. انتظار این امر می‌رفت، چراکه $O'x'y'$ دستگاهی است که در آن دایرهٔ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ به شعاع 1 و به مرکز نقطهٔ $(-2, 3)$ به دایرهٔ به شعاع 1 و مرکز مبداء تبدیل می‌شود (ر. ک. شکل ۳). همچنین، توجه کنید که همین انتقال دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ (منحنی منقطع)



شکل ۳

را درصورتی به دایرهٔ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ می‌برد که دستگاه xy ثابت نگهداشته‌شود.

دوران محورها. حال دورانهای یک دستگاه مختصات نسبت به دیگری را درنظر می‌گیریم. شکل ۴ (آ) دستگاه مختصات قائم Oxy را نشان می‌دهد که حول مبدأ O خود به اندازهٔ زاویهٔ θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران کرده، دستگاه مختصات قائم دیگر $Ox'y'$ را در همان صفحهٔ Oxy و همان مبدأ O تولید می‌کند. حال نقطهٔ ثابت P در صفحه دو جفت مختصات دارد، جفت (x, y) در دستگاه xy قدیم وجفت (x', y') در دستگاه $x'y$ جدید. برای یافتن رابطهٔ بین این مختصات، فرض‌کنیم r طول پاره‌خط OP بوده، و α زاویهٔ بین OP و محور x' باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود. پس زاویهٔ بین OP و محور x مساوی $\alpha + \theta$ است؛ درنتیجه،

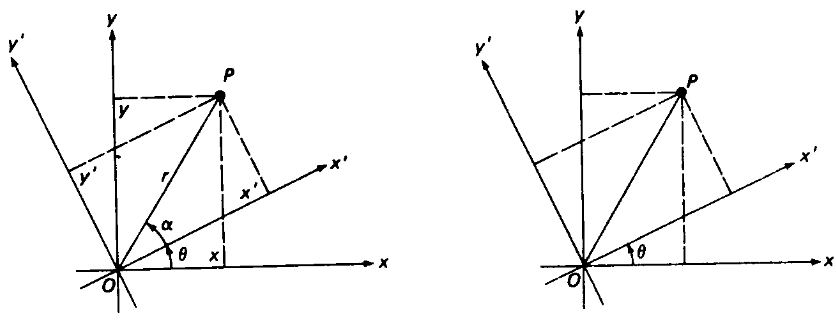
$$x = r\cos(\theta+\alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha,$$
$$y = r\sin(\theta+\alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha.$$

اما

$$x' = r\cos\alpha, \qquad y' = r\sin\alpha$$

[ر.ک. شکل ۴ (ب)]؛ و درنتیجه، معادلات مربوط به x و y به صورت زیر ساده‌می‌شوند:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned} \tag{۲}$$



(ب) (آ)

شکل ۴

معادلات (۲) مختصات قدیم x و y را برحسب مختصات جدید x' و y' بیـان می‌کنند. معادلات نظیر که x' و y' را برحسب x و y بیان می‌کنند عبارتنداز

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{۲'}$$

روابط (۲') را می‌توان با حل جفت معادلات همزمان (۲) نسبت به x' و y به دست آورد ، ولی چنانچه درک شود که اگر دستگاه $Ox'y'$ با دستگاه Oxy زاویهٔ θ بسازد ، Oxy با $Ox'y'$ زاویهٔ $-\theta$ می‌سازد بسیار ساده‌تر است؛ درنتیجه ، می‌توان جفتهای (x, y) و (x', y') در (۲) را باهم عوض کرد مشروط بر اینکه θ نیز به $-\theta$ تغییر یابد . به عنوان تمرین ، تحقیق کنید که این در واقع (۲) را به (۲') و بالعکس تبدیل می‌کند . معادلات (۲) و (۲') **معادلات دوران** نام دارند .

مثال ۳ . فرض کنید P نقطهٔ $(1, 2)$ بوده ، و دستگاه xy به اندازهٔ زاویهٔ $30°$ درجهت خلاف عقربه‌های ساعت چرخیده دستگاه جدید $x'y'$ را تولیدنماید . مختصات جدید P چه خواهند بود ؟

حل . از روابط (۲') به ازای $\theta = 30°$ معلوم می‌شود که

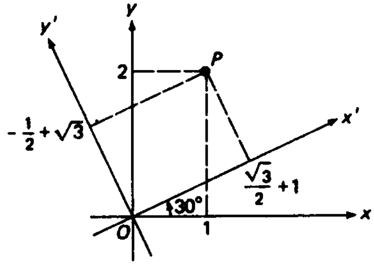
$$x' = x\cos 30° + y\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y,$$

$$y' = -x\sin 30° + y\cos 30° = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

با گذاردن $x = 1,\ y = 2$ در این معادلات، معلوم می‌شودکه مختصات جدید نقطهٔ P عبارتنداز

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \qquad y' = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

(ر.ک. شکل ۵) .



شکل ۵

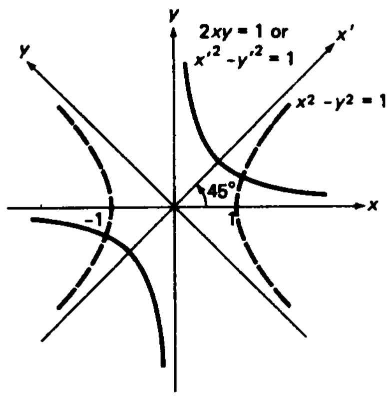
مثال ۴ . نشان دهید که معادلهٔ

$$2xy = 1$$

درصورتی به معادلهٔ

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

هذلولی یکه (ر.ک. صفحهٔ ۵۶۶) تبدیل می‌شود که دستگاه $x'y'$ از دوران دستگاه xy بـه اندازهٔ $45°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ، مثل شکل ۶ ، به دست آمده باشد .



شکل ۶

حل با اختیار $\theta = 45°$ در معادلات دوران (۲) ، به دست می‌آوریم

$$x = x' \cos 45° - y' \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = x' \sin 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

بنابراین ،

$$2xy = (x' - y')(x' + y') = x'^2 - y'^2,$$

درنتیجه ، $2xy = 1$ به $x'^2 - y'^2 = 1$ در دستگاه $x'y'$ تبدیل می‌شود . همچنین ، توجه کنید که همین دوران $45°$ هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ (نمودار منقطع در شکل) را درصورتی به هذلـــولی $2xy = 1$ می‌برد که دستگاه xy ثابت گرفته شود .

نمودار $F(x, y) = 0$. فرض کنیم $F(x, y)$ عبارتی شامل دو متغیر x و y باشد . (دراینجا ، مثل صفحهٔ ۶۵۳ ، نماد توابع دو متغیره را پیش‌بینی می‌کنیم .) منظور از نمودار معادلهٔ

$$F(x, y) = 0, \tag{۳}$$

یعنی مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) در صفحهٔ xy که مختصاتش در (۳) صدق کنند . مثلا" ، اگر

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ، نمودار (۳) دایره به شعاع یک و مرکز مبداء است ، حال‌آنکه‌اگر $F(x, y) = y - f(x)$ ، نمودار (۳) نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد . فرض کنیم G نمودار معادلهٔ (۳) و G' نمودار معادلهٔ

$$F(x - a, y - b) = 0 \qquad (۳')$$

باشد . در این صورت ، نقطهٔ (x, y) در (۳) صدق می‌کند اگر و فقط اگر نقطهٔ $(x + a, y + b)$ در ('۳) صدق نماید . اما $(x + a, y + b)$ حاصل انتقال افقی (x, y) به اندازهٔ $|a|$ به راست اگر $a > 0$ و به چپ اگر $a < 0$ ، و انتقال قائم به اندازهٔ $|b|$ به بالا اگر $b > 0$ و به پایین اگر $b < 0$ است . بنابراین ، G' از G با همان انتقالها به دست می‌آید . مثلاً ، اگر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ به اندازهٔ 2 واحد به چپ و 3 واحد به راست انتقال یابد ، همانطورکه قبلاً گفتیم ، دایرهٔ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ به دست می‌آید (ر.ک. شکل ۳) .

آزمونهای تقارن. حال تقارنهای نمودار G معادلهٔ $F(x, y) = 0$ را درنظر می‌گیریم . فرض کنیم G نسبت به محور x متقارن باشد . این یعنی نقطهٔ (a, b) متعلق به G است اگروفقط اگر $(a, -b)$ نیز متعلق به G باشد ، یا معادلاً $F(a, b) = 0$ اگر و فقط اگر $F(a, -b) = 0$.به عبارت دیگر ، G نسبت به محور x **متقارن** است اگر و فقط اگر دو معادلهٔ $F(x, y) = 0$ و $F(x, -y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند . به همین نحو ، G نسبت به محور y **متقارن** است اگر و فقط اگر $F(x, y) = 0$ و $F(-x, y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته‌باشند حال آنکه G نسبت به مبدأ **متقارن** است اگر و فقط اگر $F(x, y) = 0$ و $F(-x, -y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند . به همین ترتیب ، G نسبت به خط $y = x$ **متقارن** است اگر و فقط اگر معادلات $F(x, y) = 0$ و $F(y, x) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند .

مثال ۵ . نمودار معادلهٔ

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \qquad (۴)$$

نسبت به هیچیک از محورهای مختصات یا مبداء متقارن نیست . درواقع، ازتعویض x با $-x$ در (۴) معادلهٔ

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

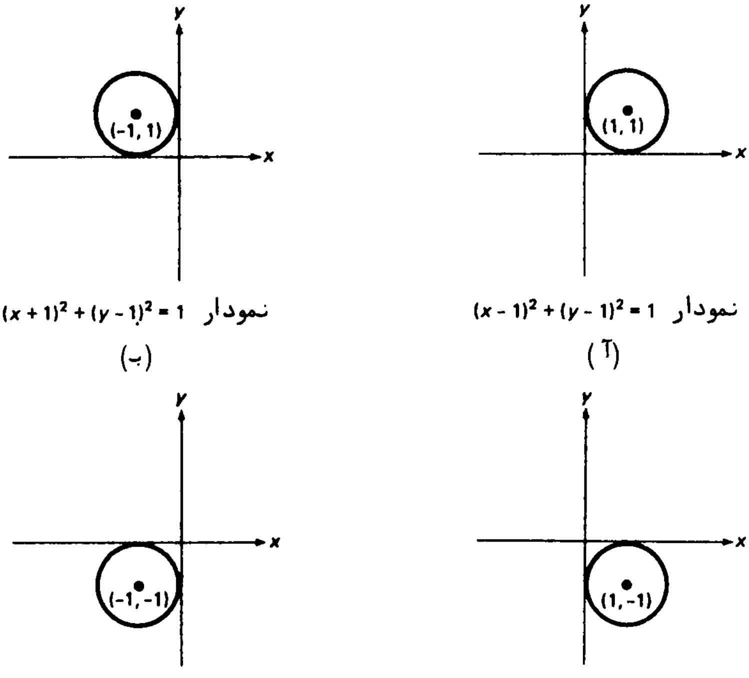
از تعویض y با $-y$ معادلهٔ

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1,$$

و از تعویض x با $-x$ و y با $-y$ معادلهٔ

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

نتیجه‌می‌شود ،که هیچیک‌از سه‌معادله مجموعه‌جواب (۴) را ندارد . مثلا " ، $x = 2, y = 1$ جواب معادلهٔ (۴) است ، ولی جواب سایر معادلات نیست . این امر که تمام چهار معادله مجموعه‌های جواب مختلف دارند فورا " از نمودارهای آنها در شکلهای ۷ (آ) تا ۷ (ت) معلوم می‌شود . نمودارها همه دایره به شعاع 1 هستند ، ولی مراکزشان در ربعهای مختلف



نمودار $(x-1)^2+(y-1)^2=1$
(آ)

نمودار $(x+1)^2+(y-1)^2=1$
(ب)

نمودار $(x-1)^2+(y+1)^2=1$
(پ)

نمودار $(x+1)^2+(y+1)^2=1$
(ت)

شکل ۷

است . اما نمودار (۴) نسبت به خط $x = y$ متقارن است ، زیرا از تعویض x و y در (۴) معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$(y-1)^2+(x-1)^2=1,$$

که با (۴) معادل است ؛ و لذا ، همان مجموعه جواب را دارد . انتظار این تقارن می‌رفت ، زیرا (۴) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش بر خط $x = y$ قرار دارد .

معادلات متمایز می‌توانند مجموعه‌جواب‌یکسان‌داشته‌باشند .مثلا "معادلات $x + y = 0$ و $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 0$ دقیقا " مجموعه جواب یکسان دارند و آن عبارت است از تمام نقاط خط $y = -x$. باید توجه داشت که گاهی معادلات با مجموعه جوابهای

مختلف جوابهای مشترک دارند. مثلاً، دو معادلهٔ اول مثال ۵ در جواب $x = 0, y = 1$ سهیم‌اند ولی سایرین نیستند. این را چگونه به‌طور هندسی توضیح می‌دهید؟

دو تقارن ممکن است سومی را ایجاب کند. مثلاً، یک نمودار متقارن نسبت به هر دو محور مختصات نسبت به مبداء متقارن است، و اگر نسبت به یک محور مختصات و مبداء متقارن باشد، نسبت به محور دیگر نیز چنین است (این احکام را تحقیق کنید).

مسائل

فرض کنید دستگاه xy با بردن مبداء آن به نقطهٔ داده شده انتقال یافته باشد. معادلات انتقال نظیر را بنویسید.

۱. $(0, 10)$ ۲. $(-5, 0)$ ۳. $(1, -2)$ ۴. $(-6, 4)$

مختصات قدیم مبداء جدید را پس از انتقال محورهای ذکر شده بیابید.

۵. $x' = x - 3, y' = y - 5$ ۶. $x' = x + 2, y' = y - 1$

۷. $x' = x, y' = y + 1$ ۸. $x' = x + 5, y' = y$

۹. فرض کنید دستگاه xy، 3 واحد به راست و 4 واحد به پایین انتقال یافته، و بدین وسیله دستگاه جدید $x'y'$ تولید شده باشد. فرض کنید $A = (1, 3)$، $B = (-3, 0)$، و $C = (-1, 4)$ سه نقطه در دستگاه جدید باشند. مختصات قدیم A، B، و C چه هستند؟

مختصات جدید نقاط $A = (2, 1)$، $B = (-1, 3)$، و $C = (-2, 5)$ را پس از انتقال مبداء دستگاه xy به

۱۰. نقطهٔ A ۱۱. نقطهٔ B ۱۲. نقطهٔ C

پیدا نمایید.

فرض کنید G نمودار معادلهٔ داده شده باشد. انتقالی از محورها را بیابید که معادله را ساده کند، و سپس G را توصیف نمایید.

۱۳. $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

۱۴. $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 12 = 0$

۱۵. $xy - x + 2y - 3 = 0$

۱۶. $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$

فرض کنید دستگاه xy حول مبداء خود به اندازهٔ زاویهٔ داده شده (در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) بچرخد. معادلات دوران نظیر را بنویسید.

۱۷. $90°$ ۱۸. $-30°$ ۱۹. $60°$ ۲۰. $135°$

مختصات جدید نقاط $A=(3,1)$ ، $B=(-1,5)$ ، و $C=(2,-3)$ را پس از دوران صفحهٔ xy حول مبداء خود به اندازهٔ زاویهٔ داده شده پیدا نمایید .

۲۱. 3π ۲۲. $-90°$ ۲۳. $\arctan \frac{5}{12}$ ۲۴. $210°$

۲۵. فرض کنید دستگاه xy حول مبداء خود به اندازهٔ $60°$ چرخیده ، و دستگاه $x'y'$ جدید تولید شده باشد . همچنین ، $A=(2\sqrt{3},-4)$ ، $B=(\sqrt{3},0)$ ، و $C=(0,-2\sqrt{3})$ سه نقطه در دستگاه جدید باشند . مختصات قدیم A ، B ، و C چه هستند ؟

فرض کنید G نمودار معادلهٔ داده شده باشد . معادله را با دوران دستگاه xy به اندازهٔ $45°$ (در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) ساده کرده ، و سپس G را توصیف نمایید .

۲۶. $3x^2-2xy+3y^2-8=0$

۲۷. $x^2+6xy+y^2-2=0$

۲۸. $x^2+2xy+y^2+x-y=0$

۲۹. فرض کنید بیضی $\frac{1}{2}x^2+y^2=1$ به اندازهٔ 3 واحد به چپ و 4 واحد به بالا انتقال یافته باشد . معادلهٔ بیضی جدید چیست ؟

۳۰. فرض کنید هذلولی $x^2-y^2=1$ به اندازهٔ 2 واحد به راست و 5 واحد به پایین انتقال یافته باشد . معادلهٔ هذلولی جدید چیست ؟

فرض کنید G نمودار معادلهٔ داده شده باشد . G از چهار تقارن مطرح شده در صفحهٔ ۹۲۸ کدامها را دارد ؟

۳۱. $x+y=1$ ۳۲. $xy=1$

۳۳. $|x|+|y|=1$ ۳۴. $(2-x)x^2-y^2=0$

۳۵. $x^2y+y-2x=0$ ۳۶. $x^2+2y^2=1$

هر تابع $y=f(x)$ را که نمودارش نسبت به

۳۷. محور x ۳۸. محور y

۳۹. مبداء ۴۰. خط $y=x$

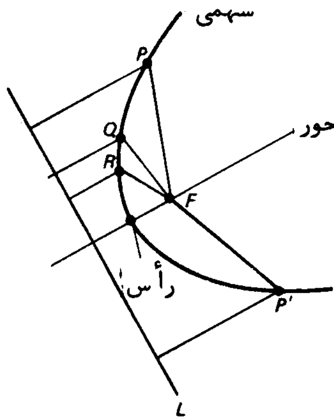
متقارن است توصیف نمایید .

۴۱. مختصات جدید نقاط $A=(5,5)$ ، $B=(2,-1)$ ، و $C=(12,-6)$ را پس از انتقال مبداء دستگاه xy به نقطهٔ B و دوران محورها به اندازهٔ زاویهٔ $\arctan \frac{3}{4}$ حول B پیدا نمایید .

۲.۱۰ سهمیها

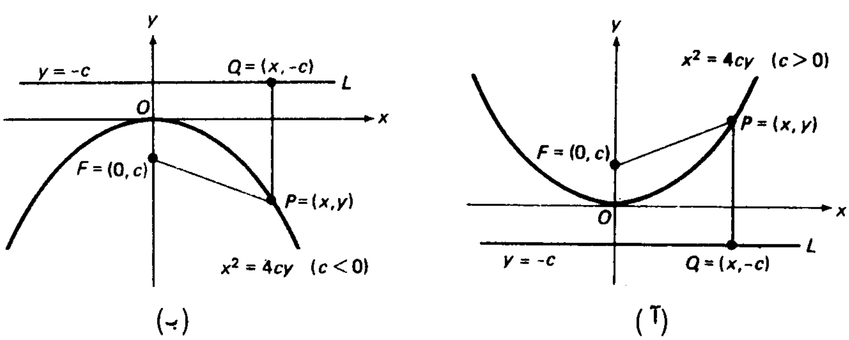
تعریف سهمی . بنابر تعریف ، *یک سهمی مجموعهٔ تمام نقاطی در صفحه است که از نقطهٔ ثابت F و خط ثابت L غیرشامل F متساوی‌الفاصله‌اند* . لذا ، مثلاً ، نقطهٔ P در شکل ۸ از

F و L به یک فاصله است ، و این امر در مورد نقاط Q و R نیز درست است . نقطهٔ F کانون و خط L **هادی** سهمی نام دارد . واضح است که سهمی نسبت به خط مار بر F و عمود بر L متقارن می‌باشد (مواضع نقاط P و P' را در شکل مقایسه کنید) . این خط **محور تقارن** ، یا فقط **محور** ، سهمی نام داشته ، و نقطهٔ منحصر به فرد برخورد آن با سهمی **رأس** سهمی نامیده می‌شود . توجه کنید که رأس در نیمه راه بین کانون F و هادی L قرار دارد .



شکل ۸

برای یافتن معادلهٔ سهمی ، مختصات قائم x, y را در صفحهٔ سهمی درنظر گرفته و آن را در " موضع متعارف " ، با رأس در مبداء O و محور تقارن در امتداد محور y ، قرار می‌دهیم . در این صورت ، کانون F نقطهٔ $(0, c)$ از محور y ، و هادی L خط $y = -c$ است (درنتیجه ، O در نیمه راه بین F و L قرار دارد) . اگر $c > 0$ ، سهمی مثل شکل ۹ (آ) به بالا باز می‌شود ، حال آنکه اگر $c < 0$ ، مثل شکل ۹ (ب) به پایین باز می‌گردد . فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از سهمی بوده ، و $Q = (x, -c)$ پای عمود وارد از P بر هادی L



شکل ۹

باشد . در این صورت ، طبق خاصیت معرف سهمی ،

$$|PF| = |PQ|,$$

که برحسب مختصات P و F به شکل زیر درمی‌آید :

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = \sqrt{(y + c)^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله ، به دست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2,$$

که به معادلهٔ

$$x^2 = 4cy, \tag{۱}$$

یا اگر y را تابعی از x بگیریم ، به

$$y = \frac{x^2}{4c}$$

ساده می‌شود . به عکس ، هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ چنان باشد که در (۱) صدق کند ،آنگاه با عکس‌کردن مراحل محاسبه ، درمی‌یابیم که $|PF| = |PQ|$. بنابراین ، (۱) معادلهٔ سهمی در موضع داده شده می‌باشد .

موضع متعارف دیگر سهمی آن‌است‌که رأسش را مثل قبل در مبداء گذارده ،ولی محور تقارنش را به جای محور y در امتداد محور x قرار دهیم . در این وضع کانون F نقطهٔ $(c, 0)$ از محور x ، و هادی L خط $x = -c$ می‌باشد . همان استدلال قبل نشان می‌دهدکه معادلهٔ سهمی در این وضع عبارت است از

$$y^2 = 4cx, \tag{۲}$$

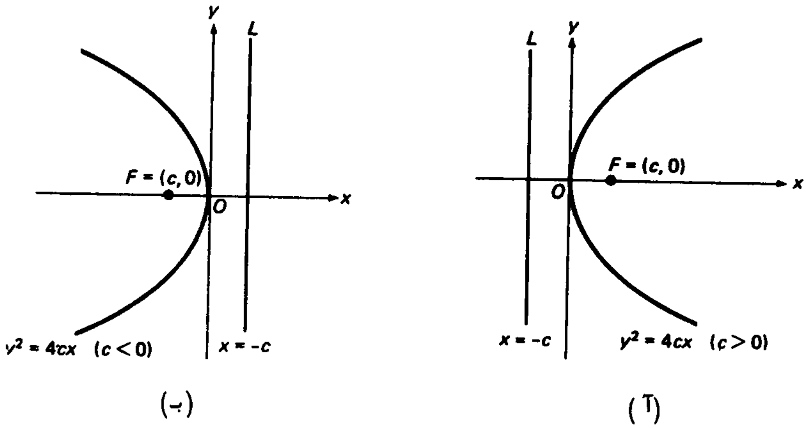
یا ، اگر x را تابع y بگیریم ،

$$x = \frac{y^2}{4c}$$

اگر $c > 0$ ، سهمی مثل شکل ۱۰ (آ) به راست باز می‌شود ، حال آنکه اگر $c < 0$ ،مثل‌شکل ۱۰ (ب) به‌چپ باز خواهد شد . توجه کنید که هر یک از معادلات (۱) و (۲) را می‌توان‌از دیگری به‌وسیلهٔ تعویض متغیرهای x و y باهم به دست آورد .

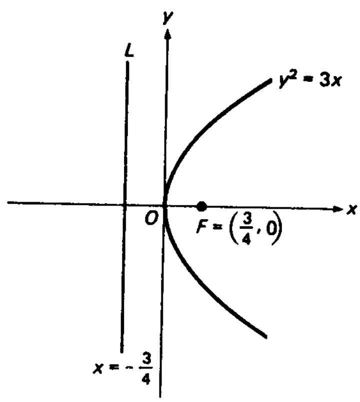
مثال ۱ . نمودار معادلهٔ $y^2 = 3x$ را بیابید .

حل . معادله به شکل (۲) به ازای $c = \frac{3}{4}$ است؛ و درنتیجه ، نظیر سهمیی است که رأسش



شکل ۱۰

در مبداء و محور x محور تقارن آن می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۱). سهمی به راست باز می‌شود (زیرا $c > 0$) ، کانون F آن در نقطهٔ $(\frac{3}{4}, 0)$ است ،وهادی‌اش خط $x = -\frac{3}{4}$ می‌باشد .



شکل ۱۱

معادلات به شکل متعارف . هر یک از معادلات (۱) و (۲) نمایش سهمیی است که رأسش در مبداء بوده و یکی از محورهای مختصات محور تقارن آن می‌باشد . فرض کنیم هر یک از سهمیها را با انتقال رأسش به نقطهٔ (a, b) انتقال داده باشیم . در این صورت ،معادلات (۱) و (۲) به

$$(x - a)^2 = 4c(y - b) \tag{۳}$$

و

$$(y - b)^2 = 4c(x - a) \tag{۴}$$

تبدیل می‌شوند (معادلهٔ ($'$۴) ، صفحهٔ ۹۲۷ ، را به یاد آورید) . به بیان مشروح، (۳) معادلهٔ سهمی به رأس (a, b) ، فاصلهٔ کانون تا رأس $|c|$ ، و خط $x = a$ به عنوان محور است که اگر $c > 0$ به بالا و اگر $c < 0$ به پایین باز می‌شود ، حال آنکه (۴) معادلهٔ سهمی به رأس (a, b) ، فاصلهٔ کانون تا رأس $|c|$ ، و خط $y = b$ به عنوان محور است که اگر $c > 0$ به راست و اگر $c < 0$ به چپ باز می‌شود . این معادلات را **معادلات سهمی به شکل متعارف** می‌نامند . معادلات (۳) و (۴) در حالت خاص $a = b = 0$ به (۱) و (۲) تحویل می‌شوند .

مثال ۲ . نمودار معادلهٔ

$$x^2 - 2x + 8y + 9 = 0 \tag{۵}$$

را پیدا کنید .

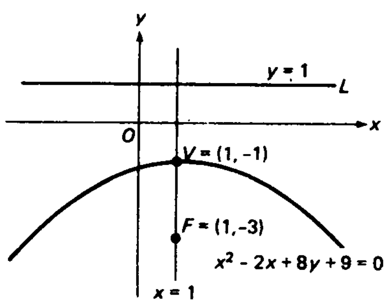
حل . با کامل کردن مربعها ، معلوم می‌شود که (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x - 1)^2 + 8(y + 1) = 0$$

یا

$$(x - 1)^2 = -8(y + 1),$$

که به شکل متعارف (۳) به ازای $a = 1, b = -1, c = -2$ است . این معادلهٔ سهمی به رأس $V = (1, -1)$ و محور $x = 1$ است (ر.ک . شکل ۱۲) . سهمی به پایین باز می‌شود (چون



شکل ۱۲

$c < 0$) ، کانونش $F = (1, -3)$ است ، و هادی‌اش L خط $y = 1$ می‌باشد . برای تعیین F و L از این استفاده کرده‌ایم که فاصلهٔ کانون تا هادی $2 = |c|$ است ؛ درنتیجه ، F ، 2 واحد زیر رأس V است ، حال آنکه L ، 2 واحد بالای V می‌باشد .

هر یک از معادلات (۳) و (۴) دارای این خاصیت است که نسبت به یکی از دو

متغیر x و y درجهٔ دوم و نسبت به دیگری خطی است و جمله‌ای شامل حاصل ضرب xy ندارد. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان با تقسیم بر ضریب جملهٔ درجهٔ دوم به یکی از صور زیر نوشت:

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (B \neq 0) \tag{۶}$$

یا

$$y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (A \neq 0) \tag{۷}$$

اما، مثل مثال ۲، هر یک از معادلات (۶) و (۷) را می‌توان با کامل کردن مربع به‌یکی‌از اشکال متعارف (۳) و (۴) درآورد؛ و لذا، نمودار هر معادله یک سهمی است که محورش موازی یکی از محورهای مختصات است. در واقع، با کامل کردن مربعها در (۶) و (۷)، معادلات معادل زیر به دست می‌آیند:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = -B\left(y + \frac{C}{B} - \frac{A^2}{4B}\right), \tag{۶'}$$

و

$$\left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = -A\left(x + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A}\right), \tag{۷'}$$

که (۶') به شکل (۳) و (۷') به شکل (۴) است. لذا، یک سهمی معادله‌ای به شکل (۶) یا (۷) دارد اگر و فقط اگر محورش با یکی از محورهای مختصات موازی باشد. درمثال بعد سهمیی با محور *مایل* درنظر می‌گیریم.

مثال ۳. معادلهٔ سهمیی را بیابید که نقطهٔ $(1, 1)$ کانون F و خط

$$x + y + 2 = 0 \tag{۸}$$

محور L آن باشد.

حل. نقطهٔ $P = (x, y)$ متعلق به سهمی است اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}},$$

که در آن طرف چپ فاصلهٔ بین P و F است، و طرف‌راست فاصلهٔ بین P و خط (۸) است که به کمک قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ ۳۴، حساب می‌شود. با مربع کردن طرفین این معادله خواهیم داشت

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}(x + y + 2)^2.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$2(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + 4(x + y) + 4$$

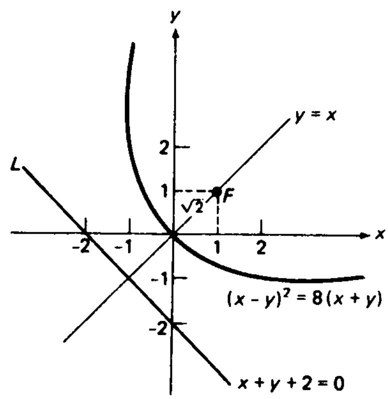
یا

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0, \qquad (۹)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$(x - y)^2 = 8(x + y). \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که معادلهٔ (۹) به شکل (۶) یا (۷) نیست، و در واقع جمله‌ای شامل حاصل ضرب xy دارد. شکل ۱۳ سهمی مورد بحث را نشان می‌دهد، که مبداء رأس آن بوده و خط



شکل ۱۳

مایل $y = x$ محور آن می‌باشد. به زبان جبر، تقارن سهمی حول خط $y = x$ متناظر این امر است که معادلهٔ (۹) یا (۱۰) از تعویض متغیرهای x و y باهم تغییر نمی‌کند.

مثال ۴. از شکل ۱۳ برمی‌آید که سهمی (۱۰) حاصل دوران سهمی

$$y^2 = 4\sqrt{2}x \qquad (۱۱)$$

حول رأس و به‌اندازهٔ زاویهٔ $45°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است. این مطلب را به طور جبری تحقیق کنید.

حل. با انتخاب $\theta = 45°$ در معادلات دوران (۲)، صفحهٔ ۹۲۴، مثل مثال ۴، صفحهٔ ۹۲۵، به دست می‌آوریم

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

با گذاردن این عبارات در (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y')\right]^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}(2x'),$$

یا معادلاً

$$y'^2 = 4\sqrt{2}x', \qquad (11')$$

که همان معادلهٔ (۱۱) است جزآنکه x و y پریمدار شده‌اند. لذا، معادلهٔ (۱۰) به‌معادلهٔ ('۱۱) در یک دستگاه $x'y'$ حاصل از دوران دستگاه xy به اندازهٔ زاویهٔ $45°$ درجهت خلاف عقربه‌های ساعت ساده شده است. بنابراین، دوران سهمی (۱۱) به اندازهٔ $45°$ خلاف عقربه‌های ساعت حول مبداء (رأس آن) آن را به سهمی (۱۰) خواهد برد.

خاصیت انعکاسی سهمی. یک خاصیت جالب سهمی، که کاربردهای عملی بسیار دارد، *خاصیت انعکاسی* است. فرض کنیم T خط مماس در هر نقطهٔ $P = (x_0, y_0)$ از سهمی

$$y^2 = 4cx \qquad (c > 0), \qquad (12)$$

با کانون $F = (c, 0)$ بوده، و Q نقطهٔ تقاطع T با محور x باشد [ر.ک. شکل ۱۴ (آ)].
با مشتقگیری از (۱۲) نسبت به x، به دست می‌آوریم

$$2y\frac{dy}{dx} = 4c$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{y}.$$

لذا، اگر $y_0 \neq 0$، مماس T خطی به معادلهٔ

$$y - y_0 = \frac{2c}{y_0}(x - x_0),$$

یا معادلاً

$$yy_0 = 2c(x - x_0) + y_0^2 = 2c(x - x_0) + 4cx_0,$$

است، که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$yy_0 = 2c(x + x_0).$$

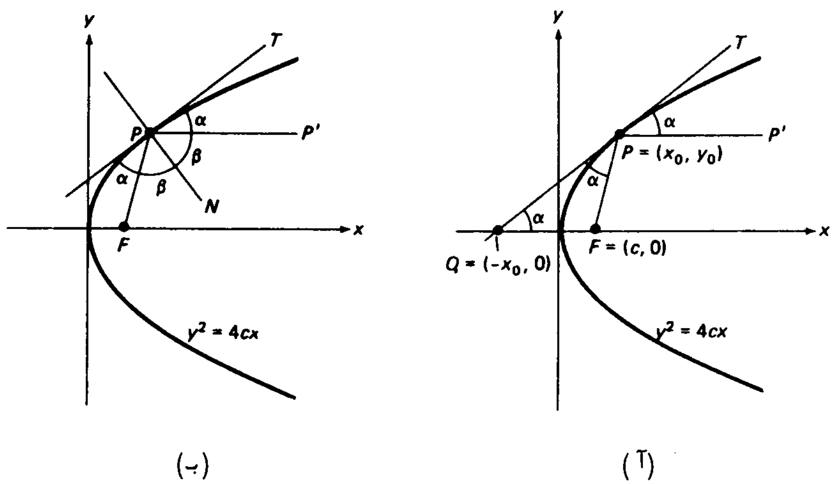
بنابراین، T دارای قطع x ی برابر $-x_0$ است؛ یعنی، $Q = (-x_0, 0)$ و

$$|FQ| = x_0 + c$$

(ر.ک. شکل) . اما

$$|FP| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + 4cx_0} = \sqrt{(x_0 + c)^2} = x_0 + c,$$

درنتیجه ، $|FP| = |FQ|$. لذا ، مثلث FPQ متساوی‌الساقین با دو زاویهٔ مساوی‌در P و Q است[1] . پس نتیجه می‌شود که زاویهٔ بین T و PF مساوی زاویهٔ بین T و محور x است ، که خود مساوی زاویهٔ بین T و PP' می‌باشد که PP' خط مار بر P موازی محور x خواهد بود (ر . ک . شکل ۱۴ (آ) ، که در آن این زاویه با α نموده می‌شود) . به بیان معادل ، اگر خط قائم بر سهمی در نقطهٔ P باشد ، زاویه بین N و PF مساوی زاویهٔ بین N و PP' است . (ر . ک . شکل ۱۴ (ب) ، که در آن این زاویه با β نموده می‌شود) .



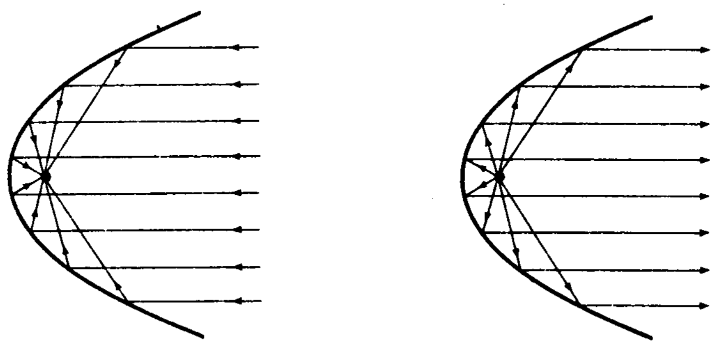
شکل ۱۴

حال فرض کنیم S یک آینهٔ سهموی باشد ؛ یعنی ، آینه‌ای به شکل سطح حاصل از دوران یک سهمی حول محور تقارن خود (یک سهمی‌گون دوار) . از نکات فوق و قانون انعکاس اثبات شده در مثال ۶ ، صفحهٔ ۳۳۱ ، که علاوه‌بر صفحه برای یک سطح خمیدهٔ هموار نیز برقرار است ، معلوم می‌شود که اشعهٔ صادر شده از یک منبع نقطه‌ای نور واقع در

---

۱ . در اینجا تلویحا " فرض می‌کنیم نقطهٔ تماس P بر محور x (محور سهمی) واقع نیست ؛ اگر چنین باشد ، پاره‌خط FP نیز بر محور x واقع بوده و با مماس T که اینک قائم است زاویهٔ $90°$ می‌سازد (چرا ؟) . ضمن گذشتن از این مطلب ذکر می‌کنیم که هر سهمی محورهایش را در زوایای قائمه قطع می‌کند .

کانون S (کانون سهمی مولد) پس از بازگشت از S به صورت موازی درمی‌آیند ، واین امر در شکل ۱۵ (آ) نموده شده است . به این دلیل است که از آینه‌های سهموی درچراغهای جلو اتومبیل ، نورافکنها ، وآنتنهای رادار ، و غیره استفاده می‌شود . با همین استدلال " در جهت عکس " ، می‌بینیم که یک دسته شعاع نور موازی پس از برخورد با یک آینهٔ سهموی در یک نقطه از محور تقارن آن ، مثل شکل ۱۵ (ب) ، جمع می‌شوند . به این دلیل، سعی می‌کنند با رنج بسیار آینه‌های سهموی را بدقت ساخته و در تلسکوپهای انعکاسی به کار برند .



(ب) (آ)

شکل ۱۵

سهمیها نقش مهمی در حل مسائل مکانیک در صفحه و فضا دارند . بخصوص، یک پرتابه که فقط تحت اثر ثقل باشد مسیر سهموی می‌پیماید (ر.ک. مثال ۱ ، صفحهٔ ۱۱۰۴)، و کابل یک پل معلق درصورتی که وزن جاده توزیع یکنواخت داشته باشد شکل یک سهمی خواهد داشت (ر.ک. مثال ۶ ، صفحهٔ ۱۱۱۱) .

مسائل

معادلهٔ سهمی را درصورتی به شکل متعارف بنویسید که

۱. به بالا باز شود ، رأسش $(0,0)$ و فاصلهٔ کانون تا هادی‌اش $\frac{1}{4}$ باشد

۲. به پایین باز شود ، رأسش $(0,0)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 8 باشد

۳. به چپ باز شود ، رأسش $(0,0)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 5 باشد

۴. به راست باز شود ، رأسش $(0,0)$ و فاصلهٔ کانون تاهادی‌اش $\frac{7}{2}$ باشد

۵. به پایین باز شود ، رأسش $(-2,\ 1)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 9 باشد

۶. به بالا باز شود، رأسش $(-3, 4)$ و فاصلهٔ کانون تا هادی‌اش $\frac{5}{2}$ باشد

۷. به راست باز شود، رأسش $(7, 6)$ و فاصلهٔ کانون تا هادی‌اش $\frac{11}{4}$ باشد

۸. به چپ باز شود، رأسش $(-5, -10)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 3 باشد

معادلهٔ سهمی با کانون و هادی داده شده را بیابید.

۹. $(7, 2), x - 5 = 0$

۱۰. $(4, 3), y + 1 = 0$

۱۱. $(-8, 1), y - 2 = 0$

۱۲. $(5, -3), x - 4 = 0$

۱۳. $(2, -1), x - y - 1 = 0$

۱۴. $(0, 0), x + 2y - 3 = 0$

سهمی به معادلهٔ داده شده را رسم کرده، رأس V، کانون F، و هادی L آن را بیابید.

۱۵. $y^2 = 8x$

۱۶. $x^2 = 6y$

۱۷. $x^2 = -4y$

۱۸. $y^2 = -5x$

۱۹. $(y + 1)^2 = -6(x + 2)$

۲۰. $(x - \frac{1}{2})^2 = -8(y + 3)$

۲۱. $(x + 4)^2 = 2(y - 3)$

۲۲. $(y - 2)^2 = 10x$

۲۳. $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

۲۴. $y^2 - 8x + 8y = 0$

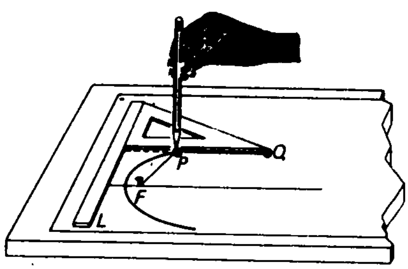
۲۵. $y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$

۲۶. $x^2 - 2x + 12y + 25 = 0$

۲۷. $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y = 0$

۲۸. یک سهمی به کانون F و هادی L را می‌توان به صورت زیر ساخت:

به یک تخته رسم خط‌کشی وصل کنید که یک طرفش در امتداد L باشد، و ضلع کوتاه یک گونیا را به خط‌کش بچسبانید. در رأس مقابل Q مثلث یک سر قطعه‌ای از نخ به طول ضلع بلند مثلث را بسته و سر دیگر آن را در F محکم نمایید. مثلث را در امتداد خط‌کش بلغزانید ضمن آنکه، مثل شکل ۱۶، نخ را به‌وسیلهٔ یک مدادکشیده نگهداشته‌اید. در این صورت، نقطهٔ P مداد بخشی از یک سهمی را رسم خواهد کرد.

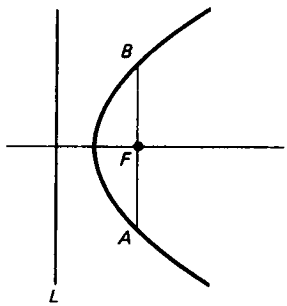


ساختن سهمی

شکل ۱۶

توضیح دهید چرا این ساختن کار می‌کند .

۲۹ . پاره‌خطی که دو انتهایش بر یک سهمی است وتر آن سهمی نام دارد ، و وتر مار بر کانون F عمود بر محور و موازی هادی L *راست وتر کانونی* نامیده می‌شود (این در شکل ۱۷ وتر AB است) .



شکل ۱۷

نشان دهید که طول راست وتر کانونی دوبرابر فاصلهٔ F تا L است .

۳۰ . نشان دهید که دایره به‌قطر راست وتر کانونی یک‌سهمی بر هادی سهمی مماس‌است .

۳۱ . نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x = ct^2, \qquad y = 2ct \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad \text{(یک)}$$

سهمی است . در جهت منحنی بحث کنید .

۳۲ . نشان‌دهید که مماس بر سهمی (یک) در یک نقطه به پارامتر t خط $x - ty + ct^2 = 0$ است .

۳۳ . مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای سهمی $y^2 = 4cx$ را بیابید که رأس یک‌انتهای آنها باشد .

۳۴ . سهمی $y^2 = 4cx \ (c > 0)$ را به رأس $V = (0, 0)$ و کانون $F = (c, 0)$ در نظر بگیرید . نشان دهید نقطهٔ $A = (a, 0)$ واقع بر محور سهمی درصورتی از هر نقطهٔ دیگرسهمی به V نزدیکتر است که $0 < a \leq 2c$ ، ولی در صورتی به نقطه‌ای از سهمی غیر از V نزدیکتر است که $a > 2c$. (بخصوص، کانون F از هر نقطهٔ دیگر سهمی به V نزدیکتر است .)

نقاط اشتراک خط و سهمی داده شده را (درصورت وجود) بیابید .

✓ ۳۵ . $3x - 2y + 6 = 0, y^2 = 6x$

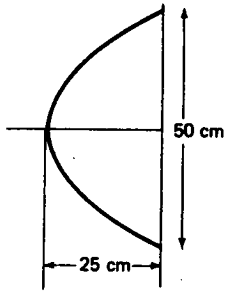
✓ ۳۶ . $x + y - 3 = 0, x^2 = 4y$

۳۷. $x + 6y + 6 = 0, x^2 = -18y$

۳۸. $3x + 4y - 12 = 0, y^2 = -9x$

۳۹. با دوران محورها، نشان دهید که نمودار معادلهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ بخشی از یک‌سهمی است. رأس V، کانون F، و هادی L این سهمی را پیدا کنید.

۴۰. مقطع عرضی یک‌آینهٔ سهموی در شکل ۱۸ نموده شده است. منبع نوردرچه‌فاصله‌ای از رأس‌آن قرار گیرد تا اشعهٔ منعکس شده موازی باشند؟



شکل ۱۸

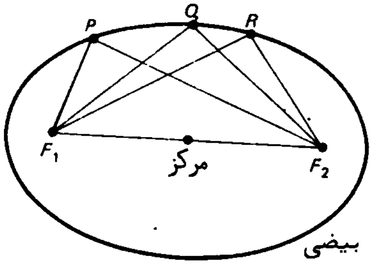
۴۱. دو خط مار بر نقطهٔ $(2, 9)$ و مماس بر سهمی $y^2 = 36x$ را بیابید.

۴۲. مماس بر سهمی $x^2 = 16y$ و عمود بر خط $2x + 4y + 7 = 0$ را بیابید.

۴۳. مماس بر سهمی $y^2 = 12x$ و موازی خط $3x - 2y + 30 = 0$ را بیابید. فاصلهٔ بین‌مماس و خط چقدر است؟

۳.۱۰ بیضیها

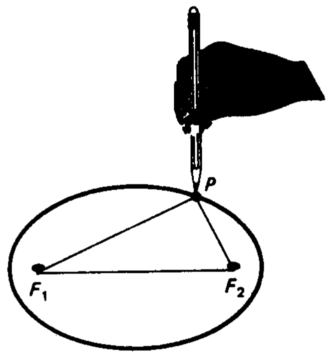
تعریف بیضی. بنابرتعریف، **بیضی مجموعهٔ** ***تمام‌نقاطی‌از صفحه‌است که مجموع فواصلشان تا دو نقطهٔ ثابت*** F_1 و F_2 ***ثابت باشد.*** لذا، مثلاً، در شکل ۱۹ مجموع فواصل نقطهٔ P تا دو نقطهٔ F_1 و F_2 همان مجموع نظیر به نقطهٔ Q یا نقطهٔ R می‌باشد. نقاط F_1 و F_2



شکل ۱۹

کانونهای بیضی نام داشته، و نقطهٔ میانی پارهخط F_1F_2 واصل بین کانونها مرکز بیضی خوانده میشود.

این تعریف ما را به ساختن سادهٔ یک بیضی هدایت میکند. فرض کنید دو پونز در F_1 و F_2 یک صفحهٔ کاغذ فروکرده، و مثل شکل ۲۰ یک حلقه نخ در آنها قرار دادهباشیم. (طبیعی است که طول نخ نمیتواند از دوبرابر فاصلهٔ بین پونزها کمتر باشد.) حال اگر



ساختن یک بیضی

شکل ۲۰

مدادی را داخل حلقه کرده و با کشیده نگهداشتن نخ آن را حرکت دهیم، نقطهٔ P مداد یکبیضی بهکانونهای F_1 و F_2 رسم خواهدکرد. بهاین دلیل است که مجموع $|PF_1| + |PF_2|$ به ازای هر موضع P، مساوی طول نخ منهای فاصلهٔ بین کانونها میباشد. اگر کانونها بر هم منطبق باشند، بیضی به دایره تبدیل خواهد شد.

برای یافتن معادلهٔ بیضی، در صفحهٔ آن مختصات قائم x و y را اختیار کردهوآن را در "موضع متعارف" قرار میدهیم به این ترتیب که، مثل شکل ۲۱ (آ)، مرکزش مبداء O و کانونهایش در امتداد محور x باشند. در این صورت، کانونها عبارتنداز نقاط $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ که به فاصلهٔ $2c$ $(c > 0)$ از هم قرار دارند. فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطهای از بیضی بوده، و $2a$ مجموع ثابت فواصل P از کانونها باشد. در این صورت، $a > c$ جز در حالت حدی $a = c$ که در آن بیضی به پارهخطواصل بین کانونها "تباه میشود". بنابر خاصیت معرف بیضی،

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

که به شکل زیر درمیآید:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

یا ، برحسب مختصات P ، F_1 ، و F_2 ،

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله ، به دست می‌آوریم

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

که به شکل زیر ساده می‌شود :

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

با مجذور کردن مجدد طرفین ، معلوم می‌شود که

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

و درنتیجه ،

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad (۱)$$

با گرفتن ثابت مثبت b به صورت زیر

$$b^2=a^2-c^2,$$

یا ، معادلا" ،

$$a^2=b^2+c^2, \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

که به نوبهٔ خود ، پس از تقسیم بر a^2b^2 ، خواهد شد

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (۳)$$

به عکس، هرگاه نقطهٔ $P=(x,y)$ چنان باشد که (۳) برقرار شود ، آنگاه در صورتی که مراحل این محاسبات را بدقت عکس کنیم خواهیم داشت $|PF_1|+|PF_2|=2a$ (شرح مطلب را به عنوان تمرین می‌گذاریم) . بنابراین ، (۳) معادلهٔ بیضی در موضع متعارف است .

محورهای اطول و اقصر. چون معادلهٔ (۳) در صورت تعویض x با $-x$ و y با $-y$ تغییر نمی‌کند ، هر دو محور مختصات محورهای تقارن بیضی (۳) می‌باشند . به طور کلی ، هر بیضی دو محور تقارن دارد ، یکی خط مار بر کانونهای F_1 و F_2 و دیگری عمود منصف پاره‌خط F_1F_2 . یک بیضی دو وتر از محورهای تقارن خود جدا می‌کند . وتر بزرگتر را *محور اطول* و وتر کوچکتر *محور اقصر* بیضی نام دارد . بیضی (۳) دارای قطعهای x ، $(\pm a, 0)$

و قطعهای y، $(0, \pm b)$ بوده ،وچون $a > b$ ،به‌خاطر فرمول (۲) ،وتر واصل بین‌نقاط $(\pm a, 0)$ از وتر واصل بین نقاط $(0, \pm b)$ بزرگتر است . لذا ، محور اطول این بیضی در امتداد محور x و محور اقصر آن در امتداد محور y می‌باشد [ر.ک. شکل ۲۱ (آ)] . نقاط انتهایی محور اطول ، که دراین حالت‌قطعهای x ، $(\pm a, 0)$ اند ، رئوس بیضی نام‌دارند .کانونهای بیضی در نقاط $(\pm c, 0)$ می‌باشند ، که

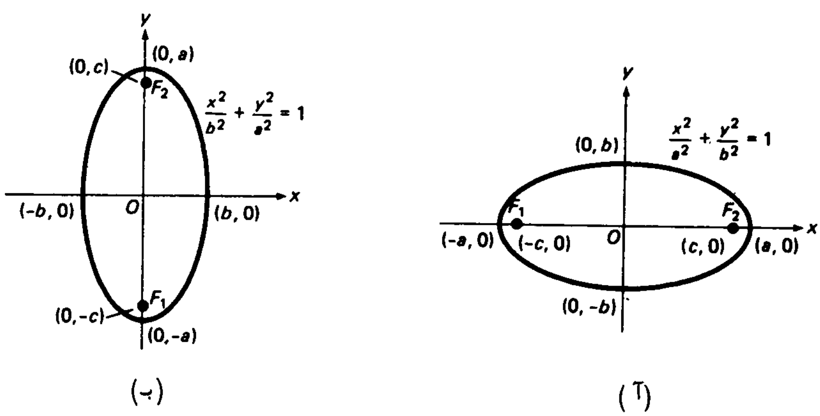
$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

و این را می‌توان با حل معادلهٔ (۲) نسبت به c به دست آورد .

اگر در معادلهٔ (۳) x و y را باهم عوض‌کنیم ، بیضی دیگر

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (۴)$$

را به دست می‌آوریم که آن را نیز در موضع متعارف می‌گویند . بیضی (۴) دارای قطعهای x ، $(\pm b, 0)$ و قطعهای y ، $(0, \pm a)$ اســـت‌که $a > b$. لذا ، در اینجا محور اطول در امتداد محور y بوده ، و نقاط‌انتهایی‌اش (رئوس) عبارتنداز $(0, \pm a)$ ، ولی محور اقصر با نقاط‌انتهایی $(\pm b, 0)$ در امتداد محور x می‌باشد [ر.ک. شکل ۲۱ (ب)] . بنابراین ، کانونهای بیضی (۴) نقاط $(0, \pm c)$ می‌باشند ، که مجددا" c مساوی $\sqrt{a^2 - b^2}$ می‌باشد .



شکل ۲۱

فرمول (۲) تعبیر هندسی ساده‌ای دارد . نقاط $(0, 0)$ ، $(0, b)$ ، و $(c, 0)$ درشکل ۲۱ (آ) ، یا نقاط $(0, 0)$ ، $(b, 0)$ ،و $(0, c)$ در شکل ۲۱ (ب) ، رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند . این مثلث به طول ضلعهای b و c بوده ، و وترش به طول a است زیرا هر نقطهٔ انتهایی محور اقصر یک بیضی در فاصلهٔ a تا کانونها قرار دارد (چرا؟) . بنابراین ،طبق قضیهٔ

فیثاغورس $a^2 = b^2 + c^2$. چون a نصف طول محور اطول بوده و b نصف طول محور اقصر است ،دو طول a و b را معمولاً" نیم محور *اطول* و نیم محور *اقصر* می‌نامند .

مثال ۱ . نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ را بیابید .

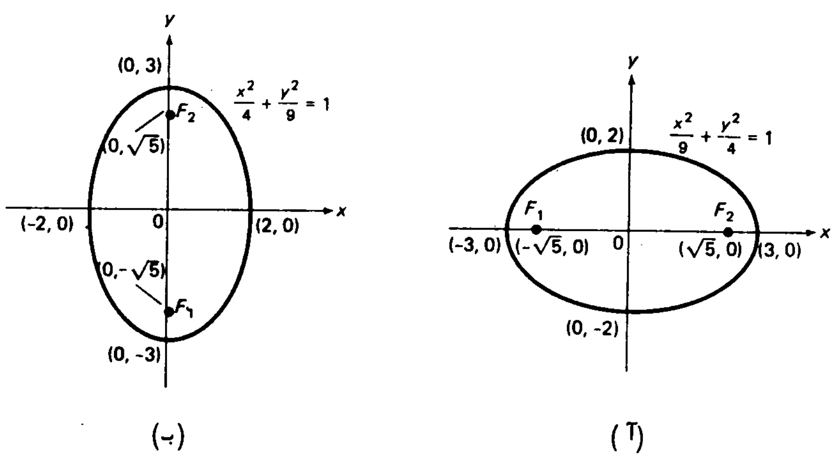
حل . معادله به شکل (۳) است که در آن $a = 3$ ، $b = 2$ ، و

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

بنابراین ، نمودارش یک بیضی به مرکز مبداء است که محور اطولش افقی با نقاط انتهایی $(\pm 3, 0)$ ، محور اقصرش قائم با نقاط انتهایی $(0, \pm 2)$ ، کانونهایش عبارتنداز $F_1 = (-\sqrt{5}, 0),\ F_2 = (\sqrt{5}, 0)$ بر محور x [ر.ک. شکل ۲۲ (آ)] .

مثال ۲ . نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ را بیابید .

حل . معادله به شکل (۴) است با همان مقادیر a ، b ، و c مثال ۱ . لذا ، نمودارش بیضی است به‌مرکز مبداء که دارای محور اطول قائم با نقاط‌انتهایی $(0, \pm 3)$ ،محوراقصر افقی با نقاط‌انتهایی $(\pm 2, 0)$ ، و کانونهای $F_1 = (0, -\sqrt{5}),\ F_2 = (0, \sqrt{5})$ بر محور y [ر.ک. شکل ۲۲ (ب)] .



شکل ۲۲

معادلات به شکل متعارف. معادلات (۳) و (۴) نمایش بیضیهایی هستند به مرکز مبداء

که محورهای مختصات محورهای تقارن آن می‌باشند . معادلات کلیتر

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{۵}$$

و

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1 \tag{۶}$$

نمایش بیضیهایی هستند که از حیث اندازه و شکل مانند بیضیهای (۳) و (۴) بوده ولی مرکزشان نقطهٔ (x_0, y_0) است و محورهایشان موازی محورهای مختصات می‌باشند . به طور مشروح ، رابطهٔ (۵) معادلهٔ بیضی است به مرکز (x_0, y_0) ، محور اطول در امتداد خط افقی $y=y_0$ ، و محور اقصر در امتداد خط قائم $x=x_0$ ، حال آنکه رابطهٔ (۶) معادلهٔ بیضی است به مرکز (x_0, y_0) ، محور اطول در امتداد خط قائم $x=x_0$ ، و محور اقصر در امتداد خط افقی $y=y_0$. در هر دو حالت ، محور اطول به طول $2a$ و محور اقصر به طول $2b$ می‌باشد . این معادلات را *معادلات* بیضی به *شکل متعارف* می‌نامند . طبیعی است که روابط (۵) و (۶) در حالت خاص $x_0=y_0=0$ به روابط (۳) و (۴) تحویل می‌شوند .

مثال ۳ . نمودار معادلهٔ

$$x^2+4y^2+4x-8y+7=0 \tag{۷}$$

را بیابید .

حل . با کامل کردن مربعات ، (۷) را به صورت زیر می‌نویسیم :

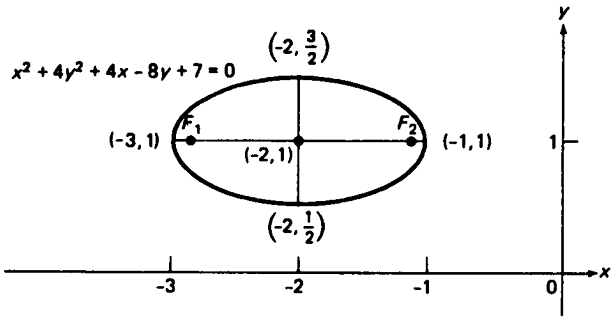
$$(x+2)^2+4(y-1)^2=1$$

یا ، معادلاً ،

$$(x+2)^2+\frac{(y-1)^2}{(\frac{1}{2})^2}=1,$$

که به شکل متعارف (۵) به ازای $x_0=-2,\ y_0=1,\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$ است . نمودار این معادله یک بیضی به مرکز $(-2, 1)$ است که محور اطولش افقی و محور اقصرش قائم می‌باشد (ر . ک . شکل ۲۳) نقاط انتهایی محورهای اطول و اقصر عبارتند از $(-2\pm 1, 1)$ و $(-2, 1\pm\frac{1}{2})$ ، یعنی ، $(-3, 1), (-1, 1)$ و $(-2, \frac{1}{2}), (-2, \frac{3}{2})$. به‌علاوه ، چون فاصلهٔ هر کانون تا مرکز مساوی است با $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ، کانونها عبارتند از $F_1=(-2-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ و

$.F_2 = (-2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$



شکل ۲۳

هر یک از معادلات (۵) و (۶) دارای خواص زیر است: نسبت به هر دو متغیر x و y از درجهٔ دو بوده و جملهٔ شامل حاصل ضرب xy را ندارد، و به‌علاوه ضرایب x^2 و y^2 متحدالعلامه می‌باشند. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان، پس از تقسیم بر ضریب x^2، به شکل زیر نوشت:

$$x^2 + ky^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (k > 0) \tag{۸}$$

اما، درست مثل مثال ۳، می‌توان معادلهٔ (۸) را با کامل کردن مربعها به یکی از اشکال متعارف (۵) و (۶) درآورد؛ و لذا، صرف نظر از بعضی حالات استثنایی، نمودار (۸) یک‌بیضی است که محورهایش موازی محورهای مختصات‌اند. در واقع، پس از کامل کردن مربعها، می‌توان (۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + k\left(y + \frac{B}{2k}\right)^2 = D, \tag{۸'}$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4k} - C.$$

اگر $D = 0$، نمودار (۸′)، و درنتیجه (۸)، تنها نقطهٔ $(-A/2, -B/2k)$ است، ولی اگر $D < 0$، نقاطی مانند (x, y) وجود ندارند که در (۸) صادق باشند؛ یعنی، نمودار (۸) "تهی" می‌باشد. اینها حالاتی استثنایی‌اند که در بالا ذکر شد. اما، اگر $D > 0$، می‌توان (۸′) را به شکل معادل زیر نوشت:

$$\frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{D})^2} + \frac{[y + (B/2k)]^2}{(\sqrt{D/k})^2} = 1,$$

که معادلهٔ یک بیضی به مرکز $(-A/2, -B/2k)$ می‌باشد . اگر $k > 1$ ، بیضی دارای محور اطول افقی به طول $2\sqrt{D}$ و محور اقصر قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ است ، ولی اگر $k < 1$ ، دارای محور اطول قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ و محور اقصر افقی به طول $2\sqrt{D}$ می‌باشد . اگر $k = 1$ ، بیضی به دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt{D}$ تحویل‌می‌شود ، و در این صورت این بحث به تحلیل‌معادلهٔ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ تبدیل می‌شود که قبلاً" در صفحات ۳۹ تا ۴۰ صورت گرفت . لذا ، خلاصه کرده می‌گوییم یک بیضی دارای معادلهٔ (۸) است اگر و فقط اگر محورهایش موازی محورهای مختصات باشد .

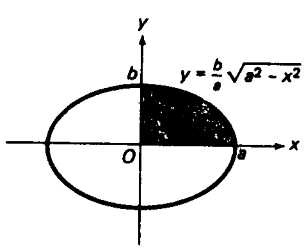
مثال ۴ . مساحت A محصور به‌یک‌بیضی با نیم‌محور اطول a و نیم‌محور اقصر b را پیدا کنید.

حل . با فرض اینکه بیضی نمودار معادلهٔ $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ است خللی به کلیت وارد نمی‌شود . با فرض $y \geq 0$ و حل این معادله نسبت به y معلوم می‌شود که

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \leq x \leq a).$$

بنابر تقارن ، A چهار برابر مساحت بین این منحنی و محور x در ربع اول است (مساحت سایه‌دار شکل ۲۴) . بنابراین ، به کمک مثال ۲ ، صفحهٔ ۶۲۵ ،

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\left(\frac{1}{4}\pi a^2\right) = \pi ab.$$



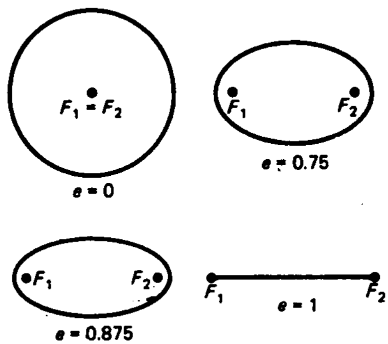
شکل ۲۴

توجه کنید که اگر $a = b$ ، A به مساحت πa^2 داخل یک دایره به شعاع a تحویل می‌شود .

خروج از مرکز بیضی . شکل یک بیضی را می‌توان به راحتی با عددی بین 0 و 1 ، یعنی

$$e = \frac{c}{a}$$

توصیف کرد (این عدد را با پایهٔ لگاریتم طبیعی خلط نکنید) . این عدد ، به‌نام خروج از مرکز ، نسبت فاصلهٔ بین دو کانون به طول محور اطول است ، و درجهٔ " بیضوی "بیضی را می‌سنجد . اگر e نزدیک 0 باشد ، بیضی تقریبا " مستدیر است ، ولی اگر e نزدیک 1 باشد ، بیضی خیلی باریک شده و " به شکل سیگار برگ " درمی‌آید . با گرفتن دایره به شعاع a و پاره‌خط به طول $2a$ به عنوان حالات حدی بیضی ، مقادیر $e = 0$ و $e = 1$ را نیز مجاز می‌گیریم (اگر $e = 0$ ، کانونها یکی می‌شوند ، و اگر $e = 1$ ، به فاصلهٔ $2a$ ازهم قرار می‌گیرند) . درشکل ۲۵ نحوهٔ بستگی شکل یک بیضی با خروج از مرکز e خود را نشان می‌دهد



بیضیها با خروج از مرکزهای مختلف

شکل ۲۵

که در آن محور اطول در تمام حالات به یک طول بوده و کانونها F_1 و F_2 می‌باشند .

مثال ۵ . خروج از مرکز بیضی شکل ۲۲ (آ) چقدر است ؟

حل . در اینجا $a = 3$ و $c = \sqrt{5}$ ؛ درنتیجه ، خروج از مرکز عبارت است از

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745.$$

بیضی شکل ۲۲ (ب) همین خروج از مرکز را دارد .

مثال ۶ . معادلهٔ بیضی را بیابید که نیم محور اطولش 4 و خروج از مرکزش $\frac{1}{2}$ بوده و مرکزش مبداء و محور اطولش افقی باشد .

حل. داریم $a = 4$ و

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16 - b^2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

لذا، $b^2 = 12$ و بیضی معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

خاصیت انعکاسی بیضی. بیضی، مانند سهمی، *خاصیت انعکاسی* جالبی دارد. فرض‌کنیم T خط مماس در نقطهٔ $P = (x_0, y_0)$ از بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (۹)$$

به کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ بوده، و Q_1 و Q_2 نقاط اشتراک T با عمودهای مرسوم از F_1 و F_2 بر T باشند[ر.ک. شکل ۲۶ (آ)]. با مشتقگیری از (۹) نسبت به x، به دست می‌آوریم

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

لذا، اگر $y_0 \neq 0$، مماس T خطی است به معادلهٔ

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

یا

$$b^2x_0x + a^2y_0y - b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = 0.$$

اما

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2, \qquad (۱۰)$$

زیرا P بر بیضی واقع است؛ درنتیجه، معادلهٔ T به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0, \qquad (۱۱)$$

یا، معادلاً،

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1. \qquad (۱۱')$$

حال فرمول زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{|F_1Q_1|}{|F_1P|} = \frac{|F_2Q_2|}{|F_2P|}, \qquad (۱۲)$$

که نشان می‌دهد که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ F_1PQ_1 و F_2PQ_2 متشابه‌اند[1]. در واقع، به کمک (۱۱) و قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ ۵۵، می‌توان (۱۲) را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{|-b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}\,\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} = \frac{|b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}\,\sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}},$$

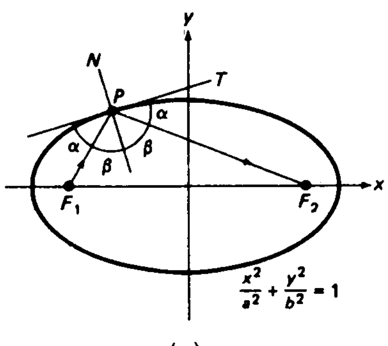
یا، معادلاً،

$$\frac{(x_0^2c^2 + a^4) + 2a^2cx_0}{(x_0^2 + c^2 + y_0^2) + 2cx_0} = \frac{(x_0^2c^2 + a^4) - 2a^2cx_0}{(x_0^2 + c^2 + y_0^2) - 2cx_0},$$

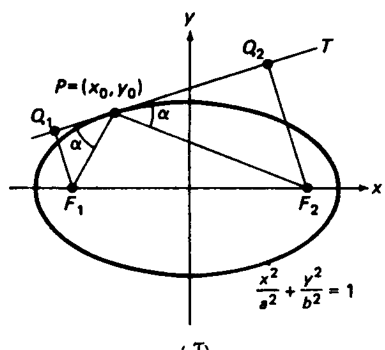
که به رابطهٔ $a^2(x_0^2 + c^2 + y_0^2) = x_0^2c^2 + a^4$ یا

$$(a^2 - c^2)x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (۱۲')$$

ساده می‌شود. چون $a^2 - c^2 = b^2$، (۱۲') با (۱۰) معادل است، و این امر برقراری (۱۲') و درنتیجه، (۱۲) را به ثبوت می‌رساند. چون مثلثهای F_1PQ_1 و F_2PQ_2 متشابه‌اند، زاویهٔ بین T و PF_1 مساوی زاویهٔ بین T و PF_2 است (ر.ک. شکل ۲۶ (آ)، که در آن این



(ب)



(آ)

شکل ۲۶

---

۱. در اینجا تلویحاً فرض می‌کنیم نقطهٔ تماس P بر محور اطول واقع نباشد؛ هرگاه چنین باشد، آنگاه پاره‌خطهای PF_1 و PF_2 نیز بر محور اطول واقع بوده، و با مماس T، که اینک قائم است (چرا؟)، زاویهٔ $90°$ می‌سازند. توجه کنید که یک بیضی هر دو محورش را در زوایای قائمه قطع می‌کند، زیرا اگر T بر محور اقصر واقع باشد افقی و درصورتی که بر محور اطول واقع باشد قائم می‌باشد.

زاویه با α نموده شده است) . به بیان معادل ، اگر N خط قائم به بیضی در نقطهٔ P باشد ، زاویهٔ بین N و PF_1 مساوی زاویهٔ بین N و PF_2 است (ر.ک. شکل ۲۶ (ب) ، که در آن این زاویه با β نموده شده است) .

از این نکات و قانون انعکاس ثابت شده در مثال ۶ ، صفحهٔ ۳۳۱ ، معلوم میشود که هرگاه S آینه‌ای به شکل سطح حاصل از دوران یک بیضی حول محور اطولش باشد ، آنگاه اشعهٔ خارج شده از یک منبع نقطه‌ای نور یا صوت واقع در یکی از کانونهای S پس از انعکاس از S همه در کانون دیگر جمع می‌شوند (مثلاً ، اشعه‌ای که در شکل ۲۶ (ب) F_1 را ترک می‌کنند به F_2 وارد می‌شوند) . اطاقهایی ساخته شده‌اند که شکل نیمهٔ بالایی این‌گونه سطوح را دارند . در یک چنین اطاق ، که " تالار نجوا " نام دارد ، صحبت آهسته در یک کانون را می‌توان در کانون دیگر ، ولی نه در نقاط دیگر ، بوضوح شنید .

بیضیها نقشی کلیدی در مسائل حرکت مداری دارند . مثلاً ، زمین در مداری بیضوی با خروج از مرکز کوچک که خورشید در یکی از کانونهای آن است حول خورشید می‌گردد . ما حرکت مداری را در بخش ۵.۱۲ به تفصیل بررسی خواهیم کرد .

مسائل

معادلهٔ بیضی را درصورتی به شکل متعارف بنویسید که

۱. رئوس $(\pm 4, 0)$ و کانونها $(\pm 3, 0)$ باشند

۲. رئوس $(0, \pm 10)$ و کانونها $(0, \pm 5)$ باشند

۳. نقاط انتهایی محورها $(2, 4), (10, 4), (6, 1), (6, 7)$ باشند

۴. مرکز $(-1, 1)$ ، یکی از کانونها $(-1, 3)$ ، و نیم محور اطول 5 باشد .

۵. مرکز $(-2, 2)$ ، یکی از کانونها $(2, 1)$ ، و نیم محور اقصر 6 باشد .

۶. مرکز $(-3, 2)$ ، یک رأس $(0, 2)$ ، و یک کانون $(-5, 2)$ باشد .

۷. مبداء مرکز بوده و دو نقطهٔ $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، $(1, -1)$ بر بیضی واقع باشند .

۸. کانونها $(1, \pm 3)$ و خروج از مرکز $\frac{3}{4}$ باشد .

۹. تمام نقاطی از بیضی

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

را بیابید که قدرمطلق طولهایشان 3 باشد .

۱۰. نشان دهید که بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ مشمول ناحیهٔ مستطیلی $-a \le x \le a$ ، $-b \le y \le b$ است .

بیضی به معادلهٔ داده‌شده را رسم کرده ، و مرکز ، کانونها ، و نقاط انتهایی محورهای اطول و اقصر آن را مشخص نمایید .

۱۱ . $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

۱۲ . $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$

۱۳ . $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

۱۴ . $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{64}=1$

۱۵ . $3x^2+y^2=2$

۱۶ . $9x^2+25y^2=25$

۱۷ . $16x^2+25y^2-64x-100y-236=0$

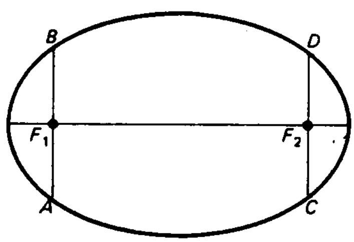
۱۸ . $4x^2+y^2+8x-6y-3=0$

۱۹ . $2x^2+2xy+2y^2-1=0$

۲۰ . $9x^2+4y^2+36x=0$

۲۱ . معادلهٔ بیضی را بیابید که نیم محور اطول آن 1 و کانونهایش $F_1=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ F_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ باشند .

۲۲ . پاره‌خطی که دونقطهٔ انتهایی اش روی یک‌بیضی باشد یک وتر بیضی نامیده می‌شود و وتر مار بر کانون F_1 یا F_2 و عمود بر محور اطول راست وتر کانونی نام دارد (در شکل ۲۷ ، این وتر AB یا CD است) . نشان دهید که راست وتر کانونی به‌طول $2b^2/a$ است ، که در آن a نیم محور اطول و b نیم محور اقصر بیضی می‌باشد .



شکل ۲۷

۲۳ . نقاطی از بیضی $x^2+5y^2=20$ را بیابید که خط‌واصل بین آنها و کانونها بر هم عمود باشند .

۲۴ . به ازای چه مقادیری از ثابت c ، نمودار معادلهٔ $x^2+2y^2-6x+4y=c$ یک‌بیضی است؟ یک نقطه است؟ تهی است؟

۲۵ . نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x=x_0+a\cos t,\quad y=y_0+b\sin t \qquad (0\le t\le 2\pi) \qquad \text{(یک)}$$

بیضی است (فرض کنید $a > 0, b > 0$) .

نقاط اشتراک خط و بیضی داده شده را (در صورت وجود) بیابید .

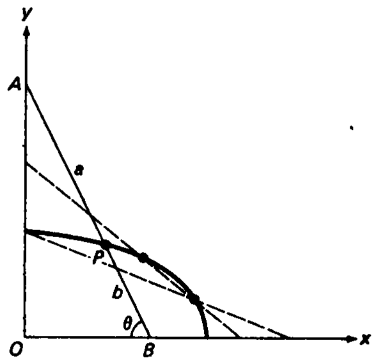
۲۶ . $x + 2y - 7 = 0, x^2 + 4y^2 = 25$

۲۷ . $3x + 10y - 25 = 0, 4x^2 + 25y^2 = 100$

۲۸ . $3x - 4y - 24 = 0, 9x^2 + 16y^2 = 144$

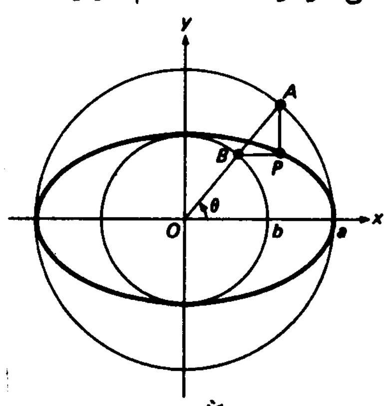
۲۹ . $x + y - 2 = 0, 2x^2 + y^2 = 3$

۳۰ . نشان دهید که وقتی یک‌نردبان از روی دیوار به پایین سر می‌خورد ،هر نقطهٔ ثابت P از آن غیراز نقاط انتهایی‌اش یکچهارم یک‌بیضی را طی می‌کند . (ر.ک. شکل۲۸ ، که در آن AB نردبان ، a فاصلهٔ بین A و P ، و b فاصلهٔ بین P و B می‌باشد .)



شکل ۲۸

۳۱ . فرض کنید A نقطهٔ متغیری‌از دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به‌شعاع a بوده ، و B نقطهٔ برخورد شعاع OA از این دایره با دایرهٔ متحدالمرکز $x^2 + y^2 = b^2$ به شعاع b باشد ، و P نقطهٔ برخورد خط افقی مار بر B با خط قائم ماربر A طبق شکل ۲۹ باشد ، که در



شکل ۲۹

eccentricity = خروج از مرکز Asymptote: مجانب ، vertices = رئوس

Foci = کانونها ، خط مجانب ، center = مرکز

Focus = کانون

θ زاویهٔ بین OA و محور x است. نشان دهید که وقتی A دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ را بپیماید، نقطهٔ P بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را می‌پیماید.

خروج از مرکز بیضی با نیم‌محورهای داده شده را بیابید.

۳۲. $13, 5$ ۳۳. $17, 15$

۳۴. $25, 7$ ۳۵. $53, 28$

۳۶. مساحت محصور به بیضی

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

را بیابید.

۳۷. مستطیلی بیابید با بیشترین مساحت که در بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ محاط شده و دو ضلعش موازی محور اطول باشند.

در بین مماسهای بر بیضی $\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = 1$ آنهایی را بیابید که

۳۸. بر خط $2x - 2y - 3 = 0$ عمود باشند.

۳۹. از نقطهٔ $(\frac{10}{3}, \frac{5}{3})$ خارج بیضی بگذرند.

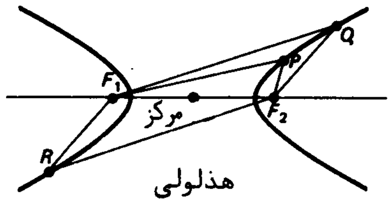
۴۰. نشان دهید که حاصل ضرب فواصل بین کانونهای F_1, F_2 از بیضی و هر مماس بر بیضی مساوی مجذور نیم محور اقصر است.

۴۱. نزدیکترین نقطه به خورشید در مدار حول آن را حضیض خورشیدی، و دورترین نقطه به خورشید را اوج خورشیدی می‌نامند. زمین در یک مدار بیضوی که خورشید در یکی از کانونهای آن است حرکت می‌کند به طوری که فاصلهٔ بین آن تا خورشید در حضیض 147.1 میلیون کیلومتر و در اوج 152.1 میلیون کیلومتر است. خروج از مرکز تقریبی مدار زمین چقدر است؟

۴.۱۰ هذلولیها

تعریف هذلولی. بنابر تعریف، یک هذلولی مجموعهٔ *تمام نقاطی در صفحه است که تفاضل فواصلشان تا نقاط ثابت F_1 و F_2 ثابت باشد.* (فرض است که همواره فاصلهٔ کوچکتر از فاصلهٔ بزرگتر کم می‌شود؛ درنتیجه، ثابت مربوطه مثبت است.) لذا، مثلاً، درشکل ۳۰ تفاضل بین فواصل P تا نقاط F_1 و F_2، به نام *کانونهای هذلولی*، همان تفاضل نظیر در مورد نقطهٔ O یا نقطهٔ R می‌باشد. توجه کنید که هذلولی از دو قسمت مجزا، به‌نام *شاخه* تشکیل شده است. بر یکی از شاخه‌ها (شاخهٔ راست در شکل) هر نقطه از هذلولی به F_2 نزدیکتر است تا F_1، حال آنکه بر شاخهٔ دیگر (شاخهٔ چپ در شکل) هر نقطه به F_1

نزدیکتر است تا F_2 . نقطهٔ میانی پاره‌خط F_1F_2 واصل بین کانونها مرکز هذلولی نام دارد . هذلولی مانند سهمی (ولی به خلاف بیضی) ، یک منحنی *بی‌کران* است ؛ یعنی ، نقاطی بر منحنی وجوددارند که بدلخواه دور می‌باشند .



شکل ۳۰

برای یافتن معادلهٔ هذلولی ، در صفحهٔ آن مختصات قائم x و y معرفی کرده وآن را در " موضع متعارف " که مرکزش در مبداء O و کانونهایش در امتداد محور x واقع باشند قرار می‌دهیم . در این صورت ، کانونها نقاط $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ ، به‌فاصلهٔ $2c$ جدا از هم$(c > 0)$ ،خواهندبود . فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از هذلولی بوده ، و $2a$ مقدار ثابت تفاضل بین فواصل P تا کانونها باشد . بنابر خاصیت معرف هذلولی ،

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a$$

اگر P به F_2 تا F_1 نزدیکتر باشد ، یا

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

اگر P به F_1 تا F_2 نزدیکتر باشد . پس نتیجه می‌شود که

$$|PF_1| = \pm 2a + |PF_2|,$$

که برحسب مختصات P ، F_1 ، و F_2 شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله ، به دست می‌آوریم

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

که به

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

ساده می‌شود . اگر طرفین را مجددا " به توان دو برسانیم ، درخواهیم یافت که

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

و لذا ،

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{1}$$

برای ساده‌کردن بیشتر (۱)، ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF_1| < |F_1F_2| + |PF_2| = 2c + |PF_2|,$$
$$|PF_2| < |F_1F_2| + |PF_1| = 2c + |PF_1|,$$

زیرا طول یک ضلع مثلث F_1PF_2 از مجموع طولهای دو ضلع دیگر کوچکتر است. بنابراین،

$$2c > |PF_1| - |PF_2|, \qquad 2c > |PF_2| - |PF_1|,$$

که نامساوی

$$c > a$$

را ایجاب می‌کند، زیرا یکی‌از تفاضلهای سمت راست مساوی $2a$ است. با معرفی‌ثابت مثبت b که

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{۲}$$

می‌توان (۱) را به شکل زیر نوشت:

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

که خود، پس‌از تقسیم طرفین بر a^2b^2، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۳}$$

به‌عکس، هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ چنان باشد که (۳) برقرار شود، آنگاه، با عکس‌کردن مراحل‌این‌محاسبات‌بدقت، معلوم می‌شودکه $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ (ذکرجزئیات‌را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم). بنابراین، (۳) معادلهٔ هذلولی در موضع متعارف است.

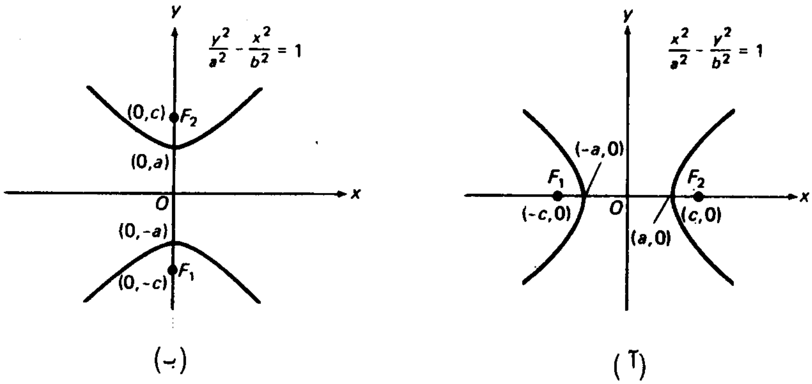
محورهای‌متقاطع‌ومزدوج. چون‌معادلهٔ (۳) دراثرتعویض x با $-x$ یا y با $-y$ تغییرنمی‌کند، هر دو محور مختصات محور تقارن هذلولی (۳) هستند. به‌طورکلی، هر هذلولی دو محور تقارن دارد، خط مار بر کانونهای F_1 و F_2 و عمودمنصف پاره‌خط F_1F_2. هذلولی خط مار بر کانونهایش را در دو نقطه به نام رأس، قطع کرده، و پاره خط‌واصل‌بین رئوس محور متقاطع نام دارد. برای هذلولی (۳) رئوس عبارتنداز نقاط $(\pm a, 0)$ و محور متقاطع افقی است [ر.ک. شکل ۳۱ (آ)]. کانونهای هذلولی در نقاط $(\pm c, 0)$ قرار دارند، که‌در آن

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

و این را می‌توان با حل (۲) نسبت به c به دست آورد. از تعویض x و y در معادلهٔ (۳) هذلولی دیگر

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{۴}$$

به دست می‌آید، که آن را نیز دروضع متعارف‌می‌نامیم. این هذلولی دارای رئوس $(0, \pm a)$ و کانونهای $(0, \pm c)$ بر محور y اند، و محور متقاطع آن قائم است [ر.ک. شکل ۳۱ (ب)].



(ب) (آ)

شکل ۳۱

مثال ۱. نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ را بیابید.

حل. نمودار به شکل (۳) با $a = 4$، $b = 3$، و

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

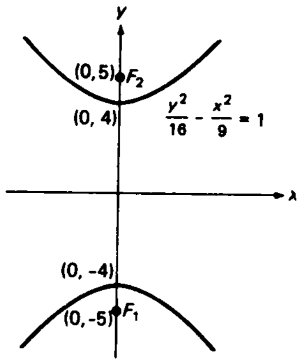
است. بنابراین، نمودار آن یک هذلولی به مرکز مبداء، رأسهای $(\pm 4, 0)$، و کانونهای $(\pm 5, 0)$ بر محور x بوده، و محور متقاطع افقی می‌باشد [ر.ک. شکل ۳۲ (آ)].

مثال ۲. نمودار معادلهٔ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ را پیدا نمایید.

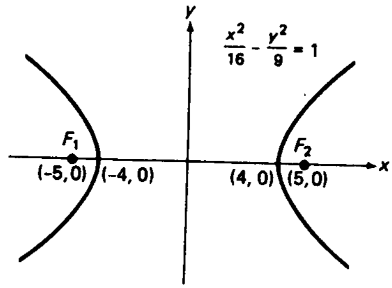
حل. معادله به شکل (۴) است که در آن a، b، و c همان مقادیر مثال ۱ را دارند. بنابراین، نمودارش هذلولی است که مرکزش مبداء، رأسهایش $(0, \pm 4)$، کانونهایش $(0, \pm 5)$ بر محور y بوده، و محور متقاطعش قائم می‌باشد [ر.ک. شکل ۳۲ (ب)].

منظور از محور مزدوج یک هذلولی یعنی پاره‌خطی به طول $2b$ که بر محور متقاطع عمود بوده و همان نقطهٔ میانی، یعنی مرکز هذلولی، را داشته باشد. لذا، در مثال ۱، محور مزدوج پاره‌خط قائم بین نقاط $(0, -3)$ و $(0, 3)$ است، حال آنکه در مثال ۲ پاره خط افقی بین نقاط $(-3, 0)$ و $(3, 0)$ می‌باشد. این محورها شبیه محورهای اطول و اقصر بیضی‌اند. اما محور اطول یک بیضی همیشه از محور اقصر آن بزرگتر است $(a > b)$، ولی

اندازه‌های نسبی محورهای متقاطع و مزدوج یک هذلولی تحت قیدی نیستنـــد؛ یعنی می‌توانیم داشته‌باشیم $a < b$ ، $a = b$ ، یا $a > b$. این به‌خاطرآن‌است که شرط $a^2 = b^2 + c^2$



(ب)



(آ)

شکل ۳۲

برای بیضی با شرط $c^2 = a^2 + b^2$ برای هذلولی تعویض می‌شود؛ درنتیجه، با تعییـــن a (در خاصیت معرف هذلولی) باز هم b را برای گرفتن هر مقدار آزاد می‌گذارد.

مجانبهای یک هذلولی. حال نشان می‌دهیم یک هذلولی دو مجانب دارد. برای‌این کار، معادلهٔ $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ را نسبت به y حل کرده، توابع زیر را به‌دست‌می‌آوریم:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{۵}$$

و

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{۵′}$$

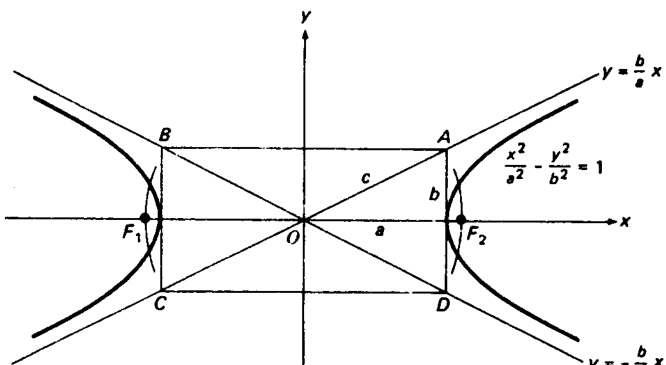
هر یک از این توابع فقط به‌ازای $x \le -a$ یا $x \ge a$ تعریف‌می‌شود؛ و در واقع، (۵)نمایش بخشی از هذلولی است که در نیمصفحهٔ بالایی $y \ge 0$ قرار دارد، ولی (۵′) نمایش‌بخش واقع از آن در نیمصفحهٔ پایینی $y \le 0$ می‌باشد. خط $y = (b/a)x$ یک مجانب مایل هذلولی (۳) است. برای مشاهدهٔ این امر، فرض‌کنیم $P = (x, y)$ یک نقطهٔ متغیر از بخشی از هذلولی است که در ربع اول قرار دارد. پس x و y هر دو مثبت بوده و فاصلهٔ $d(x)$ بین P و نقطه‌ای از خط $y = (b/a)x$ با همان مختص x مساوی است با

$$d(x) = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

اما

$$\lim_{x\to\infty} d(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0,$$

و درنتیجه، نمودار (۵)، وقتی $x \to \infty$ ، به خط $y = (b/a)x$ نزدیک می‌شود؛ یعنی، خط مجانب بخشی از هذلولی است که در ربع اول قرار دارد. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که $y = (b/a)x$ مجانب بخشی از هذلولی است که در ربع سوم واقع است. پس، چون انعکاس نسبت به محور x هذلولی (۳) را به خودش و خط $y = (b/a)x$ را به خط $y = -(b/a)x$ می‌برد، خط $y = -(b/a)x$ مجانب بخشهایی از هذلولی است که در ربعهای دوم و چهارم قرار دارند. همهٔ این نکات از شکل ۳۳ واضح است.



ساختن مجانبها و کانونهای یک هذلولی

شکل ۳۳

خلاصه کنیم، هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ خطوط

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

را به عنوان مجانب دارد. به عنوان تمرین، نشان دهید که مجانبهای هذلولی $(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1$ ، با محور متقاطع قائم، عبارتند از خطوط $y = \pm(a/b)x$.

برای ساختن مجانبهای هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ راه ساده‌ای وجود دارد.

یک مستطیل مرکزی، یعنی مستطیل $ABCD$ نموده شده در شکل ۳۳، با دو ضلع واقع برخطوط $x = \pm a$ ودوضلع واقع برخطوط $y = \pm b$ رسم می‌کنیم. دراین صورت، مجانبها خطوط حاصل ازادامهٔ اقطار مستطیل می‌باشند. توجه کنید که نیم قطر OAی مستطیل به طول $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ است، زیرا $c = \sqrt{a^2+b^2}$؛ درنتیجه، دونقطهٔ برخورد دایره به‌شعاع $|OA|$ با محور x عبارتنداز کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$، و این در شکل با دو قوس از این دایره نموده‌شده است. همچنین، توجه کنید که مجانبها عبارتنداز نمودار معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

که فرقش با معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هذلولی در این است که در طرف راست به جای 1، 0 داریم.

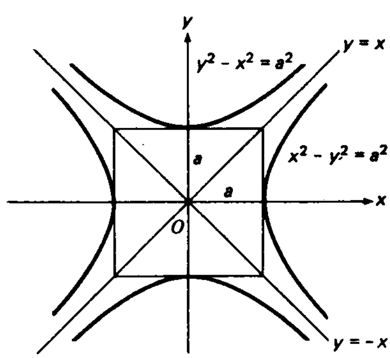
مثال ۳. هرگاه محورهای متقاطع و مزدوج متساوی‌الطول باشند، آنگاه در معادلهٔ (۳) یا (۴) $a = b$، و یک *هذلولی متساوی‌الاضلاع*

$$x^2 - y^2 = a^2$$

یا

$$y^2 - x^2 = a^2$$

با مجانبهای $y = \pm x$ به دست می‌آوریم (ر.ک. شکل ۳۴). در این حالت، مجانبها برهم عمود بوده، و مستطیل مرکزی مربع می‌باشد. ما قبلاً" به یک هذلولی متساوی ــ



هذلولیهای متساوی‌الاضلاع

شکل ۳۴

الاضلاع، یعنی هذلولی یکهٔ

$$x^2 - y^2 = 1,$$

که در صفحهٔ ۵۶۶ در رابطه با توابع هذلولوی مطــرح شد ، برخورده‌ایم .

معادلات به شکل متعارف . معادلات (۳) و (۴) نمایش هذلولیهایی‌هستند که مرکزشان مبداء بوده و محورهای مختصات آنها محورهای تقارن هستند . معادلات کلیتر

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (۶)$$

و

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (۷)$$

هذلولیهایی را نمایش‌می‌دهند که همان‌اندازه و شکل هذلولیهای(۳) و (۴)را دارند ، ولی به مرکز (x_0, y_0) بوده‌و محورهایشان درامتداد خطوطی موازی محورهای‌مختصات‌می‌باشند . به طور مشروح ، (۶) معادلهٔ یک هذلولی به مرکز (x_0, y_0) است که محور متقاطعش‌درامتداد خط افقی $y = y_0$ و محور مزدوجش در امتداد خط قائم $x = x_0$ است ، ولی (۷) معادلهٔ هذلولی به مرکز (x_0, y_0) است که محور متقاطعش در امتداد خط قائم $x = x_0$ و محــور مزدوجش در امتداد خط افقی $y = y_0$ می‌باشد . در هر دو حال ، محور متقاطع آن به‌طول $2a$ و محور مزدوجش به طول $2b$ می‌باشد . این معادلات ***معادلات یک هذلــولی به شکــل متعارف*** می‌باشند. طبیعی است که (۶)و (۷) در حالت خالص $x_0 = y_0 = 0$ به (۳)و (۴) تحویل می‌شوند .

مثال ۴ . نمودار معادلهٔ

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 14 = 0 \qquad (۸)$$

را بیابید .

حل . با کامل کردن مربعها ، معلوم می‌شود که (۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

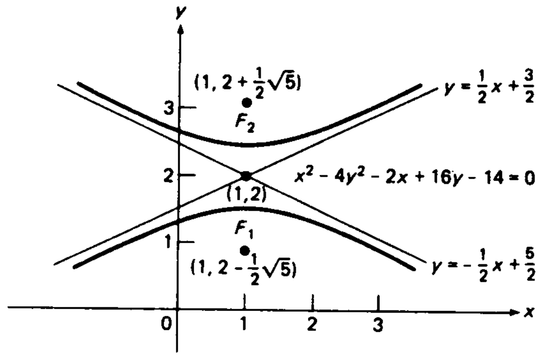
$$(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 + 1 = 0,$$

یا ، معادلا" ،

$$\frac{(y - 2)^2}{(\frac{1}{2})^2} - (x - 1)^2 = 1,$$

که به شکل متعارف (۷) به ازای $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ a = \frac{1}{2},\ b = 1$ اســت . نمــودار ایــن

معادله یک هذلولی به مرکز $(1, 2)$ با محور متقاطع قائم است (ر.ک. شکل ۳۵). نقاط انتهایی محور متقاطع عبارتنداز $(1, 2 - \frac{1}{2})$ و $(1, 2 + \frac{1}{2})$، یعنی $(1, \frac{3}{2})$ و $(1, \frac{5}{2})$. همچنین چون فاصلهٔ هر کانون تا مرکز مساوی $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ است، کانونها عبارتنداز $F_1 = (1, 2 - \frac{1}{2}\sqrt{5})$ و $F_2 = (1, 2 + \frac{1}{2}\sqrt{5})$. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که مجانبها خطوط $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ و $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ به شیب $\pm\frac{1}{2}$ اند که، طبق شکل، در نقطهٔ $(1, 2)$ هم را قطع می‌کنند.



شکل ۳۵

هر یک از معادلات (۶) و (۷) از خاصیت زیر برخوردار است: نسبت به هر دو متغیر x و y از درجهٔ دو است، هیچ جمله‌اش شامل حاصلضرب xy نیست، و به علاوه ضرایب x^2 و y^2 (به خلاف بیضی صفحات ۹۴۷ تا ۹۴۸، که هم‌علامت بودند) مختلف‌العلامه می‌باشند. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان، پس از تقسیم بر ضریب x^2، به شکل زیر نوشت:

$$x^2 - ky^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (k > 0) \tag{۹}$$

اما، مثل مثال ۴، می‌توان (۹) را با کامل کردن مربعها به یکی از اشکال متعارف (۶) و (۷) درآورد؛ و درنتیجه، جدا از حالت استثنایی، نمودار (۹) هذلولیی است که محورهایش با محورهای مختصات موازی می‌باشند. در واقع، پس از کامل کردن مربعها، می‌توان (۹) را به صورت زیر نوشت:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - k\left(y - \frac{B}{2k}\right)^2 = D, \tag{۹'}$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4k} - C.$$

اگر $D = 0$ ، نمودار (۹′) ، و درنتیجه (۹) ، یک جفت خط زیر است:

$$y - \frac{B}{2k} = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}\left(x + \frac{A}{2}\right),$$

که در نقطهٔ $(-A/2, B/2k)$ متقاطعند ، و این همان حالت استثنایی فوق می‌باشد. اما اگر $D \neq 0$ ، (۹′) را می‌توان ، بسته به علامت D ، به یکی از اشکال زیر نوشت:

$$\frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{D})^2} - \frac{[y - (B/2k)]^2}{(\sqrt{D/k})^2} = 1 \qquad (D > 0)$$

یا

$$\frac{[y - (B/2k)]^2}{(\sqrt{|D|/k})^2} - \frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{|D|})^2} = 1 \qquad (D < 0),$$

که معادلهٔ یک هذلولی به مرکز $(-A/2, B/2k)$ می‌باشد. اگر $D > 0$ ، هذلولی دارای محور متقاطع افقی به طول $2\sqrt{D}$ و محور مزدوج قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ است ، ولی اگر $D < 0$ ، هذلولی دارای محور متقاطع قائم به طول $2\sqrt{|D|}$ و محور مزدوج افقی به طول $2\sqrt{|D|/k}$ می‌باشد. لذا ، به طور خلاصه ، یک هذلولی دارای معادلهٔ (۹) است اگر و فقط اگر محورهایش موازی محورهای مختصات باشند.

البته ، هذلولیهایی وجود دارند که معادلاتشان جملاتی شامل xy دارند. مثلاً ، نمودار معادلهٔ $2xy = 1$ هذلولیی است که از دوران هذلولی متساوی‌الاضلاع $x^2 - y^2 = 1$ به اندازهٔ $45°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به دست می‌آید (ر.ک. مثال ۴ ، صفحهٔ ۹۲۵).

خروج از مرکز هذلولی. درست مثل حالت بیضی ، شکل یک هذلولی را می‌توان با عدد

$$e = \frac{c}{a},$$

به نام خروج از مرکز ، به راحتی توصیف کرد ، ولی e در اینجا می‌تواند مقادیر بزرگتر از 1 اختیار کند ، زیرا $c > a$.

مثال ۵. خروج از مرکز هذلولی شکل ۳۲ چقدر است؟

حل. در اینجا $a = 4$ و $c = 5$ ؛ درنتیجه ، خروج از مرکز مساوی است با

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1.25.$$

هذلولی، مانند بیضی، نقش مهمی در بررسی حرکت مداری ایفا می‌کند. حدس می‌زنند که تعدادی از ستاره‌های دنباله‌دار مدارهای هذلولوی دارند، بدین معنی‌که یکبار ظاهر شده و سپس منظومهٔ شمسی را برای همیشه ترک می‌کنند[1]. در سال ۱۹۱۱، ارنست روترفورد، توانست وجود هستهٔ اتم را با تحلیل رفتار ذرات آلفا که به مدارهای هذلولوی منحرف می‌شوند با ورقه‌های نازک فلزی ثابت کند. ما قبلاً در صفحهٔ ۵۶۶ نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را در تعریف توابع هذلولوی توضیح داریم. در مسائل ۴۳ و ۴۴، استفاده از هذلولیها برای یافتن برد مورد بحث قرار گرفته است.

مسائل

معادلهٔ هذلولی را به شکل متعارف بنویسید به طوری که

۱. رئوس $(\pm 3, 0)$ و کانونها $(\pm 4, 0)$ باشند.

۲. رئوس $(0, \pm 2)$ و کانونها $(0, \pm 5)$ باشند.

۳. نقاط انتهایی محور متقاطع $(-7, 2), (5, 2)$ ونقاط انتهایی محورمزدوج $(-1, -3), (-1, 7)$ باشند.

۴. مرکز $(3, 1)$، یکی از کانونها $(9, 1)$، و محور متقاطع به طول 8 باشد.

۵. مرکز $(-2, 0)$، یکی از کانونها $(-2, 4)$، و محور مزدوج به طول 4 باشد.

۶. مرکز $(2, -1)$، یکی از کانونها $(-4, -1)$، و یکی از رئوس $(7, -1)$ باشد.

۷. مبداء مرکز بوده و دو نقطهٔ $(8, \sqrt{8})$، $(6, -1)$ بر هذلولی واقع باشند.

۸. کانونها $(\pm 10, 0)$ و مجانبها خطوط $y = \pm \frac{4}{3}x$ باشند.

۹. رئوس $(0, \pm 24)$ و مجانبها خطوط $y = \pm \frac{12}{5}x$ باشند.

۱۰. کانونها $(\pm 7, 0)$ و خروج از مرکز $\frac{7}{3}$ باشد.

۱۱. مبداء مرکز و خروج از مرکز $\sqrt{2}$ بوده، و نقطهٔ $(-5, 3)$ بر هذلولی واقع باشد.

۱۲. مبداء مرکز و مجانبها $y = \pm \frac{2}{3}x$ بوده، و نقطهٔ $(\frac{3}{2}, -1)$ بر هذلولی واقع باشد.

هذلولی به معادلهٔ داده شده را رسم کرده، و مرکز، کانونها، نقاط انتهایی محور متقاطع، و مجانبها را مشخص نمایید.

---

۱. *این با رفتار ستاره‌های دنباله‌دار در مدارهای بیضوی‌که متناوباً به حضیض بازمی‌گردند تفاوت دارد (ظهور ستارهٔ دنباله‌دار هالی 27 بار ثبت شده است). تعیین اینکه‌مدار یک ستاره هذلولی یا یک بیضی بسیار کشیده است اغلب مشکل است. مدارهای سهموی دست کم در تئوری، حالت دیگری است.*

۱۳. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

۱۴. $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{25}=1$

۱۵. $\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x+2)^2}{4}=1$

۱۶. $\frac{x^2}{64}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$

۱۷. $3x^2 - y^2 = 4$

۱۸. $2y^2 - 5x^2 = 10$

۱۹. $2x^2 - y^2 + 4x - 2y + 17 = 0$

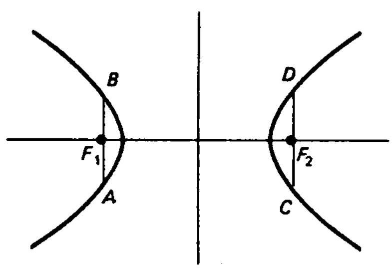
۲۰. $9x^2 - 16y^2 - 90x + 32y + 65 = 0$

۲۱. $81x^2 - 25y^2 - 324x - 50y - 1726 = 0$

۲۲. $9x^2 - 4y^2 + 16y = 0$

۲۳. کانونهای هذلولی $2xy = 1$ را یافته (ر.ک. شکل ۶، صفحهٔ ۹۲۶)، و معادله‌اش را از خاصیت معرف هذلولی نتیجه بگیرید.

۲۴. هر پاره خط که نقاط انتهایی‌اش بر یک‌هذلولی واقع باشند یک وتر هذلولی نام دارد، و وتر مار بر F_1 یا F_2 و عمود بر محور متقاطع *راست وتر کانونی* نامیده می‌شود (در شکل ۳۶، این وتر AB یا CD است).



شکل ۳۶

نشان دهید که طول راست وتر کانونی $2b^2/a$ است، که در آن $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج است.

۲۵. نقاطی از هذلولی $3y^2 - x^2 = 12$ را بیابید که خطوط واصل بین آنها و کانونها برهم عمود باشند.

۲۶. به ازای چه مقادیری از ثابت c، نمودار معادلهٔ $x^2 - y^2 + 6x - 2y = c$ یک‌هذلولی با محور متقاطع افقی است؟ یک هذلولی با محور متقاطع قائم است؟ یک‌جفت خط متقاطع است؟

۲۷. نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x = x_0 + a\cosh t, \quad y = y_0 + b\sinh t \quad (-\infty < t < \infty) \qquad \text{(یک)}$$

شاخهٔ راست یک هذلولی با محور متقاطع افقی است اگر $a > 0$ و شاخـهٔ چپ آن است اگر $a < 0$. معادلات پارامتری شاخه‌های یک هذلولی با محور متقاطع قائم را بنویسید .

نقاط اشتراک خط و هذلولی داده شده را (در صورت وجود) بیابید .

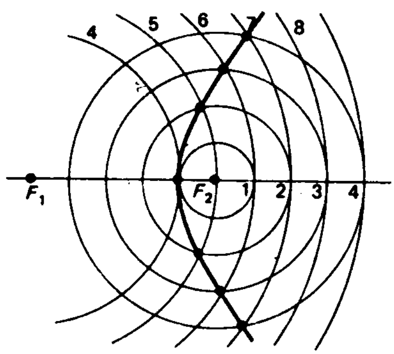
۲۸ . $2x - y - 10 = 0, x^2 - 4y^2 = 20$

۲۹ . $4x - 3y - 16 = 0, 16x^2 - 25y^2 = 400$

۳۰ . $2x + y + 1 = 0, 4x^2 - 9y^2 = 36$

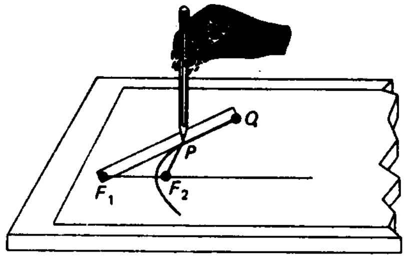
۳۱ . $3x - y - 2 = 0, 2x^2 - y^2 = 1$

۳۲ . شکل ۳۷ خانواده‌ای از قوسهای مستدیر متحدالمرکز به مرکز F_1 و یک خانواده‌ازدوایر متحدالمرکز به مرکز F_2 را نشان می‌دهد . قوسها و دوایر با شعاعهایشان برچسب خورده‌اند . توضیح دهید چرا نقاط توپر شکل بر یک هذلولی به کانونهای F_1 و F_2 قرار دارند .



شکل ۳۷

۳۳ . هذلولی به کانونهای F_1 و F_2 را می‌توان به صورت زیر رسم کرد :
یک طرف خط‌کشی را به یک تخته رسم در F_1 طوری می‌چسبانیم که بتواند حول F_1 دوران کند . در انتهای دیگر Q خط‌کش یک نخ به طول s که از طول r خـط‌کش کوچکتر است می‌بندیم ، و سر دیگر نخ را در F_2 محکم می‌کنیم . درحالی که نخ را با یک مداد کشیده نگهداشته‌ایم ، خط‌کش را مثل شکل ۳۸ حول F_1 می‌چرخانیم . در این صورت ، نقطهٔ P مداد بخشی از یک هذلولی را خواهد پیمود . توضیح دهید چرا این رسم موجه است .



رسم یک هذلولی

شکل ۳۸

۳۴. گوییم هذلولیهای

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

باهم مزدوج اند. نشان دهید که هذلولیهای مزدوج مجانبهای یکسان دارند.

۳۵. خروج از مرکز هذلولیی را بیابید که محور متقاطع آن در هر یک از کانونهای هذلولی مزدوجش زاویهٔ $60°$ را دربردارد.

۳۶. نشان دهید که فاصلهٔ هر یک از کانونهای هذلولی $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ تا هریک از مجانبها مساوی b است.

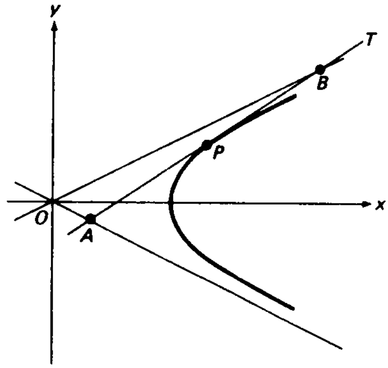
۳۷. هذلولی با خروج از مرکز 2 بیابید که کانونهایش باکانونهای بیضی $9x^2+25y^2=225$ یکی باشند.

۳۸. فرض کنید T خط مماس در نقطهٔ $P=(x_0, y_0)$ از هذلولی $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ باشد. نشان دهید که T خطی است به معادلهٔ

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad \text{(دو)}$$

۳۹. دو خط مار بر نقطهٔ $(-1, 7)$ و مماس بر هذلولی $x^2-y^2=16$ را بیابید.

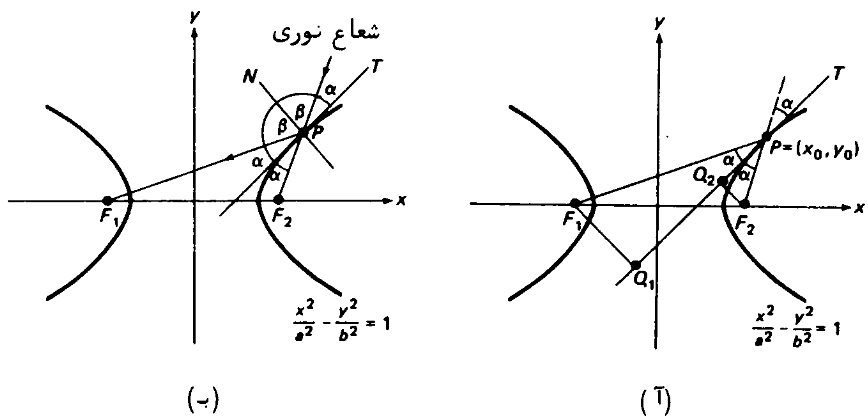
۴۰. فرض کنید T مماس بر یک هذلولی در نقطهٔ P بوده، و A و B نقاط برخورد T با مجانبهای هذلولی باشند (ر.ک. شکل ۳۹، که در آن مجانبها در O متقاطع اند). نشان دهید که نقطهٔ تماس P نقطهٔ میانی پاره‌خط AB است، و نیز مثلث OAB به ازای هر موضع از P مساحت ab را دارد.



شکل ۳۹

۴۱. فرض کنید T خط مماس در نقطهٔ $P = (x_0, y_0)$ از هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ باشد. نشان دهید T زاویهٔ بین پاره‌خطهای PF_1 و PF_2 که P را، مثل شکل ۴۰ (آ)، به کانونهای F_1 و F_2 وصل می‌کنند نصف می‌کند.

۴۲. نشان دهید که یک شعاع نوری که به سمت کانون یک آینهٔ هذلولوی می‌رود پس از انعکاس از کانون دیگر عبور خواهد کرد؛ شکل ۴۰ (ب).



شکل ۴۰

۴۳. سه نگهبان در امتداد یک جادهٔ مستقیم که به یک دپو ختم می‌شود به‌فاصلهٔ **1 km** از هم کشیک می‌دهند. در لحظه‌ای که آنها مکالمهٔ تلفنی سه راه دارند انفجاری رخ می‌دهد، و نزدیکترین نگهبان به دپو صدای آن را **1 sec** قبل از نگهبان وسطی و **3 sec** قبل از دورترین نگهبان می‌شنود. با این فرض که سرعت صوت $\frac{1}{3}$ **km/sec** است، دو

محل ممکن انفجار را پیدا نمایید.

۴۴. دو ایستگاه رادیویی که در نقاط A و B در امتداد یک خط مستقیم ساحلی از شمال به جنوب قرار دارند علایمی را همزمان می‌فرستند. ایستگاه A در 540 km شمال ایستگاه B قرار دارد. فرض کنید علامتی که از A فرستاده می‌شود توسط یک کشتی در 600 میکروثانیه (یعنی، 600×10^{-6} sec) قبل از علامت B دریافت شود. اگر کشتی به غرب برود، چه فاصله‌ای تا ساحل دارد؟ اگر به غرب نقطهٔ ساحلی که 90 km جنوب A است برود چقدر؟ (سرعت علایم رادیویی مساوی سرعت نور و حدود 300,000 km/sec یا معادل 300 متر بر میکروثانیه است.)

۵.۱۰ مقاطع مخروطی

سهمی، بیضی، و هذلولی، به دلیلی که عنقریب توضیح می‌دهیم، **مقاطع مخروطی** نام دارند. به یاد آورید که سهمی برحسب "خاصیت کانون- هادی" خود تعریف شد؛ یعنی، به صورت مجموعهٔ تمام نقاطی که فاصله‌شان تا نقطهٔ ثابتی به نام کانون و خط ثابتی به نام هادی ثابت است. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، بیضی و هذلولی نیز خاصیت کانون - هادی دارند که مستلزم خروج از مرکز e است. این امر به ما توان یک کاسه کردن سه مقطع مخروطی را می‌دهد، که در آن خروج از مرکز سهمی 1 گرفته خواهد شد.

بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (۱)$$

به کانونهای $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$ و خروج از مرکز

$$e = \frac{c}{a} \qquad (0 < e < 1),$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

فواصل نقطهٔ متغیر $P = (x, y)$ بیضی تا کانونها عبارتند از

$$|PF_1| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

و

$$|PF_2| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

بنابراین،

$$|PF_1| = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{x^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + ex)^2},$$

درنتیجه،

$$|PF_1| = |a + ex|,$$

و به همین نحو،

$$|PF_2| = |a - ex|.$$

اما $0 < e < 1$ ، $-a \leq x \leq a$ ؛ و درنتیجه،

$$|PF_1| = a + ex, \qquad |PF_2| = a - ex. \tag{۲}$$

توجه کنید که

$$|PF_1| + |PF_2| = (a + ex) + (a - ex) = 2a,$$

که همان خاصیت معرف بیضی است که در صفحهٔ ۹۴۳ داده شده است.

محاسبات مشابه برای هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{۳}$$

با کانونهای $F_1 = (-c, 0)$، $F_2 = (c, 0)$ و خروج از مرکز

$$e = \frac{c}{a} \qquad (e > 1),$$

که در آن

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

نتیجه می‌دهد که

$$|PF_1| = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{x^2\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 - b^2}$$
$$= \sqrt{x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + ex)^2}$$

بنابراین، مثل حالت بیضی،

$$|PF_1| = |a + ex|,$$

و به همین نحو،

$$|PF_2| = |a - ex|.$$

هرگاه P بر شاخهٔ راست هذلولی واقع باشد، آنگاه $x \geq a$ و (به یاد آورید که $e > 1$)،

$$|PF_1| = a + ex, \qquad |PF_2| = -a + ex \tag{۴}$$

ولی هرگاه P بر شاخهٔ چپ قرار داشته باشد، آنگاه $x \leq -a$ و

$$|PF_1| = -a - ex, \qquad |PF_2| = a - ex. \tag{۴'}$$

توجه کنید که، در حالت اول،

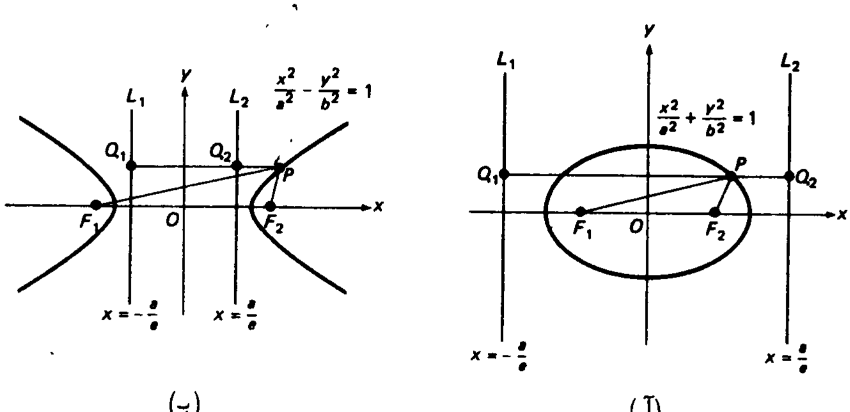
$$|PF_1| - |PF_2| = 2a$$

و، در حالت دوم،

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

و این درست مثل صفحهٔ ۹۵۷ است.

هادیهای بیضی و هذلولی. حال به تعریف *هادیهای* بیضی (۱) یا هذلولی (۳) به‌صورت خطوط قائم L_1 و L_2 به ترتیب به معادلات $x=-a/e=-a^2/c$ و $x=a/e=a^2/c$ می‌پردازیم (توجه کنید که L_1 و L_2 به فاصله $h = 2a/e = 2a^2/c$ از هم قرار دارند). شکل ۴۱ (آ) مواضع L_1 و L_2 را نسبت به‌بیضی (۱) نشان می‌دهند؛ چون برای‌بیضی $0 < e < 1$ داریم $a/e > a$؛ درنتیجه، L_2 سمت راست رأس $(a, 0)$ است ولی L_1 سمت چپ رأس $(-a, 0)$ می‌باشد. به همین نحو، شکل ۴۱ (ب) مواضع L_1 و L_2 را نسبت به هذلولی (۳) نشان می‌دهد؛ چون برای هذلولی $e > 1$، این بار داریم $a/e < a$؛ درنتیجه، L_2 سمت چپ رأس $(a, 0)$ و سمت راست مبداء است، حال آنکه L_1 سمت راست رأس $(-a, 0)$ و سمت



شکل ۴۱

چپ مبداء می‌باشد. فرض‌کنیم Q_1 و Q_2 نقاط برخورد خط افقی مار بر $P = (x, y)$ با L_1 و L_2 باشند. در این صورت، همانطور که از شکلها دیده می‌شود، برای بیضی

$$|PQ_1| = \frac{a}{e} + x, \qquad |PQ_2| = \frac{a}{e} - x \tag{۵}$$

ولی برای شاخهٔ راست هذلولی

$$|PQ_1| = \frac{a}{e} + x, \qquad |PQ_2| = -\frac{a}{e} + x \tag{۶}$$

و برای شاخهٔ چپ آن

$$|PQ_1| = -\frac{a}{e} - x, \qquad |PQ_2| = \frac{a}{e} - x \tag{۶'}$$

از مقایسهٔ (۲) با (۵)، (۴) با (۶)، و (۴') با (۶')، درهر حالت خواهیم داشت

$$|PF_1| = e|PQ_1|, \qquad |PF_2| = e|PQ_2| \tag{۷}$$

(جزئیات را شرح دهید).

از رابطهٔ (۷) معلوم می‌شود که *هرگاه P نقطهٔ متغیری از بیضی (۱) یا هذلولی (۳) باشد، آنگاه فاصلهٔ P تا هریک از کانونها حاصلضرب خروج از مرکز e و فاصلهٔ P تا هادی نظیر است*. در اینجا هادی نظیر به‌یک‌کانون همیشه نزدیکترین هادی به‌آن گرفته‌می‌شود. فاصلهٔ بین هر هادی و کانون نظیر عبارت است از

$$d = \frac{a^2}{c} - c = \left(\frac{1}{e} - e\right)a \tag{۸}$$

برای بیضی و

$$d = c - \frac{a^2}{c} = \left(e - \frac{1}{e}\right)a \tag{۸'}$$

برای هذلولی است. (هر یک از عبارات (۸) و (۸') مساوی b^2/c است، که در آن b نصف طول محور اقصر در حالت اول و نصف طول محور مزدوج در حالت دوم است.) به همین نحو، فاصلهٔ بین هر هادی و رأس نظیر برای بیضی مساوی

$$\frac{a^2}{c} - a = \left(\frac{1}{e} - 1\right)a$$

و برای هذلولی برابر

$$a - \frac{a^2}{c} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)a$$

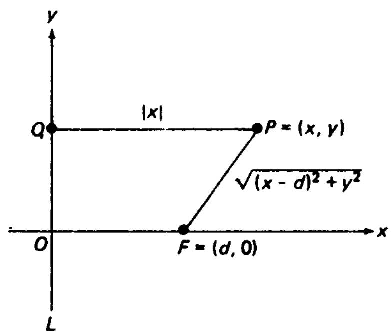
می‌باشد. همانطور که در بالا گفته‌شد، خود هادیها درفاصلهٔ $h = 2a/e = 2a^2/c$ ازیکدیگر قرار دارند. از این فرمولها می‌توان برای‌یافتن‌هادیهای‌بیضی یاهذلولیی‌که‌حتی‌معادله‌ای به شکل (۱) یا (۳) ندارند استفاده کرد.

خاصیت کانون ـ هادی. لذا، هم‌اکنون نشان داده‌ایم که هر نقطهٔ P از بیضی یاهذلولی با خروج از مرکز e در *خاصیت کانون ـ هادی*

$$|PF| = e|PQ| \tag{۹}$$

صدق می‌کند، که در آن F یکی از کانونها بوده و Q پای عمود مرسوم از P به نزدیکترین هادی L به F است. حال عکس مطلب را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، نشان می‌دهیم‌که‌هر نقطهٔ $P = (x, y)$ صادق در (۹) بر یک بیضی با خروج از مرکز e قرار دارد اگر $0 < e < 1$ یا بر یک هذلولی با خروج از مرکز e واقع است اگر $e > 1$. برای این کار، فرض کنیم، مثل شکل ۴۲، کانون نقطهٔ $(d, 0)$ بوده و هادی L محور y باشد. در این صورت،

$$|PF| = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \qquad |PQ| = |x|,$$



شکل ۴۲

و (۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = e|x|.$$

بنابراین،

$$(x-d)^2 + y^2 = e^2x^2$$

یا

$$(1 - e^2)x^2 - 2dx + y^2 + d^2 = 0,$$

که در آن $1 - e^2 \neq 0$. با فاکتورگرفتن‌از $1 - e^2$ و کامل‌کردن مربع، این معادله‌را می‌توان

به صورت زیر نوشت :

$$(1-e^2)\left(x-\frac{d}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{d^2}{1-e^2}-d^2=\frac{e^2d^2}{1-e^2},$$

که با

$$\left(x-\frac{d}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2$$

معادل می‌باشد . معادلهٔ اخیر را می‌توان به ازای $0<e<1$ به شکل

$$\frac{\left(x-\dfrac{d}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{ed}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\dfrac{ed}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}=1 \qquad (۱۰)$$

و به ازای $e>1$ به شکل

$$\frac{\left(x+\dfrac{d}{e^2-1}\right)^2}{\left(\dfrac{ed}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\dfrac{ed}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}=1 \qquad (۱۰')$$

نوشت . اما (۱۰) معادلهٔ یک بیضی است ، ولی (′۱۰) معادلهٔ هذلولی می‌باشد . به‌عنوان تمرین ، بیضی (۱۰) و هذلولی (′۱۰) را توصیف‌کرده ، و تحقیق کنید هر یک دارای خروج از مرکز e است .

در قضیهٔ زیر تمام این‌نکات ، همراه‌با‌این امر که فرمول (۹) به ازای $e=1$ به‌خاصیت معرف سهمی بدل می‌شود خلاصه شده است (ر.ک. صفحهٔ ۹۳۱) .

قضیهٔ ۱ (خاصیت کانون ــ هادی مقاطع مخروطی) . عدد مثبت e داده شده است . *فاصلهٔ نقطهٔ متغیر P تا نقطهٔ ثابت F مساوی e برابر فاصلهٔ P تا خط ثابت L غیرشامل F است اگر و فقط اگر P بر یک مقطع مخروطی به کانون F ، هادی L ، و خروج از مرکز e واقع باشد . این مقطع مخروطی*

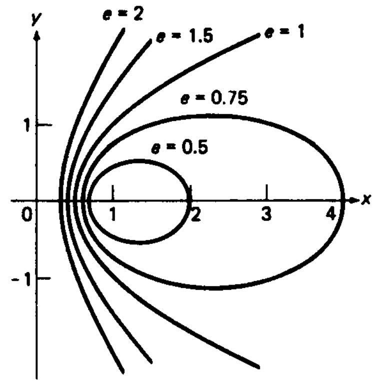
(یک) بیضی است اگر $0<e<1$ ؛

(دو) سهمی است اگر $e=1$ ؛

(سه) هذلولی است اگر $e>1$.

این قضیه در شکل ۴۳ تعبیر هندسی شده است ، که در آن کانون نقطهٔ $(1, 0)$ ،

هادی محور y ، و خروج از مرکز e مقادیر 0.5 ، 0.75 ، 1 ، 1.5 ، و 2 را می‌گیرد . سهمی نمودار $y^2 = 2x - 1$ ، و سایر منحنیها نمودار (۱۰) و (۱۰′) به ازای $d = 1$ و مقادیر ذکر شده از e می‌باشند .



مقاطع مخروطی با خروج از مرکزهای مختلف

شکل ۴۳

مثال ۱ . معادلهٔ بیضی را بیابید که رئوسش $(\pm 6, 0)$ بوده و هادیهایش به فاصلهٔ $h = \frac{72}{5}$ از هم باشند . خروج از مرکز آن چقدر است ؟

حل . معادلهٔ متعارف بیضی عبارت است از $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ، که در آن $2a$ طول محور اطول و $2b$ طول محور اقصر است . هرگاه $2c$ فاصلهٔ بین کانونها باشد ، آنگاه $2a^2/c$ فاصلهٔ بین هادیها می‌باشد . فرض است که

$$a = 6, \qquad h = \frac{2a^2}{c} = \frac{72}{5},$$

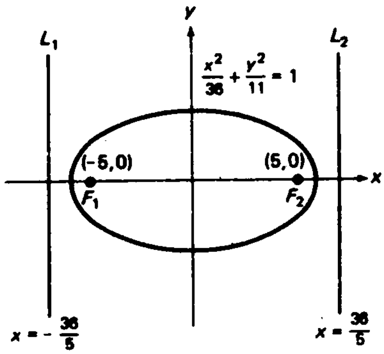
و درنتیجه ، $c = 5,\ b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 25 = 11$. بنابراین ، معادلهٔ بیضی مساوی است با

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1,$$

و خروج از مرکز آن برابر است با

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{6}.$$

شکل ۴۴ بیضی را همراه با کانونهایش $(\pm 5, 0)$ و هادیهایش $x = \pm \frac{36}{5}$ نشان می‌دهد .



شکل ۴۴

مثال ۲ . معادلهٔ هذلولی به‌رأسهای $(0, \pm 2)$ و خروج‌از مرکز $e = \frac{3}{2}$ را بیابید. هادیهایش کجا واقعند ؟

حل . معادلهٔ متعارف هذلولی مورد بحث عبارت است از $1 = (x^2/b^2) - (y^2/a^2)$ ، که‌درآن $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج است . هرگاه $2c$ فاصلهٔ بین کانونها باشد ، آنگاه c/a خروج از مرکز است . فرض است که

$$a = 2, \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2},$$

درنتیجه ، $c = 3, b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. لذا ، معادلهٔ هذلولی عبارت است از

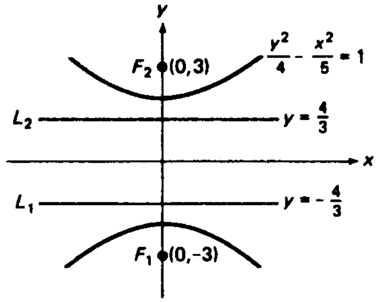
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1,$$

و فاصلهٔ بین هادیهایش مساوی است با

$$h = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e} = \frac{8}{3}.$$

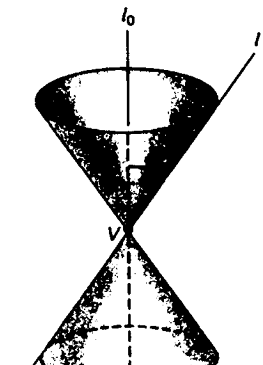
شکل ۴۵ هذلولی را همراه با کانونهایش $(0, \pm 3)$ و هادیهایش $y = \pm \frac{4}{3}$ نشان می‌دهد .

اکنون ، همانطور که قول داده‌ایم ، توضیح می‌دهیم که چرا سهمی ، بیضی ، وهذلولی را **مقاطع مخروطی** یا فقط **مخروطی** می‌گویند . از نام برمی‌آید که رابطه‌ای با مخروط وجود دارد؛ و در واقع ، هر یک فصل مشترک یک مخروط مستدیر قائم مضاعف با صفحهٔ قاطع



شکل ۴۵

مناسبی می‌باشد . شکل ۴۶ یک چنین مخروط را نشان می‌دهد . این مخروط سطحی است که از دو قسمت به نام **پارچه** تشکیل شده است که یکدیگر را در نقطهٔ V قطع می‌کننـد . این نقطه رأس مخروط نام دارد ، و هر خط l واقع بر مخروط و مار بر V یک **مولد** مخروط نامیده



مخروط مستدیر قائم دوپارچه

شکل ۴۶

می‌شود که با محور l_0 مخروط زاویهٔ حادهٔ α را می‌سازد (ر.ک. شکل) . در واقع ، هر مولد l با دوران حول l_0 ضمن ثابت نگهداشتن α هر دو پارچهٔ مخروط را جارو می‌کند . فرض کنیم Π (حرف پی بزرگ یونانی) صفحه‌ای باشد که با محور مخروط زاویهٔ β ساخته و از رأس مخروط نگذرد . در این صورت ، منحنی ، به نام **مقطع مخروطی** ، که فصل مشترک Π با مخروط است

(یک) دایره است اگر $\beta = 90°$، مثل شکل ۴۷ (آ)؛
(دو) بیضی است اگر $\alpha < \beta < 90°$، مثل شکل ۴۷ (ب)؛
(سه) سهمی است اگر $\alpha = \beta$، مثل شکل ۴۷ (پ)؛
(چهار) هذلولی است اگر $0 \leq \beta < \alpha$، مثل شکل ۴۷ (د).

دایره (آ) — بیضی (ب) — سهمی (پ) — هذلولی (ت)

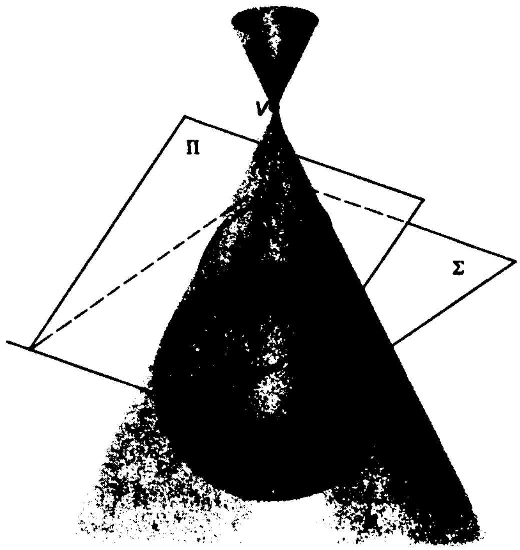
شکل ۴۷

توجه کنید که فقط در حالت (چهار) است که صفحه هر دو پارچهٔ مخروط را قطع می‌کند. اثبات (یک) بلافاصله (با استفاده از مثلثهای همنهشت) صورت می‌گیرد. اثباتهای (دو) تا (چهار) نیاز به‌فراست بیشتری‌است، و تفصیل فقط برای بیضی داده خواهد شد. با اینحال، همین استدلال با تعدیلهایی‌جزیی برای‌سهمی و هذلولی به کار خواهندرفت.

اختیاری. اکنون باتوجه به شکل۴۸حالت (دو) رابادقت بیشتری بررسی می‌کنیم. فرض کنیم E فصل مشترک‌صفحهٔ Π با یکی از پارچه‌های‌مخروط به‌رأس V بوده، و در مخروط کرهٔ S راطوری محاط‌می‌کنیم که به Π در نقطهٔ F و به مخروط درامتداد دایرهٔ C مماس باشد. فرض‌کنیم P نقطه‌ای از منحنی E بوده، و A نقطهٔ برخورد C با مولدی‌از مخروط باشد که از P می‌گذرد. همچنین، Σ صفحهٔ دایرهٔ C، L فصل مشترک صفحات Σ و Π، و Q نقطهٔ اشتراک L و عمود مرسوم از P به L باشد.

پاره‌خطهای PA و PF متساوی‌الطولند؛ یعنی،

$$|PA| = |PF|, \tag{11}$$



شکل ۴۸

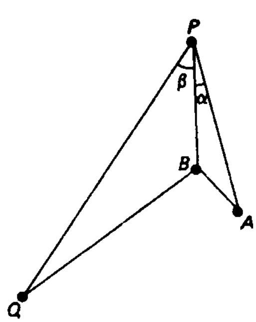
زیرا مماسهایی هستند که از نقطهٔ P بر کرهٔ S رسم شده‌اند. فرض کنیم B پای عمود وارد از P بر صفحهٔ Σ باشد؛ درنتیجه، PB موازی محور مخروط است. در این صورت،

$$\frac{|PB|}{|PA|} = \cos\alpha, \tag{۱۲}$$

که در آن α زاویهٔ بین یک مولد و محور مخروط است، ولی

$$\frac{|PB|}{|PQ|} = \cos\beta, \tag{۱۲'}$$

که در آن β زاویهٔ بین صفحهٔ Π و محور می‌باشد (ر.ک. شکل ۴۹، که بزرگ شدهٔ قسمتی از



شکل ۴۹

شکل ۴۸ است) . با تقسیم ('۱۲) بر (۱۲) ، به دست می‌آوریم

$$\frac{|PA|}{|PQ|}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

یا معادلا" ، به خاطر (۱۱) ،

$$|PF|=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,|PQ|. \tag{۱۳}$$

اما $\alpha<\beta<90°$ ؛ و درنتیجه ، نسبت $\cos\beta/\cos\alpha$ عددی بین 0 و 1 است . اگر این‌عدد را با e نشان دهیم ، می‌توانیم (۱۳) را به شکل

$$|PF|=e|PQ|$$

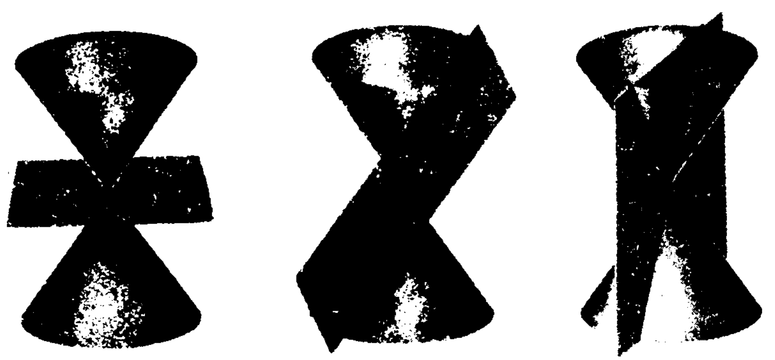
بنویسیم ، که همان تعریف‌بیضی برحسب خاصیت‌کانون ـ هادی آن می‌باشد . لذا ، منحنی E بیضی به کانون F ، هادی L ، و خروج از مرکز e است ، و برهان (دو) تمام‌خواهد‌بود.

همچنین ، سه مخروطی " تباه شده " وجوددارند که زمانی به دست می‌آیندکه‌صفحهٔ قاطع از رأس مخروط می‌گذرد . این سه‌مخروطی‌عبارتنداز

(یک) یک جفت خط متقاطع اگر صفحه شامل دو مولد باشد ، مثل شکل ۵۰(آ) ؛

(دو) یک خط اگر صفحه شامل فقط یک مولد باشد ، مثل شکل ۵۰ (ب) ؛

(سه) یک نقطه اگر صفحه شامل مولدی نباشد ، مثل شکل ۵۰ (پ) .



(آ) (ب) (پ)

شکل ۵۰

در بخش بعد درخواهیم یافت که مخروطیها ، هم تباه نشده و هم تباه شده ، در بررسی نمودار معادلهٔ درجهٔ دوم کلی دو متغیره به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند .

مسائل

فرض کنیم h فاصلهٔ بین هادیهای یک بیضی به مرکز مبداء باشد. معادلهٔ بیضی را در صورتی بیابید که

۱. $h = 18$ ، محور اطول قائم و طولش 12 باشد

۲. $h = 5$ ، محور اطول افقی و فاصلهٔ بین کانونها 4 باشد

۳. $h = 13$ ، محور اطول افقی و محور اقصر به طول 6 باشد

۴. $h = 16$ ، محور اطول قائم و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ باشد.

فرض کنید h فاصلهٔ بین هادیهای یک هذلولی به مرکز مبداء باشد. معادلهٔ هذلولی را درصورتی بیابید که

۵. $h = \frac{32}{5}$ ، محور متقاطع افقی و محور مزدوج به طول 6 باشد

۶. $h = 4$ ، محور متقاطع قائم و طولش 8 باشد

۷. $h = \frac{8}{3}$ ، محور متقاطع قائم و خروج از مرکزش $\frac{3}{2}$ باشد

۸. $h = \frac{16}{5}$، محور متقاطع افقی ومجانبهایش $y = \pm\frac{3}{4}x$ باشند.

خروج از مرکز و هادیهای مقطع مخروطی زیر را بیابید.

۹. بیضی $25x^2 + 9y^2 = 225$

۱۰. بیضی $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ (ر.ک. شکل ۲۳، صفحهٔ ۹۴۸)

۱۱. بیضی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ (ر.ک. مسئلهٔ ۲۱، صفحهٔ ۹۵۴)

۱۲. هذلولی $11x^2 - 25y^2 = 275$

۱۳. هذلولی $2xy = 1$ (ر.ک. شکل ۶، صفحهٔ ۹۲۶)

۱۴. هذلولی $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 14 = 0$ (ر.ک. شکل ۳۵، صفحهٔ ۹۶۴)

۱۵. مسیر نقطهٔ متحرک $P = (x, y)$ را چنان بیابید که فاصله‌اش تا خط $x = -4$ همیشه‌دو برابر فاصله‌اش تا نقطهٔ $(-1, 0)$ باشد.

۱۶. مسیر نقطهٔ متحرک $P = (x, y)$ را چنان بیابید که فاصله‌اش تا نقطهٔ $(-8, 0)$ همیشه دوبرابر فاصله‌اش تا خط $x = -2$ باشد.

۱۷. نقطهٔ $(7, 0)$ بر یک هذلولی به کانون $F = (-4, -2)$ و نزدیکترین هادی $x = -3$ به F واقع است. معادلهٔ هذلولی را به شکل متعارف بنویسید.

۱۸. نقطهٔ $(-1, 5)$ بر بیضی به کانون $F = (3, 2)$ و نزدیکترین هادی $x = \frac{21}{4}$ به F قرار دارد. معادلهٔ بیضی را به شکل متعارف بنویسید.

۱۹. معادلهٔ بیضی باخروج‌از مرکز $\frac{1}{2}$ وکانون $F = (2, 0)$ ونزدیکترین هادی $x + y - 1 = 0$ به F را بیابید.

۲۰. معادلهٔ هذلولی با خروج از مرکز 2 و کانون$F = (-1, 1)$و نزدیکترین هادی $3x - 4y + 2 = 0$ به F را بیابید.

۲۱. در شکل ۴۸، کرهٔ S زیر صفحهٔ قاطع Π قرار داشته و برΠ در نقطهٔ F و با مخروط در امتداد دایرهٔ C مماس است. همچنین، می‌توان کرهٔ دیگر S' را در مخروط طوری محاط کرد که *بالای*Π واقع بوده و بر Π در نقطهٔ F' و بر مخروط در امتداد دایرهٔ C مماس باشد. دراین صورت،همان استدلالی که نشان داد F یکی از کانونهای بیضی E است که در آن Π مخروط را قطع می‌کند نشان می‌دهد کهF' کانون دیگر است. با استفاده از این ترسیم، خاصیت دو کانونی E را مستقیماً" ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید که $|PF| + |PF'| = 2a$. تعبیر هندسی ثابت$2a$ برحسب مخروط و کرات چیست؟

۶.۱۰ منحنیهای درجهٔ دو (اختیاری)

منظور از *معادلهٔ درجهٔ دو* از دو متغیر x و y یعنی معادله‌ای به شکل

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{۱}$$

که در آن ضرایب A، B، و C همه صفر نیستند (در غیر این صورت، (۱) به معادلهٔ درجهٔ اول یا خطی تحویل می‌شود). نمودار این معادله یک **منحنی درجهٔ دو** نام دارد، و آن را می‌توان به صورت زیر پیدا کرد.

اگر " جملهٔ حاصل ضرب "Bxyوجود نمی‌داشت، معادلهٔ (۱) از نوعی می‌بود که قبلاً " با آن آشنا شده‌ایم (ر.ک. زیر). لذا، اگر $B \neq 0$، گام اول در تحلیل (۱) رفتن به دستگاه مختصات جدیدی است که در آن جملهٔ حاصلضرب وجود نداشته باشد. برای این کار، دستگاهxy را حول مبداء O به اندازهٔ زاویهٔ θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران داده، بدین وسیله دستگاه$x'y'$جدید را با همان مبداء به دست می‌آوریم. مختصات قدیم و جدید با معادلات دوران

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta, \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta, \end{aligned} \tag{۲}$$

که در صفحهٔ ۹۲۴ به دست آمدند به هم مربوطند. با گذاردن (۲) در (۱)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &A(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 + B(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta) \\ &\quad + C(x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \sin\theta) \\ &\quad + E(x' \sin\theta + y' \cos\theta) + F = 0. \end{aligned}$$

این فرمول بزرگ پس از دسته‌بندی جملات به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$A'x'^2 + B'x'y' + Cy'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (۱')$$

که برحسب ضرایب جدید داریم

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta, \\ B' &= B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(C - A)\sin\theta\cos\theta, \\ C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta, \\ D' &= D\cos\theta + E\sin\theta, \\ E' &= -D\sin\theta + E\cos\theta, \\ F' &= F. \end{aligned} \qquad (۳)$$

حذف جملهٔ حاصل‌ضرب. حال مقدار θ را طوری می‌گیریم که $B' = 0$: یعنی، طوری که

$$B' = B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(C - A)\sin\theta\cos\theta = 0.$$

به کمک فرمولهای زاویهٔ مضاعف (ر.ک. صفحهٔ ۹۶)، این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$B\cos 2\theta + (C - A)\sin 2\theta = 0,$$

یا معادلاً، پس از تقسیم طرفین بر $B\sin 2\theta$،

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} \qquad (۴)$$

با معاینهٔ نمودار تابع کتانژانت (ر.ک. شکل ۲۴، صفحهٔ ۱۰۴) معلوم می‌شود که همواره زاویهٔ θ در بازهٔ $(0, \pi/2)$ را طوری یافت که، صرف‌نظر از مقدار $(A - C)/B$، در (۴) صدق نماید.

به ازای این θ، B' مساوی صفر بوده و معادلهٔ (۱') شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (۵)$$

که در آن جملهٔ حاصل ضرب وجود ندارد. پس به وضعیت آشنایی بازگشته‌ایم. هرگاه $A'C' = 0$، آنگاه $A' \neq 0,\ C' = 0$ یا $A' = 0,\ C' \neq 0$ (چرا حالت $A' = C' = 0$ غیرممکن است؟). بنابراین، (۵) را می‌توان به شکل

$$x'^2 + ax' + by' + c = 0 \qquad (۶)$$

یا

$$y'^2 + ax' + by' + c = 0 \qquad (۶')$$

نوشت، که در آن

$$a = \frac{D'}{A'}, \qquad b = \frac{E'}{A'}, \qquad c = \frac{F'}{A'} \qquad (۷)$$

درحالت اول و

$$a = \frac{D}{C'}, \qquad b = \frac{E'}{C'}, \qquad c = \frac{F'}{C'}$$

در حالت دوم است. اگر $A'C' > 0$ ، می‌توان (۵) را به شکل زیر نوشت:

$$x'^2 + ky'^2 + ax' + by' + c = 0, \tag{۸}$$

که در آن $k = C'/A' > 0$ و a, b, c با (۷) داده شده‌اند، ولی اگر $A'C' < 0$ ، (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x'^2 - ky'^2 + ax' + by' + c = 0, \tag{۸'}$$

که در آن این بار $k = -C'/A' > 0$ و a, b, c مجددا" با (۷) داده می‌شوند. اما (۶)، (۶')، (۸)، و (۸') درست همان معادلاتی هستند که به تفصیل در صفحات ۹۳۵، ۹۴۸، و ۹۶۴ داده شده‌اند منتها با تفاوتهایی جزیی در نمادها. بدین ترتیب، هر معادلهٔ درجهٔ دو را می‌توان به معادله‌ای تبدیل کرد که حل آن را قبلا" می‌دانیم.

اگر $b \neq 0$ ، نمودار معادلهٔ (۶) یک سهمی است که محور y' محور تقارن آن است، ولی اگر $a \neq 0$ ، نمودار (۶') یک سهمی است که محور x' محور تقارن آن می‌باشد. اگر این شرایط برقرار نباشند، یعنی اگر (۶) به

$$x'^2 + ax' + c = 0 \tag{۹}$$

و (۶') به

$$y'^2 + by' + c = 0 \tag{۹'}$$

تحویل شود، نمودار به یک جفت خط موازی، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی (مجموعه‌ای که اصلا" شامل نقطه‌ای نیست) تباه می‌گردد. درحالت (۹)، دلیلش این است که معادله دوجواب

$$x' = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}{2}$$

را دارد اگر $a^2 > 4c$ ، تنها جواب $x' = -a/2$ را دارد اگر $a^2 = 4c$ ، و جواب (حقیقی) ندارد اگر $a^2 < 4c$ ، و حکم مشابهی را می‌توان در باب جوابهای (۹') بیان کرد. نمودار معادلهٔ (۸) یک بیضی (احتمالا" دایره، اگر $k = 1$)، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی است (ر. ک. صفحهٔ ۹۴۸)، ولی نمودار (۸') یک هذلولی یا یک جفت خط متقاطع می‌باشد (ر. ک. صفحهٔ ۹۶۴). اگر نمودار بیضی یا هذلولی باشد، محورهایش موازی محورهای مختصات صفحهٔ $x'y'$ می‌باشند.

منحنیهای درجهٔ دو به عنوان مخروطی.

با احتساب همهٔ این امکانات، می‌بینیم که هر منحنی درجهٔ دو باید یک بیضی، دایره، سهمی، یا هذلولی باشد؛ یعنی، یکی از مخروطیها، یک جفت خط متقاطع، یکجفت خط

موازی، یک خط، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی می‌باشد. در صفحهٔ ۹۸۲ یک جفت خط متقاطع، یک خط، و یک نقطه را مخروطیهای تباه شده گرفتیم، و نشان دادیم که هر یک از این " اشکال " فصل مشترک یک صفحه با یک مخروط مستدیر قائم دو پارچه است. حال یک جفت خط موازی و مجموعهٔ تهی را نیز مخروطی تباه شده می‌گیریم. با این قرارداد می‌توان گفت که هر منحنی درجهٔ دو یک مخروطی، *تباه نشده یا تباه شده*، می‌باشد.

تبصره. نامیدن یک جفت خط موازی یا مجموعهٔ تهی به عنوان مخروطی تباه شده شایسته نیست، زیرا به طور هندسی واضح است که اشتراک یک صفحه و یک مخروط مضاعف نامتناهی نمی‌تواند نه یک جفت خط موازی و نه تهی باشد. لذا، معمولاً " تعریف مخروطی را طوری تعمیم می‌دهند که اشتراک یک صفحه با یک *استوانهٔ* مستدیر قائم را نیز، مانند مخروط مستدیر قائم، دربرگیرد. در این صورت، می‌توان یک جفت خط موازی مثل شکل ۵۱(آ)، یا مجموعهٔ تهی (بدون فصل مشترک) مثل شکل ۵۱(ب)، یا یک بیضی مثل مسئلهٔ ۱۷ به دست آورد.


(ب) (آ)

شکل ۵۱

به کمک اتحاد

$$\cot 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta},$$

می‌توان (۴) را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta} = \frac{A - C}{B}. \qquad (۱۰)$$

این معادله با معادلهٔ درجهٔ دوم

$$B\cot^2\theta - 2(A-C)\cot\theta - B = 0$$

معادل است ، که دو جواب حقیقی‌اش عبارتنداز

$$\cot\theta = \frac{(A-C) \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}$$

یکی از این جوابها مثبت و دیگری منفی است (چرا ؟) . با اختیار جواب مثبت ، می‌توان مقادیری از $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را یافت که در محاسبهٔ ضرایب (۳) به کمک فرمولهای

$$\cos\theta = \frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} \tag{۱۱}$$

لازمند (این فرمولها را تحقیق کنید) .

مثال ۱ . نمودار معادلهٔ

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0 \tag{۱۲}$$

را بیابید .

حل . در اینجا $A = 5, B = 4, C = 2, D = -24, E = -12, F = 18$ ، و (۱۰) به‌صورت

$$\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} = \frac{3}{4}$$

یا معادلاً

$$2\cot^2\theta - 3\cot\theta - 2 = 0,$$

با جوابهای

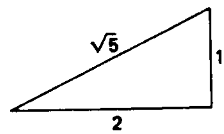
$$\cot\theta = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

در می‌آید . با انتخاب علامت به‌علاوه برای مثبت ساختن $\cot\theta$ ، به دست می‌آوریم

$$\cot\theta = \frac{8}{4} = 2.$$

لذا ، طبق (۱۱) یا صرفاً با معاینهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۵۲ ، داریم

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$



شکل ۵۲

و ضرایب (۳) به ازای این مقادیر از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ برابرند با

$$A' = \frac{4}{5}A + \frac{2}{5}B + \frac{1}{5}C = 4 + \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 6,$$

$$B' = 0,$$

$$C' = \frac{1}{5}A - \frac{2}{5}B + \frac{4}{5}C = 1 - \frac{8}{5} + \frac{8}{5} = 1,$$

$$D' = \frac{2}{\sqrt{5}}D + \frac{1}{\sqrt{5}}E = -\frac{48}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = -\frac{60}{\sqrt{5}} = -12\sqrt{5},$$

$$E' = -\frac{1}{\sqrt{5}}D + \frac{2}{\sqrt{5}}E = \frac{24}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}} = 0,$$

$$F' = F = 18.$$

لذا، معادلهٔ (۱۲) با دوران محورها به اندازهٔ زاویهٔ $\operatorname{arccot} 2 \approx 26.5°$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 18 = 0.$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان پس از کامل کردن مربع به صورت زیر نوشت:

$$6(x' - \sqrt{5})^2 + y'^2 = 12$$

که، پس از تقسیم بر 12، با

$$\frac{(x' - \sqrt{5})^2}{2} + \frac{y'^2}{12} = 1$$

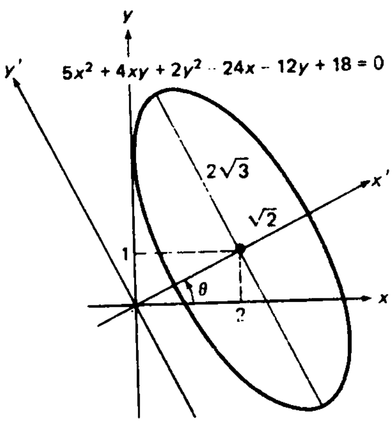
معادل است. این معادلهٔ یک بیضی به شکل متعارف است که مرکز آن در دستگاه $x'y'$ مساوی $(\sqrt{5}, 0)$، محور اطولش در امتداد خط $x' = \sqrt{5}$، و محور اقصرش در امتداد محور x' می‌باشد. نیم محور اطول a مساوی است با $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$، و نیم محور اقصرش b برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد. با گذاردن $x' = \sqrt{5}, y' = 0$ در معادلات دوران (۲)، معلوم می‌شود که مختصات مرکز

بیضی در دستگاه xy عبارتند از

$$x = \sqrt{5}\cos\theta - 0\sin\theta = \sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{5}} = 2,$$

$$y = \sqrt{5}\sin\theta + 0\cos\theta = \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}} = 1.$$

لذا، نمودار (۱۲) بیضی شکل ۵۳ می‌باشد. در مسئلهٔ ۱۵، ویژگی جالبی از این نمودار مطرح شده است.



شکل ۵۳

مثال ۲. نمودار معادلهٔ

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 52x - 78y - 338 = 0 \qquad (۱۳)$$

را بیابید.

حل. این بار $A = 9, B = -12, C = 4, D = -52, E = -78, F = -338$ ، و (۱۰) به صورت

$$\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} = -\frac{5}{12}$$

یا معادلاً

$$6\cot^2\theta + 5\cot\theta - 6 = 0,$$

با دو جواب

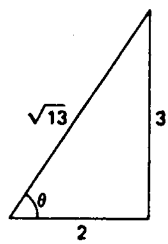
$$\cot\theta = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12}$$

درمی‌آید. با اختیار علامت به‌علاوه برای مثبت ساختن $\cot\theta$ ، به دست می‌آوریم

$$\cot\theta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

بنابراین، طبق (۱۱) یا معاینهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۵۴،

$$\cos\theta = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$



شکل ۵۴

ضرایب (۳) به ازای این مقادیر $\cos\theta$ و $\sin\theta$ برابرند با

$$A' = \frac{4}{13}A + \frac{6}{13}B + \frac{9}{13}C = \frac{36}{13} - \frac{72}{13} + \frac{36}{13} = 0,$$

$$B' = 0,$$

$$C' = \frac{9}{13}A - \frac{6}{13}B + \frac{4}{13}C = \frac{81}{13} + \frac{72}{13} + \frac{16}{13} = \frac{169}{13} = 13,$$

$$D' = \frac{2}{\sqrt{13}}D + \frac{3}{\sqrt{13}}E = \frac{2(-52)}{\sqrt{13}} + \frac{3(-78)}{\sqrt{13}} = -\frac{338}{\sqrt{13}} = -26\sqrt{13},$$

$$E' = -\frac{3}{\sqrt{13}}D + \frac{2}{\sqrt{13}}E = -\frac{3(-52)}{\sqrt{13}} + \frac{2(-78)}{\sqrt{13}} = 0,$$

$$F' = F = -338.$$

لذا، معادلهٔ (۱۳) با دوران محورها به اندازهٔ $\operatorname{arccot}\frac{2}{3} \approx 56.3°$ خلاف‌جهت‌عقربه‌های ساعت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 13y'^2 - 26\sqrt{13}x' - 338 = 0.$$

معادلهٔ اخیر با

$$y'^2 = 2\sqrt{13}(x' + \sqrt{13})$$

معادل است ،که معادلهٔ یک‌سهمی به رأس$(-\sqrt{13}, 0)$ در دستگاه $x'y'$ است که‌محورتقارنش محور x' می‌باشد . با گذاردن $x' = -\sqrt{13}, y' = 0$ در معادلات دوران (۲) ، معلوم می‌شود که مختصات رأس سهمی در دستگاه xy عبارتنداز

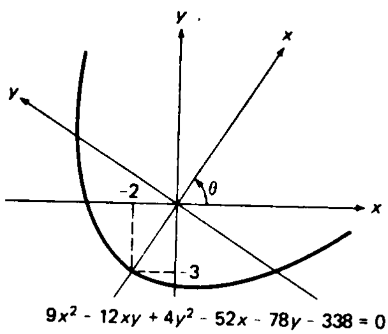
$$x = -\sqrt{13}\cos\theta - 0\sin\theta = -\sqrt{13}\frac{2}{\sqrt{13}} = -2,$$

$$y = -\sqrt{13}\sin\theta + 0\cos\theta = -\sqrt{13}\frac{3}{\sqrt{13}} = -3,$$

حال آنکه محور تقارن خط مار برمبداء با میل θ است ؛ یعنی ، خط

$$y = x\tan\theta = \frac{x}{\cot\theta} = \frac{3}{2}x.$$

لذا ، نمودار (۱۳) سهمی شکل ۵۵ می‌باشد .



شکل ۵۵

فرض کنیم ضرایب x^2 و y^2 در معادلهٔ درجهٔ دو اصلی یکی باشند . پس $A = C$ و معادلهٔ (۱۰) به صورت $\cot 2\theta = 0$ با جواب $\theta = 45°$ درمی‌آید . لذا ، در این حالت ، با دوران $45°$ محورها جملهٔ حاصل ضرب حذف می‌شود . مثلاً ، دوران $45°$ محورها درجهت خلاف عقربه‌های ساعت ، معادلات

$$2xy - 1 = 0, \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$$

را به ترتیب به معادلات

$$x'^2 - y'^2 - 1 = 0, \qquad y'^2 - 4\sqrt{2}x' = 0,$$

تبدیل می‌کند ، و این را می‌توان با جانشانی

$$x = x' \cos 45° - y' \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = x' \sin 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

امتحان نمود. اگر این معادلات آشنا به نظر می‌رسند، دلیلش این است که در دو مثال قبل مربوط به دورانهای $45°$، یعنی مثال ۴، صفحهٔ ۹۲۵، و مثالهای ۳ تا ۴، صفحات ۹۳۵ تا ۹۳۶ آمده بودند. لازم است به این مثالها از دیدگاه نظریهٔ این بخش نگاه دیگری بیفکنید.

بالاخره، توجه می‌کنیم که در مسئلهٔ ۱۹ آزمون ساده‌ای برای تعیین ماهیت یک منحنی درجهٔ دو بدون محاسباتی صریح مانند محاسبات امثلهٔ ۱ و ۲ وجود دارد.

مسائل

پس از دوران مناسبی از محورها، مخروطیی که نمودار معادلهٔ داده شده است را نام ببرید. اگر تباه نشده است، آن را رسم نمایید.

۱. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

۲. $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$

۳. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

۴. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

۵. $160x^2 - 56xy + 265y^2 - 2448x - 612y + 7956 = 0$

۶. $16x^2 - 8xy + y^2 + 12x - 3y - 10 = 0$

۷. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 16x + 38y + 15 = 0$

۸. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$

۹. $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$

۱۰. $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$

۱۱. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 50x - 50y + 100 = 0$

۱۲. $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 16x - 16y - 272 = 0$

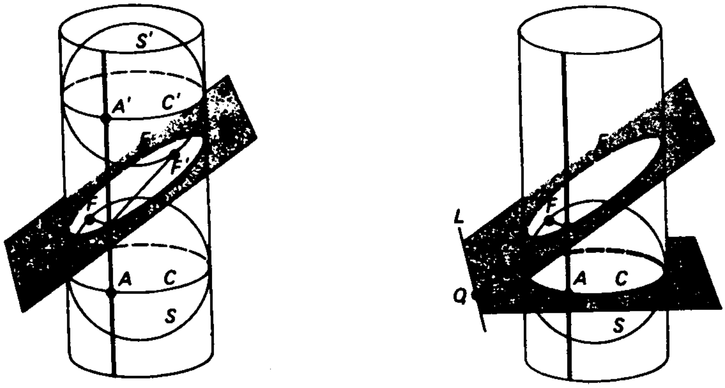
۱۳. $25x^2 - 20xy + 4y^2 - 15x + 6y - 4 = 0$

۱۴. $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$

۱۵. ثابت کنید بیضی مثال ۱، همانند شکل ۵۳، بر محور y مماس است. نقطهٔ تماس را بیابید.

۱۶. نشان دهید که معادلهٔ (۴) به ازای دو مقدار متمایز θ در بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ که تفاضلشان $\pi/2$ است برقرار می‌باشد. هر انتخاب به‌معادله‌ای به‌شکل (۵) منجرمی‌شود. دو معادله چه تفاوتی باهم دارند؟

۱۷. با استفاده از شکل ۵۶ (آ)، نشان دهید که منحنی E که فصل مشترک Π با استوانهٔ مستدیر قائم است بیضی است اگر Π با محور استوانه زاویهٔ حاده بسازد. همچنین با استفاده از شکل ۵۶(ب) نشان دهید که E بیضی است (در اینجا S و S' کراتی محاط شده در استوانه‌اند که یکدیگر را در دوایر C و C' قطع می‌کنند.)



شکل ۵۶

۱۸. با نمادهای (۳)، تحقیق کنید به ازای هر انتخاب زاویهٔ دوران θ،

$$A' + C' = A + C, \qquad B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

۱۹. کمیت $\Delta = B^2 - 4AC$ مبین معادلهٔ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ نام دارد. لذا، فرمول دوم مسئلهٔ قبل را می‌توان به شکل فشردهٔ $\Delta = \Delta'$ نوشت، و گفت مبین تحت *دوران پایا* است؛ یعنی، پس از دوران محورها تغییر نمی‌کند. بااستفاده از این امر، نشان دهید که نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دو عبارت از

(یک) یک بیضی است (احتمالاً یک دایره، نقطه، یا مجموعهٔ تهی) اگر $\Delta < 0$؛

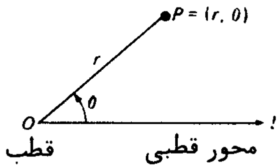
(دو) یک سهمی است (احتمالاً یک جفت خط موازی، یک خط، یامجموعهٔ تهی) اگر $\Delta = 0$؛

(سه) یک هذلولی (احتمالاً دو خط متقاطع) اگر $\Delta > 0$.

۲۰. اعتبار مسئلهٔ ۱۹ را با استفاده از مسائل ۱ تا ۱۴ بیازمایید.

۷.۱۰ مختصات قطبی

تاکنون موضع یک نقطه در صفحه با مختصات قائم یا دکارتی (که در صفحهٔ ۳۲ تعریف شدند) مشخص شده است. لیکن، اغلب شایسته است موضع نقطهٔ P در صفحه‌را به‌صورتی دیگر، یعنی با "مختصات‌قطبی" معین کنیم. این مختصات به صورت زیرتعریف می‌شوند. فرض کنیم l یک شعاع یا نیمخط ثابت، به نام **محور قطبی**، باشد که از نقطهٔ ثابت O، به نام **مبداء** یا **قطب** خارج‌شده‌است (l را معمولاً، مثل شکل ۵۷، افقی و به‌راست‌می‌کشند).



شکل ۵۷

فرض کنید $r = |OP|$ فاصلهٔ بین O و P بوده، و θ زاویهٔ بین l و پاره‌خط OP باشد که از l به OP در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود. در این صورت، گوییم نقطهٔ P به **مختصات قطبی** r و θ است، و P را باجفت‌مرتب (r, θ) نشان‌داده، می‌نویسیم $P = (r, \theta)$. برای رسم نمودارها، می‌توان θ را با درجه یا رادیان سنجید، ولی رادیان معمولاً در مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار می‌رود. اگر $P = (r, \theta)$، r را **مختص شعاعی** و θ را **مختص زاویه‌ای** P می‌نامند.

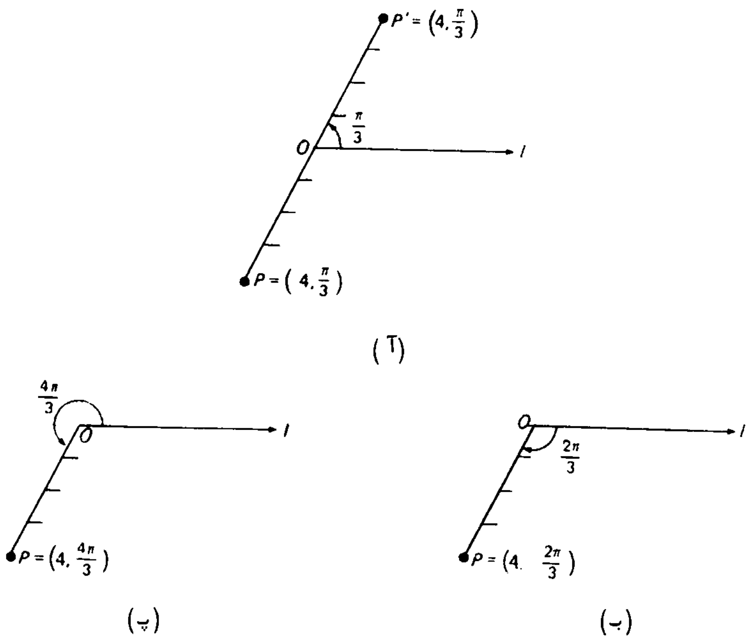
همچنین، r مجاز است‌مقادیر منفی اختیارکند. این‌را باتعریف $P = (r, \theta)$ $(r < 0)$ مساوی منعکس نقطهٔ $P' = (|r|, \theta)$ نسبت به مبداء O انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، برای یافتن نقطهٔ P به مختصات قطبی $r < 0$ و θ، در عوض در امتداد شعاعی که با محور قطبی l زاویهٔ θ می‌سازد، $|r|$ واحد در جهت خلاف شعاع می‌رویم. این امر در شکل ۵۸ (آ) نموده شده است، که در آن نقطهٔ $P = (-4, \pi/3)$ ونیزنقطهٔ $P' = (4, \pi/3)$ که منعکس P نسبت به O است رسم شده‌اند. از شکلهای ۵۸ (ب) و ۵۸ (پ) واضح است که $P = (-4, \pi/3)$ با جفتهای مرتب $(4, -2\pi/3)$ و $(4, 4\pi/3)$ نیز نموده می شود.

به ازای جفت مرتب (r, θ)، نقطه به مختصات قطبی r و θ به‌طور منحصر به‌فرد معین می‌شود. از آن سو، همانطور که از شکل ۵۸ قبلاً معلوم است، مختصات قطبی نقطهٔ داده شدهٔ P (به خلاف مختصات قائم آن) به‌طور منحصر به فرد معین نیستند. در واقع، اگر $P = (r, \theta)$ نقطه‌ای غیر از قطب O باشد، نیز داریم

$$P = (r, \theta + 2n\pi) \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

و

$$P = (-r, \theta + (2n+1)\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$



شکل ۵۸

(این وضع را می‌توان این طور توصیف کرد که بگوییم تناظر بین جفتهای مرتب از مختصات قطبی و نقاط صفحه ، به جای یک به یک بودن مثل مختصات قائم ، **چند به یک** است .) بنا بر قرارداد ، قطب O با هر جفت مرتب به‌شکل $(0, \theta)$ ، صرف‌نظر از مقدار θ ، نمایش‌داده می‌شود . این صرفاً " بدان خاطر است که مختص شعاعی قطب صفر است ؛ و لذا ، مختص زاویه‌ای θ نامعین می‌باشد .

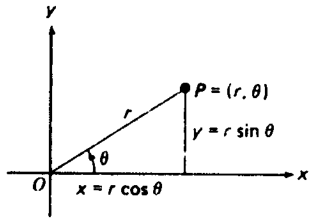
رابطهٔ بین مختصات قطبی و قائم . اغلب مختصات قطبی و قائم باهم به کار می‌روند ، به این ترتیب که قطب و محور قطبی را مبداء و محور x مثبت یک دستگاه مختصات قائم می‌گیرند . در این صورت ، از شکل ۵۹ واضح است که نقطه به مختصات قطبی r و θ دارای مختصات قائم زیر است :

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{1}$$

لازم است تحقیق شود که این فرمولها به ازای r منفی نیز برقرارند . اگر $r > 0$ ، از (۱)

معلوم می‌شود که

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{۲}$$



شکل ۵۹

مثال ۲ . اگر $P = (2, 3\pi/4)$ در مختصات قطبی باشد ، مختصات قائم P را پیدا کنید .

حل . از (۱) به ازای $r = 2$ و $\theta = 3\pi/4$ نتیجه می‌شود که

$$x = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \qquad y = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

مثال ۲ . اگر $P = (-3, -4)$ در مختصات قائم باشد ، مختصات قطبی P را بیابید .

حل . از (۲) به ازای $x = -3$ و $y = -4$ نتیجه می‌شود که

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

و نیز

$$\tan\theta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

برای به دست آوردن مقادیر منفی x و y ، باید مقداری برای θ اختیار کنیم که به ازای آن $\cos\theta$ و $\sin\theta$ هر دو منفی باشند . زاویهٔ $\arctan\frac{4}{3} \approx 53.1°$ واجد این شرط نیست ، ولی زاویهٔ $\arctan\frac{4}{3} + 180° \approx 233.1°$ این خاصیت را دارد . به‌صورت دیگر ، می‌توان $\theta = \arctan\frac{4}{3}$ را درصورتی اختیار کرد که مختص شعاعی P به‌جای 5 مساوی 5 ـ باشد. لذا $P = (5, \arctan\frac{4}{3} + \pi)$، و $P = (-5, \arctan\frac{4}{3})$ دو نمایش P در مختصات قطبی می‌باشند .

نمودار معادلات قطبی . منظور از نمودار تابع

$$r = f(\theta) \tag{۳}$$

یا به‌طورکلیتر معادلهٔ

$$F(r, \theta) = 0, \tag{۴}$$

شامل مختصات قطبی r و θ یعنی مجموعهٔ تمام‌نقاط با دست کم یک جفت مختصات‌قطبی که در (۳) یا (۴) صدق نمایند. مثلا" ، نقطه به مختصات قطبی $r = 1$ و $\theta = 1$ (زاویه به رادیان) متعلق به نمودار معادلهٔ

$$r = \theta \tag{۵}$$

است ، اگرچه همین نقطه دارای مختصات قطبی $r = 1$ و $\theta = 2\pi + 1$ است که‌در (۵) صدق نمی‌کنند . هر معادله به شکل (۳) یا (۴) یک **معادلهٔ قطبی** نام دارد ،ونمودار یک چنین معادله یک منحنی **قطبی** نامیده می‌شود .

مثال ۳ . نمودار معادلهٔ $r = a$ $(a > 0)$ دایره‌ای به شعاع a و مرکز قطب O است . نمودار معادلهٔ $\theta = \alpha$ (α دلخواه) شعاعی است که از O خارج شده و با محور قطبی l زاویهٔ α می‌سازد اگر $r \geq 0$ ،یا خط مار بر O است‌که با l زاویهٔ α می‌سازد اگر شرطی برای r نشده باشد (به یاد آورید که r می‌تواند منفی باشد) .

مثال ۴ . نمودار تابع

$$r = 4 \sin \theta \tag{۶}$$

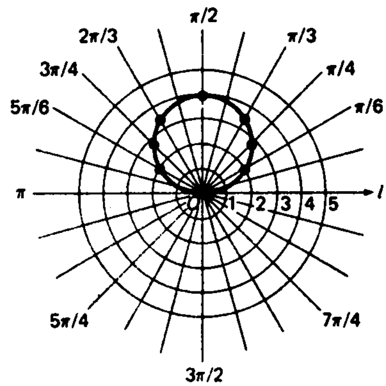
را رسم کنید .

حل . با دادن مقادیر مختلفی به زاویهٔ θ که سینوسشان آشناست ، جدول‌زیررا می‌سازیم :

θ(رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$r = 4 \sin \theta$	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0

با رسم این نقاط در مختصات قطبی روی کاغذ رسم (که شعاعهای مار بر قطب O رابه‌ازای زوایای مختلف و دوایر متحدالمرکز به مرکز O نشان می‌دهد) و وصل آنها با یک‌منحنی هموار ، دایرهٔ شکل ۶۰ به دست می‌آید . نقطهٔ متغیر (r, θ) ، وقتی θ از 0 تا $\pi/2$ تغییر می‌کند ، نیمهٔ راست دایره را می‌پیماید و سپس، وقتی θ از $\pi/2$ تا π تغییرکند ،نیمهٔ چپ

دایره را خواهد پیمود . به‌علاوه ، می‌توان به‌آسانی تحقیق کرد که (r, θ) ، وقتی θ از π تا $3\pi/2$ تغییر کند ، مجددا" نیمدایرهٔ راست را می‌پیماید و وقتی θ از $3\pi/2$ تا 2π تغییر کند ، نیمدایرهٔ چپ را خواهد پیمود (توجه کنید که وقتی θ بین π و 2π است ، r منفی می‌باشد) . در واقع ، وقتی θ در هر بازه به طول π تغییر کند ، دایره دقیقا" یکبار پیموده می‌شود (چرا؟) .



نمودار قطبی $r = 4 \sin \theta$

شکل ۶۰

برای تحقیق در اینکه منحنی شکل ۶۰ یک دایره است ، یک دستگاه مختصات‌قائم با محور x در امتداد محور قطبی درنظر می‌گیریم . با ضرب معادلهٔ (۶) در r ، به دست می‌آوریم

$$r^2 = 4r \sin \theta,$$

که با استفاده از فرمولهای (۱) و (۲) به معادلهٔ دکارتی

$$x^2 + y^2 = 4y \qquad (۶')$$

تبدیل می‌شود . ولی (۶') با معادلهٔ زیر معادل است :

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

که نمودارش دایره‌ای به‌شعاع 2 بوده و مرکزش در نقطه‌ای‌است‌که ، مانند شکل ، به مختصات زاویه‌ای $x = 0$ و $y = 2$ می‌باشد .

مثال ۵. تابع

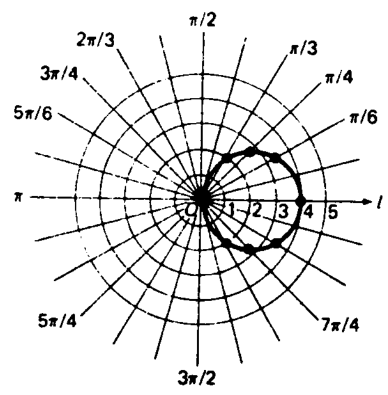
$$r = 4 \cos \theta \qquad (۷)$$

را رسم کنید.

حل. نقطهٔ (r, θ) متعلق به نمودار معادلهٔ قطبی $F(r, \theta) = 0$ است اگر و فقط اگر نقطهٔ $(r, \theta - 90°)$ متعلق به نمودار معادلهٔ قطبی $F(r, \theta + 90°) = 0$ باشد. لذا، نمودار $F(r, \theta + 90°) = 0$ از دوران نمودار $F(r, \theta) = 0$ به اندازهٔ $90°$ در جهت عقربه‌های ساعت به دست می‌آید. از تعویض θ با $\theta + 90°$ در معادلهٔ $r = 4 \sin \theta$، معادلهٔ (۷) به دست می‌آید:

$$r = 4 \sin (\theta + 90°) = 4 \cos \theta.$$

لذا، دوران $90°$ دایرهٔ $r = 4 \sin \theta$، مثل شکل ۶۰، در جهت عقربه‌های ساعت آن را به نمودار تابع (۷) بدل می‌سازد. پس نتیجه می‌شود که نمودار (۷) دایره‌ای به شعاع 2 بوده و مرکزش نقطه‌ای به مختصات قائم $x = 2$ و $y = 0$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۶۱). معادلهٔ دکارتی این دایره چیست؟

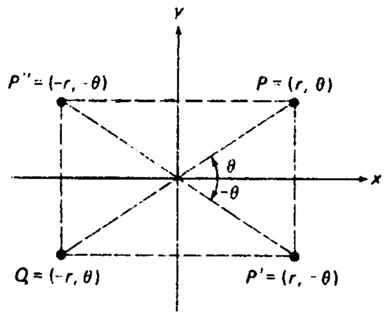


نمودار قطبی $r = 4 \cos \theta$

شکل ۶۱

آزمونهای تقارن. در رسم معادلهٔ قطبی $F(r, \theta) = 0$ همیشه باید تقارنهای نمودار را پیدا کنیم. چند آزمون برای اینگونه تقارنها وجود دارند. مختصات قطبی و قائم را همزمان به کار برده، قطب را مبداء مشترک O و محور قطبی را در امتداد محور x می‌گیریم. همچنین، $P = (r, \theta)$ نقطه‌ای غیر از خود قطب، P'، Q، و P'' نقشهای P تحت انعکاس نسبت به محور x، مبداء و محور y، و G نمودار معادلهٔ $F(r, \theta) = 0$ باشد. در این صورت، از نمایشهای

قطبی نقاط P' ، Q ، و P'' داده شده در شکلهای ۶۲ و ۶۳ معلوم می‌شود که

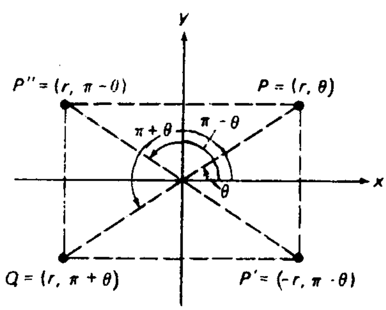


شکل ۶۲

(یک) G نسبت به محور x (محور قطبی) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(r, -\theta) = 0$ یا $F(-r, \pi - \theta) = 0$ باشد؛

(دو) G نسبت به مبداء O (قطب) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(-r, \theta) = 0$ یا $F(r, \pi + \theta) = 0$ باشد؛

(سه) G نسبت به محور y (خط مار بر O عمود بر محور قطبی) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(-r, -\theta) = 0$ یا $F(r, \pi - \theta) = 0$ باشد .



شکل ۶۳

مثال ۶. معادلهٔ

$$F(r, \theta) = r - 4 \sin \theta = 0.$$

که با (۶) معادل است ، همان مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ

$$F(-r, -\theta) = -r - 4 \sin (-\theta) = -r + 4 \sin \theta = 0$$

یا

$$F(r, \pi - \theta) = r - 4 \sin (\pi - \theta) = r - 4 \sin \theta = 0$$

را دارد . این ، بنابر (سه) ، بدین معنی است که نمودار $F(r, \theta) = 0$ نسبت به محور y متقارن است ، و در واقع دایرهٔ شکل ۶۰ دارای این خاصیت است . ولی دایره نسبت به محور x یا مبداء متقارن نیست . بنابراین ، به خاطر (یک) و (دو) ، هیچیک از معادلات

$$F(r, -\theta) = 0, \qquad F(-r, \pi - \theta) = 0, \qquad F(-r, \theta) = 0, \qquad F(r, \pi + \theta) = 0$$

همان مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $F(r, \theta) = 0$ را ندارد، و این مطلب را می‌توان مستقیماً تحقیق کرد .

مثال ۷. تابع

$$r = \sin 2\theta \tag{۸}$$

را رسم کنید .

حل . ابتدا تقارنها را جستجو می‌کنیم . با نوشتن (۸) به شکل معادل

$$F(r, \theta) = r - \sin 2\theta = 0, \tag{۸'}$$

به آسانی معلوم می‌شود که

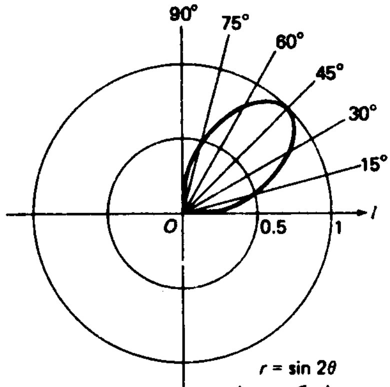
$$F(-r, \pi - \theta) \equiv -F(r, \theta), \qquad F(r, \pi + \theta) \equiv F(r, \theta), \qquad F(-r, -\theta) \equiv -F(r, \theta)$$

(جزئیات را شرح دهید) . از آزمونهای (یک) تا (سه) معلوم می‌شود که نمودار (۸') نسبت به هر دو محور مختصات و مبداء متقارن است . با استفاده از جدول

(درجه) θ	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
$r = \sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

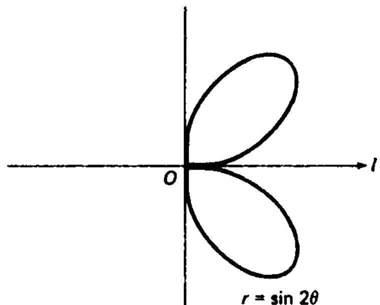
چند نقطه از نمودار را رسم کرده و آنها را با منحنی همواری به هم وصل می‌کنیم . با این کار حلقهٔ بستهٔ شکل ۶۴ (آ) به دست می‌آید ، که فقط بخشی از نمودار است . اما بقیهٔ نمودار را می‌توان با استفاده از تقارن نمودار فوراً به دست آورد . در واقع ، از انعکاس منحنی شکل ۶۴(آ) نسبت به محور x ، منحنی شکل ۶۴(ب) به دست می‌آید ، وازانعکاس این منحنی نسبت‌به‌محور y ، منحنی گل مانند شکل ۶۴(پ) ، به نام *رز چهار پر*،به‌دست می‌آید که نمودار کامل تابع (۸) است . (چه جفتهای دیگر از انعکاسهای متوالی می‌تواند گل را از پر قسمت (آ) شکل تولید کند؟) به عنوان تمرین ، نشان دهید که سه پر بعد که با افزایش θ از $90°$ تا 360 رسم می‌شوند پرهایی در ربعهای چهارم ، سوم ، و دوم می‌باشند،

و این در شکل ۶۴(پ) با سر سهم نموده شده است .



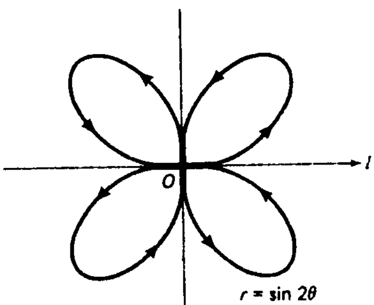
(فقط یک پر)

(آ)



(فقط دو پر)

(ب)



(نمودار کامل)

(پ)

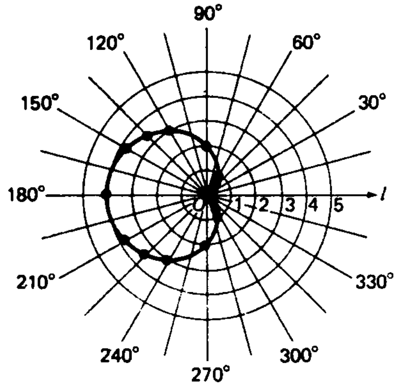
شکل ۶۴

مثال ۸. تابع

$$r = 2(1 - \cos\theta) \qquad (۹)$$

را رسم کنید .

حل . معادلهٔ (۹) درصورت تعویض θ با $-\theta$ تغییر نمی‌کند . لذا ، طبق آزمون (یک) ، نمودار (۹) نسبت به محور قطبی l متقارن است . با استفاده از این تقارن و جدول زیر (توجه کنید که به ازای هر θ ، $0 \geq r$) ، معلوم می‌شود که نمودار (۹) منحنی‌قلب شکل شکل ۶۵ است ، که به **دلگون** معروف بوده و قبلا "در مسئلهٔ ۲۷ ،صفحهٔ ۷۴۹ ، آمده است .



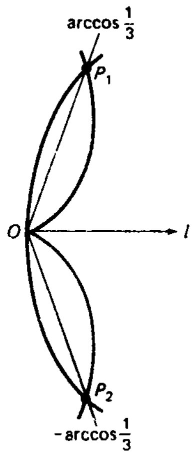
نمودار قطبی $r = 2(1 - \cos\theta)$

شکل ۶۵

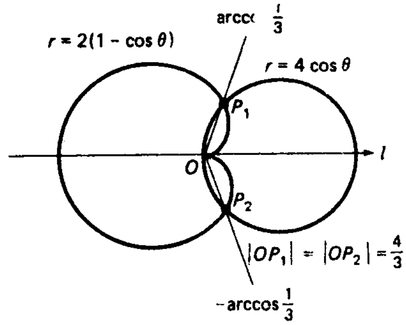
θ (درجه)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 2(1-\cos\theta)$	0	$2-\sqrt{3}$ ≈ 0.27	$2-\sqrt{2}$ ≈ 0.59	1	2	3	$2+\sqrt{2}$ ≈ 3.41	$2+\sqrt{3}$ ≈ 3.73	4

مثال ۹ . نقاط اشتراک دایرهٔ $r = 4\cos\theta$، که درمثال ۵ مطرح شد ، ودلگون $r = 2(1-\cos\theta)$ که در مثال ۸ درنظر گرفته شد ، را بیابید .

حل . در شکل ۶۶ (آ) دومنحنی را دریک دستگاه مختصات قطبی رسم کرده‌ایم . از این شکل ، همراه با شکل ۶۶ (ب) که سه‌بار بزرگ‌شده‌دایره و دلگون را در مجاورت مبداء نشان‌می‌دهد،



(ب)



(آ)

شکل ۶۶

معلوم می‌شود که دو منحنی دقیقاً سه نقطهٔ اشتراک دارند، مبداء یا نقطهٔ O و دو نقطهٔ P_1 و P_2 که نسبت به محور قطبی l متقارنند (درنتیجه، هر یک از نقاط نقش دیگری تحت انعکاس نسبت به l است). برای یافتن مختصات قطبی برای P_1 و P_2، ملاحظه می‌کنیم هرگاه $r = 4\cos\theta$ و $r = 2(1-\cos\theta)$ باهم برقرار باشند، آنگاه

$$4\cos\theta = 2(1-\cos\theta), \tag{۱۰}$$

یا معادلاً

$$\cos\theta = \frac{1}{3}, \tag{۱۰َ}$$

که‌ایجاب می‌کندکه $r = \frac{4}{3}$ دومقدار θی صادق‌در (۱۰َ) عبارتنداز $\theta = \pm\arccos\frac{1}{3} \approx \pm 70.5°$، و این مقادیر نظیر نقاط واقع بر دو طرف مختلف محور قطبی‌اند. به‌علاوه، سایر جوابهای (۱۰َ) با $\theta = \pm\arccos\frac{1}{3}$ به اندازهٔ مضارب صحیح 2π فرق دارند. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که

$$P_1 = (\tfrac{4}{3}, \arccos\tfrac{1}{3}), \qquad P_2 = (\tfrac{4}{3}, -\arccos\tfrac{1}{3}).$$

در مثال قبل، یکی‌از نقاط اشتراک دومنحنی قطبی $r = 4\cos\theta$ و $r = 2(1-\cos\theta)$ یعنی مبداء، در حل معادلهٔ (۱۰) از کف رفت. برای مشاهدهٔ دلیل، دو نقطهٔ متغیر $P = (4\cos\theta, \theta)$ و $P' = (2(1-\cos\theta), \theta)$ را درنظر گرفته، ابتدا دایرهٔ $r = 4\cos\theta$ و بعد دلگون $r = 2(1-\cos\theta)$ را وقتی متغیر θ، که می‌توان آن را زمان گرفت، از 0 تا 2π افزایش یابد، رسم می‌کنیم. در این صورت، وقتی $\theta = \pi/2$ یا $\theta = 3\pi/2$، P به‌مبداء می‌رسد، حال آنکه P' از مبداء شروع شده و تا $\theta = 2\pi$ باز نمی‌گردد. لذا، دو نقطهٔ P و P' هرگز همزمان در مبداء نخواهند بود، اگرچه هر یک مسیری مار بر مبداء را طی می‌کنند؛ لذا، از حل (۱۰) معلوم نمی‌شود که مبداء نقطهٔ اشتراک دو منحنی است.

اشتراک منحنیهای قطبی. لذا، به خلاف حالت دکارتی، ممکن‌است جواب همزمان معادلات‌دو منحنی قطبی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ تمام نقاط اشتراک منحنیها را افشا نکند. این‌بدان‌خاطراست که هر نقطه بی‌نهایت نمایش قطبی‌دارد، هر یک مرکب‌از جفت مختلفی از مختصات قطبی، و ممکن است نقاطی (مانند مبداء در مثال ۹) وجود داشته باشند که یک نمایش آنها در معادلهٔ یک منحنی و دیگری در معادلهٔ منحنی دیگر صدق کند، ولی هیچیک در هر دو منحنی صدق ننماید. برای یافتن نقاط اشتراکی که از حل معادلهٔ $f(\theta) = g(\theta)$ به دست نمی‌آیند، دو منحنی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ را در یک دستگاه مختصات قطبی، درست مثل مثال ۹، درنظر می‌گیریم. در این باب، توجه داشته باشید که خطوط مرکبی، بـه خلاف

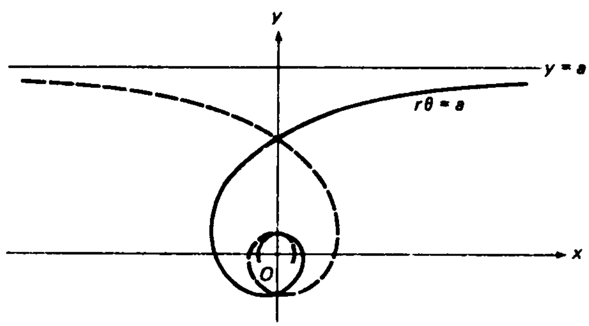
خطوط ریاضی ، پهنای ناصفردارند؛ درنتیجه ، اگر مقیاس ترسیم خیلی کوچک باشد ،نقاط اشتراک تقریبا" منطبق قابل تشخیص نیستند . مثلا" ، در شکل ۶۶(آ) ، اگر شکل خیلی کوچکتر می‌بود ، تشخیص تمایز سه نقطهٔ O ، P_1 ، و P_2 از هم مشکل بود . برای یافتن *تمام* نقاط اشتراک دو منحنی قطبی روشی کاملا" تحلیلی وجود دارد[1] ، ولی هر وقت شک بردید که نقاط اشتراکی خیلی‌نزدیک به‌هم‌وجوددارند ، می‌توانید با رسم شکلهای بزرگتر [مانند شکل ۶۶(ب)] از به کار بردن این روش حذر نمایید .

مثال ۱۰. نمودار معادلهٔ قطبی

$$r\theta = a \qquad (a > 0) \tag{11}$$

را رسم کنید .

حل . به‌ازای r نامنفی ،نمودار (۱۱) منحنی توپر شکل ۶۷ است ، به نام *مارپیچ‌هذلولوی* ، و این نام به خاطر شباهت (۱۱) با معادلهٔ $xy = a$ است که نمایش هذلولی در مختصات



شکل ۶۷

قائم است . به‌آسانی می‌توان ویژگیهای اصلی نمودار را از (۱۱) باتوجه به

$$\lim_{\theta\to 0^+} r = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{a}{\theta} = \infty,$$

---

۱ . *یادآور شویم که منحنیهای* $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ *در نقطهٔ* $(f(\alpha), \alpha)$ *غیراز مبداء متقاطعند اگر و فقط اگر به ازای عدد صحیحی چون* n ، $f(\alpha) = g(\alpha + 2n\pi)$ و $f(\alpha) = -g(\alpha + (2n+1)\pi)$ ، *و منحنیها در مبداء متقاطعند اگر و فقط اگر به ازای* α *و* β *ای* ، $f(\alpha) = g(\beta) = 0$.

و

$$\lim_{\theta\to\infty} r = \lim_{\theta\to\infty}\frac{a}{\theta} = 0$$

به دست آورد . پس نتیجه می‌شود که وقتی θ از مقدار مثبت کوچکی تا ∞ افزایش‌می‌یابد ، نقطهٔ متغیر $P=(r,\theta)$ روی نمودار (۱۱)" از بی‌نهایت‌آمده"وحول مبداٴیا قطب O درجهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌پیچد و ضمن آن r تدریجا" به صفر میل می‌کند؛ در محاسبهٔ r از (۱۱) ، θ باید به رادیان باشد (چرا؟) . مختص y نقطهٔ P عبارت است از

$$y = r\sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\theta},$$

درنتیجه ،

$$\lim_{\theta\to 0^+} y = a\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = a.$$

این ، همراه با این امر که وقتی $\theta\to 0^+$ ، $r\to\infty$ ، نشان می‌دهد که خط $y=a$ یک‌مجانب افقی مارپیچ است (ر.ک. شکل) .

برای یافتن بقیهٔ مارپیچ ،نظیر به مقادیر منفی r و θ ،منعکس‌منحنی توپر را نسبت به محور y به دست می‌آوریم که منحنی منقطع در شکل است . این تقارن حول محور y از $r\theta \equiv (-r)(-\theta)$ به دست می‌آید . چرا خود مبداٴ O تعلق به مارپیچ ندارد ؟

مسائل

در تمام مسائل زیر در رابطه با هر دو مختصات قطبی و قائم ، قطب و محور قطبی دستگاه مختصات قطبی با مبداٴ و محور x نامنفی دستگاه مختصات قائم یکی است .تمام نقاط در مختصات قطبی داده شده‌اند جز در مسائل ۷ تا ۱۲ .

مختصات قائم نقطه به مختصات قطبی داده شده را بیابید .

۱. $(0, \pi^2)$ ۳. $(-8, 2\pi/3)$

۲. $(12, -\pi/6)$ ۴. $(2, 5\pi/6)$

۵. $(-10, -3\pi/2)$ ۶. (π, π)

تمام نمایشهای نقطه به مختصات‌قائم داده‌شده را در مختصات قطبی (به انضمام آنهایی که r منفی دارند) پیدا نمایید .

۷. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ۸. $(1, -\sqrt{3})$

۹. $(2\sqrt{3}, 2)$ ۱۰. $(0, 4)$

۱۱. $(-3, 0)$ ✓ ۱۲. $(-\pi, \pi)$ ✓

۱۳. نقاط $A = (3, -4\pi/9)$ و $B = (5, 3\pi/14)$ دو رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ اند که اقطارش در قطب متقاطعند. دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع را بیابید.

۱۴. نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین نقاط $(8, -2\pi/3)$ و $(6, \pi/3)$ را بیابید.

۱۵. نشان دهید که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (r_1, \theta_1)$ و $P_2 = (r_2, \theta_2)$ مساوی است با

$$|P_1P_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}. \quad \text{(یک)}$$

با استفاده از فرمول (یک)، فاصلهٔ بین نقاط زیر را بیابید.

۱۶. $(5, -\pi/12), (8, \pi/4)$ ✓ ۱۷. $(12, 3\pi/4), (-16, 5\pi/4)$ ✓

۱۸. مساحت هر یک از مربعهایی را بیابید که نقاط $(12, -\pi/10)$ و $(3, \pi/15)$ دو رأس مجاورشان باشند.

۱۹. مساحت مربعی را بیابید که نقاط $(6, -105°)$ و $(4, 30°)$ دو رأس مقابل آن باشند.

۲۰. فرض کنید O قطب بوده، و $P_1 = (r_1, \theta_1)$, $P_2 = (r_2, \theta_2)$، که در آنها r_1, r_2 مثبت بوده و $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$. نشان دهید که مساحت مثلث OP_1P_2 مساوی است با $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$. مساحت مثلث به رئوس O، $P_1 = (5, \pi/3)$، و $P_2 = (10, 7\pi/12)$ را بیابید.

۲۱. ✓ نشان دهید که معادلهٔ قطبی دایره به شعاع a و مرکز (r_1, θ_1) عبارت است از

$$r^2 - 2r_1r \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = a^2. \quad \text{(دو)}$$

۲۲. ✓ با استفاده از فرمول (دو)، تحقیق کنید که دوایر شکلهای ۶۰ و ۶۱ به معادلات قطبی $r = 4 \sin \theta$ و $r = 4 \cos \theta$ می‌باشند. این معادلات را با استفاده از این امر که هر مثلث محاطی در یک دایره که یکی از اضلاعش قطر باشد قائم‌الزاویه است نیز تحقیق نمایید.

معادلهٔ قطبی دایره با شعاع و مرکز داده شده را بیابید.

۲۳. $3, (6, \pi/4)$ ✓ ۲۴. $4, (-4, \pi/3)$ ✓ ۲۵. $\sqrt{5}, (2, \pi/2)$ ✓

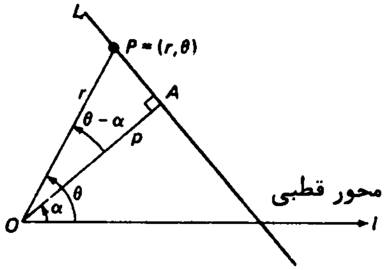
۲۶. فرض کنید L خط مستقیمی باشد که از قطب O نمی‌گذرد. نشان دهید که معادلهٔ قطبی L عبارت است از

$$r \cos(\theta - \alpha) = p, \quad \text{(سه)}$$

که در آن p طول و α میل عمود مرسوم از O به L است (ر.ک. شکل ۶۸). معادلهٔ دکارتی معادل (سه) چیست؟

معادلهٔ دکارتی داده شده را در مختصات قطبی بنویسید.

۲۷. $y = x$ ✓ ۲۸. $3x + 4y = 5$ ✓



شکل ۶۸

۲۹. $x^2+y^2=9$ ۳۰. $x^2-y^2=4$

۳۱. $x^2+y^2-ax=0$ ۳۲. $x^2+y^2+ay=0$

۳۳. $y^2=4x$ ۳۴. $2xy=1$

۳۵. $x^2-y^2=(x^2+y^2)^2$ ۳۶. $x^4=9(x^2+y^2)$

معادلهٔ قطبی داده شده را در مختصات قائم نوشته، و نمودار آن را شناسایی کنید.

۳۷. $\theta=\pi$ ۳۸. $r\sin\theta=3$

۳۹. $r\cos\theta=-2$ ۴۰. $\sin\theta=\frac{1}{2}$

۴۱. $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=6$ ۴۲. $r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

۴۳. $r=-\sin\theta$ ۴۴. $r=8\cos\theta$

۴۵. $r^2\sin 2\theta=4$ ۴۶. $r=2(\cos\theta-\sin\theta)$

منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r=a\sin(n\theta+\phi)\quad(a>0\text{، }\phi\text{ دلخواه، }n=2,3,\ldots)$$

یک رز نام دارد (برای تحلیل رز $r=\sin 2\theta$ نظیر به انتخاب $a=1,\phi=0,n=2$ ، ر. ک. مثال ۷). رز با معادلات زیر را رسم نمایید.

۴۷. $r=4\sin 3\theta$ ۴۸. $r=2\cos 4\theta$

۴۹. $r=\cos 6\theta$ ۵۰. $r=\sin(5\theta+\pi)$

توجه کنید که رز n پر دارد اگر n فرد باشد و $2n$ پر دارد اگر n زوج باشد. منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r=a+b\cos(\theta+\phi)\quad(a>0\text{، }b>0\text{، }\phi\text{ دلخواه})$$

یک *لیماسون* خوانده می‌شود. اگر $a=b$ ، لیماسون به دلگون تحویل می‌شود (برای تحلیل دلگون $r=2(1-\cos\theta)$ نظیر به‌انتخاب $a=b=2,\phi=\pi$ ، ر. ک. مثال ۸) لیماسون به

معادلهٔ زیر را رسم نمایید .

۵۱. $r = 3 + 2\cos\theta$

۵۲. $r = 3 - \sin\theta$

۵۳. $r = 1 + 2\cos\theta$

۵۴. $r = 2 + 3\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

معادلهٔ قطبی داده شده را با استفاده از تقارنها رسم کنید .

۵۵. $r^2 = 4\cos 2\theta$ (لمنیسکات)

۵۶. $r^2 = -\sin 2\theta$ (لمنیسکات)

۵۷. $r = \sin\theta\tan\theta$ (سیزوئید)

۵۸. $r = \cot\theta$ (منحنی کاپا)

۵۹. $r = 1 + 2\sin(\theta/2)$ (کلیه گون)

۶۰. $r = \sec\theta - 4\cos\theta$ (سه بخشی)

۶۱. $r = 2\theta$ (مارپیچ ارشمیدسی : شکل کلی $r = a\theta$)

۶۲. $r = e^{\theta/10}$ یا معادلا " $\ln r = \theta/10$ (مارپیچ لگاریتمی : شکل کلی $r = e^{a\theta}$)

۶۳. $r^2 = \theta$ (مارپیچ سهموی : شکل کلی $r^2 = a^2\theta$)

۶۴. $r^2\theta = 1$ (لیتوس، واژهٔ لاتینی " شیپور " : شکل کلی $r^2\theta = a^2$)

در مسائل ۶۱ تا ۶۴ ،قسمتی‌از مارپیچ که در آن $r > 0, \theta > 0$ با منحنی‌توپر ، وبقیهٔ‌مارپیچ را با منحنی منقطع رسم کنید .

تمام نقاط‌اشتراک جفت داده شده از منحنیهای قطبی زیر را بیابید .

۶۵. $\theta = \pi/4, r = \theta$

۶۶. $r = 1 + \cos\theta, r = 1 - \cos\theta$

۶۷. $r = 1 + \sin\theta, r = 1 - \cos\theta$

۶۸. $r = 2\cos 3\theta, r = 1$

۶۹. $r = \sin 2\theta, r = \cos\theta$

۷۰. $r = \sin\theta\ \ r = |\cos\theta|$

۷۱. $r^2 = \sin 2\theta, r^2 = \cos 2\theta$

۷۲. $r\theta = 2, r = 1$

۸.۱۰ مخروطیها در مختصات قطبی

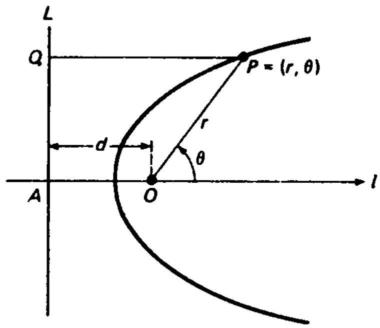
همانطور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد ، مختصات قطبی برای نوشتن معادلات مخروطیهای تباه نشده بسیار مناسب‌اند .

قضیهٔ ۲ (معادلهٔ قطبی یک مخروطی) . *مخروطی با خروج از مرکز e و فاصلهٔ کانون تا هادی d دارای معادلهٔ*

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \tag{۱}$$

در مختصات قطبی است اگر قطب O در کانون و محور قطبی بر هادی L عمود و جهتی به خارج از L داشته باشد .

برهان . درحالت بیضی یا هذلولی ، دو هادی وجود داشته و L هادی نزدیکتر به کانـون است . هندسهٔ مربوطه در شکل ۶۹ نموده شده است ، که در آن هادی سمت چپ کانون



شکل ۶۹

قرار دارد . بنابر قضیهٔ ۱ ، صفحهٔ ۹۷۶ ، داریم

$$\frac{|OP|}{|PQ|} = \frac{r}{|PQ|} = e. \tag{۲}$$

اما

$$|PQ| = |AO| + r\cos\theta = d + r\cos\theta,$$

درنتیجه ، (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$r = e(d + r\cos\theta).$$

با حل این معادله نسبت به r ، فرمول (۱) به دست می‌آید .

مثال ۱ . مخروطی به معادلهٔ قطبی

$$r = \frac{9}{5 - 4\cos\theta} \tag{۳}$$

را شناسایی کنید .

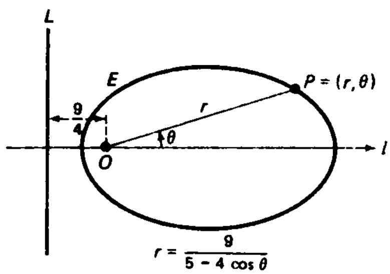
حل . با نوشتن (۳) به شکل

$$r = \frac{\frac{9}{5}}{1 - \frac{4}{5}\cos\theta}, \qquad (۳')$$

و سپس مقایسهٔ (۳') با (۱) ، معلوم می‌شود که

$$e = \frac{4}{5}, \qquad ed = \frac{4}{5}d = \frac{9}{5}, \qquad d = \frac{9}{4}.$$

چون $e < 1$ ، مخروطی بیضی است؛ و در واقع ، با رسم معادلهٔ (۳) ، بیضی E شکل ۷۰ به دست می‌آید که کانونی در قطب O و هادی L را داشته و فاصلهٔ کانون تا هادی آن $\frac{9}{4}$ است. توجه کنید که معادلهٔ قطبی L مساوی است با $r\cos\theta = -\frac{9}{4}$ یا معادلا" $r = -\frac{9}{4}\sec\theta$.



شکل ۷۰

برای به دست آوردن معادلهٔ دکارتی بیضی E ، فرض کنیم محور اطول به طول $2a$ و فاصلهٔ بین کانونها $2c$ باشد . در این صورت ، بنابر فرمول (۸) ، صفحهٔ ۹۷۴ ، $e = c/a$ و

$$d = \frac{a^2}{c} - c,$$

لذا ،

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}, \qquad \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{9}{4},$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$a = 5, \qquad c = 4, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9} = 3,$$

که در آن $2b$ طول محور اقصر است . لذا ، E در دستگاه مختصات قائم به مبداء در مرکز E و

محور x در امتداد محور اطول به معادلهٔ زیر می‌باشد:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

این معادله در دستگاه مختصات‌قائم که مبداء آن در کانون چپ است به‌صورت‌زیرمی‌باشد:

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

(چرا؟) . به‌عنوان تمرین، این معادله را با جانشانیهای $r\cos\theta=x$ و $r^2=x^2+y^2$ مستقیما" از معادلهٔ (۳) به دست آورید.

مثال ۲. برای هذلولی به معادلهٔ دکارتی

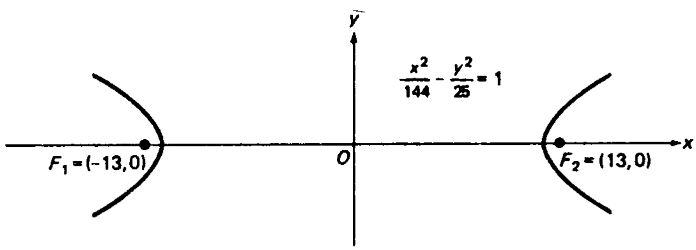
$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1 \qquad (۴)$$

معادلهٔ قطبی بنویسید.

حل. فرض کنیم $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج باشد. در این صورت،

$$a=12,\qquad b=5,\qquad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{169}=13,$$

که در آن $2c$ فاصلهٔ بین‌کانونهای F_1 و F_2 است، که برمحور x قرار دارند (ر.ک. شکل۷۱).



شکل ۷۱

مثل قبل، خروج از مرکز مساوی‌است‌با $e=c/a$ ، ولی در اینجا، طبق فرمول (۸́)، صفحهٔ ۹۷۴، فاصلهٔ بین کانون و هادی مساوی است با

$$d=c-\frac{a^2}{c}.$$

بنابراین،

$$e=\frac{13}{12},\qquad d=13-\frac{144}{13}=\frac{25}{13},$$

درنتیجه، هذلولی به معادلهٔ قطبی

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} = \frac{\frac{25}{12}}{1 - \frac{13}{12}\cos\theta},$$

یا معادلا"

$$r = \frac{25}{12 - 13\cos\theta} \qquad (۵)$$

است. به‌طوردقیقتر، نمودار(۵) شاخهٔ راست هذلولی (۴) است اگر $\theta_0 < |\theta| \le \pi$، که در آن $\theta_0 = \arccos\frac{12}{13} \approx 22.6°$. هرگاه $0 \le |\theta| < \theta_0$، آنگاه $r < 0$ و نمودار (۵) شاخهٔ چپ می‌باشد (شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم). در هر دو حالت، قطب در کانون راست F_2 است، و محور قطبی در امتداد محور x مثبت می‌باشد.

صورتهای مختلف معادلهٔ قطبی یک مخروطی. در معادلهٔ (۱) θ را با $\theta - \alpha$ عوض کرده به دست می‌آوریم

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}. \qquad (۶)$$

در این صورت، نمودار (۶) یک مخروطی است که محور اطول، محور متقاطع، یا محور تقارنش (بسته به اینکه مخروطی بیضی، هذلولی، یا سهمی است) به جای محور قطبی $\theta = 0$، در امتداد خط $\theta = \alpha$ قرار دارد. بخصوص، نمودارهای معادلات

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}, \quad r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}, \quad r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta} \qquad (۶')$$

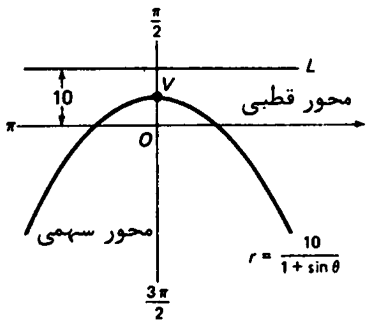
همه مخروطی‌اند،زیرا اینها معادلاتی‌هستندکه از (۶) با قرار دادن $\alpha = \pi, \pi/2, -\pi/2$ به دست می‌آیند. به طور مشخص، اولین معادله یک مخروطی را توصیف می‌کند که هادیش بر محور قطبی عمود بوده و d واحد به *راست* کانون قرار دارد، حال آنکه معادلات دوم و سوم مخروطیهایی را توصیف می‌کنند که هادیهایشان موازی محور قطبی و به ترتیب d واحد زیر کانون و d واحد بالای آن قراردارند.

مثال ۳. معادلهٔ قطبی سهمیی را بنویسید که فاصلهٔ کانون تا هادی آن ۱۰ بوده، محور تقارن قائم داشته، و به پایین باز شود.

حل. با گذاردن $e = 1, d = 10$ درآخرین معادلهٔ (۶′)، به دست می‌آوریم

$$r = \frac{10}{1 + \sin\theta}.$$

نمودار این معادله سهمی شکل ۷۲ است . رأس V سهمی نقطهٔ $(5, \pi/2)$ است ، ولی‌هادی L به معادلهٔ قطبی $r \sin \theta = 10$ یا معادلا" $r = 10 \csc \theta$ می‌باشد .



شکل ۷۲

مسائل

مخروطی با معادلهٔ قطبی داده شده را شناسایی و رسم کنید . خروج از مرکز e را بیابید ، جای رئوس را مشخص‌کنید ،و معادلهٔ قطبی هادی L نظیر به کانون در قطب O را بنویسید .

۱ . $r = \dfrac{5}{1 + \cos \theta}$

۲ . $r = \dfrac{4}{3 - 2 \cos \theta}$

۳ . $r = \dfrac{6}{2 - 3 \sin \theta}$

۴ . $r = \dfrac{12}{3 - 4 \cos \theta}$

۵ . $r = \dfrac{9}{4 + 3 \sin \theta}$

۶ . $r = 4 \csc^2 \dfrac{\theta}{2}$

۷ . $r = \dfrac{10}{1 + 2 \cos \theta}$

۸ . $r = \dfrac{8}{2 - \cos \theta + \sin \theta}$

۹ . $r = \dfrac{20}{2 - \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}$

معادلهٔ قطبی مخروطی با معادلهٔ‌دکارتی داده‌شده را نوشته ، قطب را در یک کانون‌ومحور قطبی را در امتداد محور x مثبت قرار دهید .

۱۰ . $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

۱۱ . $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

۱۲ . $4x^2 - y^2 = 1$

۱۳ . $y^2 = 6x$

۱۴. $2xy = 1$ ۱۵. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$

با این فرض که قطب در یک‌کانون است ، معادلهٔ قطبی مخروطی صادق در شرایط داده‌شده را بنویسید (e خروج از مرکز است) .

۱۶. رئوس در $(6, 0)$ و $(2, \pi)$

۱۷. رئوس در $(1, \pi/2)$ و $(5, \pi/2)$

۱۸. $e = 1$ ، رأس در $(2, \pi/4)$

۱۹. $e = \frac{2}{3}$ ، رأس در $(3, -\pi/2)$

۲۰. $e = \frac{3}{4}$ ، هادی $r = 2\csc\theta$

۲۱. $e = \frac{4}{3}$ ، هادی $r = 6\sec\theta$

۲۲. فرض کنید $r = ed/(1 - e\cos\theta)$ معادلهٔ قطبی یک هذلولی باشد. در این صورت ، مخرج به ازای $\theta = \theta_0 = \arccos(1/e)$ صفر است. چه رابطه‌ای θ_0 با مجانبهای هذلولی دارد ؟

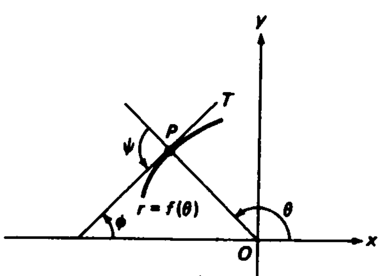
۲۳. یک ستارهٔ دنباله‌دار در مداری بیضوی با خروج از مرکز بالا $(e \approx 1)$ که خورشید در یکی از کانونهایش قرار دارد حرکت می‌کند. وقتی ستاره از یک نقطه به فاصلهٔ 50 میلیون میل به حضیض (نزدیکترین نقطه به خورشید) حرکت می‌کند، خط واصل بین خورشید و ستاره $45°$ می‌چرخد. فاصلهٔ ستاره تا خورشید را درحضیض بیابید.

۹.۱۰ خط مماس بر یک منحنی قطبی

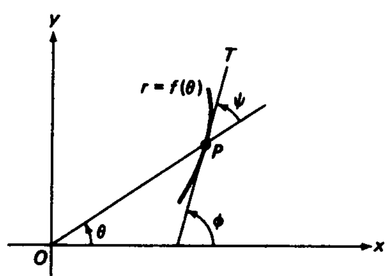
حال مسئلهٔ یافتن خط مماس بریک‌منحنی‌قطبی را مطرح می‌کنیم . علاوه‌بر دستگاه مختصات قطبی زمینه ، مختصات قائمی معرفی می‌کنیم که قطب O مبداء و محور قطبی محور x مثبت باشد . فرض کنیم منحنی نمودار تابع مشتقپذیر

$$r = f(\theta)$$

بوده ، و مماس بر منحنی در نقطهٔ P خط میل ϕ $(0 \le \phi < \pi)$ ، مثل شکل ۷۳ ، باشد . در



(ب)



(آ)

شکل ۷۳

این صورت ، شیب T مساوی است با

$$m = \tan\phi = \frac{dy}{dx}.$$

ما ، علاوه‌بر زاویهٔ میل ϕ ،به‌زاویهٔ شعاعی— مماسی ψ (پسی‌کوچک یونانی) علاقه‌مندیم . این زاویهٔ بین ادامهٔ خط شعاعی OP و مماس T است‌که‌از OP تا T در جهت خلاف‌عقربه‌های ساعت سنجیده شده و در بازهٔ $\pi > \psi \leq 0$ گرفته می‌شود .

ارتباط بین ϕ, ψ و مختص زاویهٔ θ با فرمول زیر داده می‌شود :

$$\phi = \psi + \theta, \tag{۱}$$

که می‌توان آن را از شکل ۷۳ (آ) به دست آورد . در اینجا فرض است که ϕ زاویهٔ بیرونی مثلثی است با زوایای حاده که به محور x ، مماس T ، و خط شعاعی OP محدود است ، و θ یک زاویهٔ درونی آن می‌باشد (لذا ، بخصوص، $\phi > \theta > 0$) ، ولی البته حالات دیگری نیز وجود دارند . اما به‌آسانی معلوم می‌شود که (۱) و فرمول معادلش

$$\psi = \phi - \theta \tag{۱'}$$

همواره با تقریب مضرب صحیحی از π برقرارند [مثلاً "،درشکل ۷۳ (ب) ، $\phi = \psi + \theta - \pi$] بنابراین ، چون تابع تانژانت متناوب با دورهٔ تناوب π است ، همواره خواهیم داشت

$$\tan\psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi\tan\theta}, \tag{۲}$$

درنتیجه ، در تمام حالات فرمول یکسانی برای $\tan\psi$ برحسب $\tan\phi$ و $\tan\theta$ بــه دست می‌آید .

حال ملاحظه می‌کنیم که نقطهٔ $P = (r, \theta)$ دارای مختصات قائم

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{۳}$$

است و نیز داریم

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{۴}$$

با گذاردن $r = f(\theta)$ در (۳) ، به دست می‌آوریم

$$x = x(\theta) = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = y(\theta) = f(\theta)\sin\theta. \tag{۵}$$

این یک نمایش پارامتری‌منحنی موردبحث‌است ،که درآن مختص زاویه‌ای θ پارامتر می‌باشد. لذا ، طبق نکاتی که در صفحات ۷۳۱ تا ۷۳۴ گفته شد ،

$$m = \tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}. \tag{۶}$$

با گذاردن (۴) و (۶) در (۲)، خواهیم داشت

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{dy}{dx}\dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\dfrac{y}{x}} = \frac{x\dfrac{dy}{d\theta} - y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta} + y\dfrac{dy}{d\theta}}.$$

اما مشتق توابع (۵) عبارتنداز

(۷) $$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

و درنتیجه ،

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} &= r\cos\theta\,[f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta] \\ &\quad - r\sin\theta\,[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta] \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,rf(\theta) = rf(\theta), \end{aligned}$$

حال آنکه

$$\begin{aligned} x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} &= r\cos\theta\,[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta] \\ &\quad + r\sin\theta\,[f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta] \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,rf'(\theta) = rf'(\theta). \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\tan\psi = \frac{rf(\theta)}{rf'(\theta)} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)},$$

یعنی ،

(۸) $$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{r}{r'},$$

مشروط براینکه $dr/d\theta \neq 0$. سادگی این فرمول برای $\tan\psi$ در مقایسه با فرمول شیب T ، یعنی

$$\tan\phi = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta},$$

یا معادلا"

(۹) $$\tan\phi = \frac{(dr/d\theta)\sin\theta + r\cos\theta}{(dr/d\theta)\cos\theta - r\sin\theta},$$

حاصل از جانشانی (۷) در (۶) اعجاب آور است .

مثال ۱ . زوایای ψ و ϕ را در نقاط $P = (1, 0)$ و $Q = (3/2, \pi/6)$ از دلگون $r = 1 + \sin\theta$ بیابید .

حل . در اینجا $dr/d\theta = \cos\theta$ ، و فرمول (۸) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$$

بنابراین ،

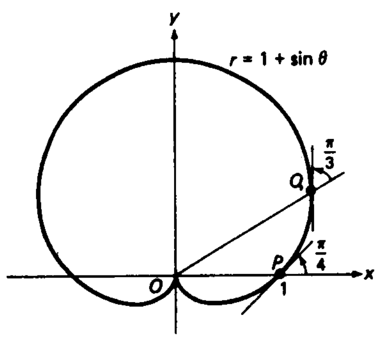
$$\tan\psi|_{\theta=0} = 1, \qquad \tan\psi|_{\theta=\pi/6} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2(\frac{3}{2})}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\psi|_{\theta=0} = \frac{\pi}{4}, \qquad \psi|_{\theta=\pi/6} = \frac{\pi}{3}$$

(ر.ک. شکل ۷۴) . در P و Q داریم $0 \le \theta < \phi$ ؛ و درنتیجه ، $\phi = \psi + \theta$. پس نتیجه می‌شود که

$$\phi|_{\theta=0} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}, \qquad \phi|_{\theta=\pi/6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$



شکل ۷۴

لذا ، مماس در P به شیب 1 است ولی مماس در Q قائم می‌باشد . به‌آسانی معلوم می‌شود که مماس در P خط $y = x - 1$ است ، ولی مماس در Q خط $x = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ می‌باشد .

مثال ۲ . نشان دهید که مارپیچ لگاریتمی

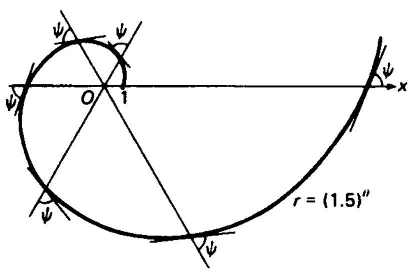
$$r = e^{a\theta} \qquad (\theta \ge 0, a > 0)$$

متساوی‌الزاویه است ، بدین معنی که زاویهٔ ψ بین خط شعاعی و مماس در تمام نقاط مارپیچ یکسان است .

حل . چون $dr/d\theta = ae^{a\theta}$ ، داریم

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{e^{a\theta}}{ae^{a\theta}} = \frac{1}{a},$$

درنتیجه ، $\psi \equiv \operatorname{arccot} a$. شکل ۷۵ متساوی‌الزاویه بودن را در حالت $a = \ln \frac{3}{2}$ ، $r = (\frac{3}{2})^\theta$ ، $\psi \equiv \operatorname{arccot} (\ln \frac{3}{2}) \approx 67.9°$ نشان می‌دهد .



مارپیچ لگاریتمی

شکل ۷۵

مثال ۳ . میل ϕ مماس بر مارپیچ ارشمیدسی

$$r = a\theta \qquad (\theta \geq 0,\ a > 0)$$

را در نقطهٔ $P = (a\pi/2, \pi/2)$ بیابید .

حل . این بار $dr/d\theta = a$ و ، با استفاده از فرمول (۹) ، مستقیما" داریم

$$\tan \phi = \frac{a \sin \frac{\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{a \cos \frac{\pi}{2} - \frac{a\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi},$$

درنتیجه ،

$$\phi = \arctan\left(-\frac{2}{\pi}\right) + \pi \approx 147.5°$$

(چرا π اضافه می‌کنیم ؟) توجه کنید که ϕ از ثابت a مستقل است . به روش دیگر ، بنابر

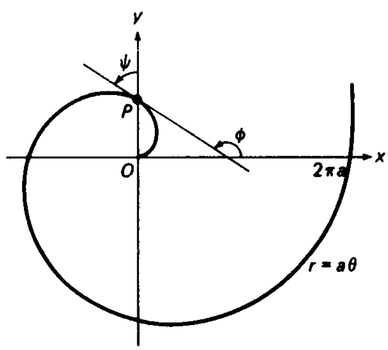
(۸) ،

$$\tan\psi = \frac{a\pi/2}{a} = \frac{\pi}{2},$$

و درنتیجه ،

$$\psi = \arctan\frac{\pi}{2} \approx 57.5°, \qquad \phi = \psi + \theta = \arctan\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 147.5°$$

(ر.ک. شکل ۷۶) . معادل بودن دو عبارت برای ϕ از فرمول (۱۶) ، صفحهٔ ۴۷۶ ، به دست می‌آید . به عنوان تمرین ، نشان دهید که خط مماس در P دارای معادلهٔ $4x + 2\pi y - a\pi^2 = 0$ است .



مارپیچ ارشمیدسی

شکل ۷۶

مسائل

برای منحنی قطبی داده شده در نقطهٔ مشخص شدهٔ P ، ابتدا $\tan\psi$ و سپس زوایای ψ و ϕ را بیابید .

۱ . $r = 6\cos\theta,\ P = (3, \pi/3)$

۲ . $r = 8\sin\theta,\ P = (4, \pi/6)$

۳ . $r = \sin 2\theta,\ P = (1/\sqrt{2}, \pi/8)$

۴ . $r = \sqrt{2}\,|\cos\theta|,\ P = (1, 3\pi/4)$

۵ . $r = 3\sec^2\theta,\ P = (4, \pi/6)$

۶ . $r = 1 + 2\sin(\theta/2),\ P = (1, 4\pi)$

۷ . $r = 2 - \cos\theta,\ P = (2, 3\pi/2)$

۸. $r = 3\cot\theta,\ P = (\sqrt{3}, \pi/3)$

۹. $r = \dfrac{5}{1-\cos\theta},\ P = (5, \pi/2)$

۱۰. $r = \dfrac{3}{\sqrt{2}+\cos\theta},\ P = (\sqrt{2}, \pi/4)$

۱۱. $r = \theta^2/4,\ P = (\pi^2, 2\pi)$

۱۲. $r = \pi/\theta,\ P = (\frac{1}{3}, 3\pi)$

۱۳. منحنی قطبی $r = f(\theta)$ داده شده است، و $f(\theta_0) = 0$. نشان دهید که خط $\theta = \theta_0$ بر این منحنی در قطب مماس است.

۱۴. نشان دهید که دلگون $r = 2(1-\cos\theta)$ بر محور قطبی در قطب مماس است (ر.ک. شکل ۶۵، صفحهٔ ۱۰۰۴).

۱۵. رز سه پر $r = \cos 3\theta$ سه مماس متمایز در قطب دارد. آنها را بیابید.

۱۶. در چه نقاطی از دلگون $r = 1 + \cos\theta$ مماس قائم است؟

۱۷. در چه نقاطی از لمنیسکات $r^2 = \sin 2\theta$ مماس افقی است؟

۱۸. با استفاده از فرمول ($8'$)، نشان دهید که مماس بر یک دایره بر شعاع مرسوم به‌نقطهٔ تماس عمود است.

مثل شکل ۱۷، صفحهٔ ۱۹۷، زاویهٔ $\alpha\ (0 \le \alpha < \pi)$ بین دو منحنی متقاطع T_1 و T_2 مساوی زاویهٔ بین مماسهای C_1 و C_2 در نقطهٔ اشتراک تعریف می‌شود، که از T_1 به T_2 در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود[1].

۱۹. $r = 4\cos\theta$ و $r = 2(1-\cos\theta)$ در $(\frac{4}{3}, \arccos\frac{1}{3})$
(ر.ک. مثال ۹، صفحهٔ ۱۰۰۴).

۲۰. $r = \sin 2\theta$ و $r = \cos\theta$ در $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$

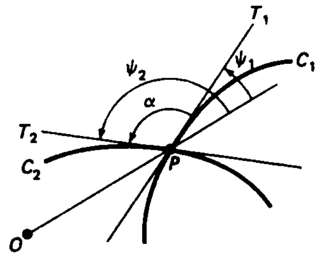
۲۱. $r = 1/(1-\sin\theta)$ و $r = 3/(1+\sin\theta)$ در $(2, \pi/6)$ و $(2, 5\pi/6)$

۲۲. $r^2 = \sin 2\theta$ و $r^2 = \cos 2\theta$ در $(1/\sqrt[4]{2}, \pi/8)$ و $(1/\sqrt[4]{2}, 9\pi/8)$

راهنمایی. با زوایای شعاعی ـ مماسی ψ_1 و ψ_2 نظیر به T_1 و T_2 کار کرده، توجه کنید که $\alpha = \psi_2 - \psi_1$ (ر.ک. شکل ۷۷).

---

۱. به صورت دیگر، زاویهٔ بین C_1 و C_2 را اغلب زاویهٔ کوچکتر بین T_1 و T_2، بی‌توجه به جهت سنجش، تعریف می‌کنند. هرگاه β این زاویه باشد، آنگاه $\beta = \alpha$ اگر $0 \le \alpha \le \pi/2$، ولی $\beta = \pi - \alpha$ اگر $\pi/2 < \alpha < \pi$.



زاویهٔ بین منحنیهای C_1 و C_2
در P مساوی است با $\alpha = \psi_2 - \psi_1$

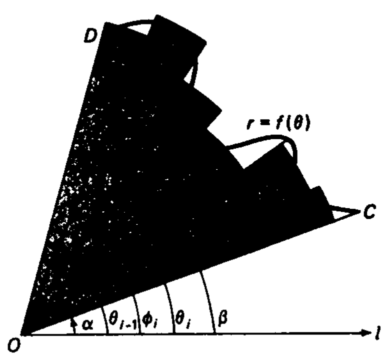
شکل ۷۷

۱۰.۱۰ مساحت در مختصات قطبی ؛ طول یک منحنی قطبی

حال به یافتن مساحت A از ناحیهٔ OCD شکل ۷۸ می‌پردازیم که به شعاع $\theta = \alpha$ ، شعاع $\theta = \beta$ $(\beta > \alpha)$ ، و منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = f(\theta) \qquad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

محدود شده است ، که در آن f پیوسته و نامنفی است . OCD را می‌توان تعمیمی از قطاع مستدیر گرفت که در آن ضلع خمیده دیگر یک قوس مستدیر نیست . چون هندسهٔ مقدماتی

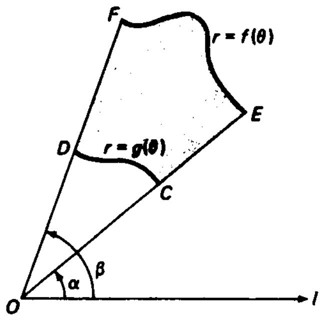


شکل ۷۸

راجع به این نواحی چیزی‌نمی‌گوید ، باید پیش از محاسبهٔ مساحت A **تعریف** مناسبی‌برایش پیدا کنیم . استراتژی ، جز در مواردی جزئی ، همانی است که در تعریف مساحت تحت یک منحنی به معادلهٔ $y = f(x)$ در مختصات قائم به کار رفت (ر.ک. صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹) .

لذا ، با تقسیم بازهٔ $[\alpha, \beta]$ به‌تعداد n بزرگی از زیربازهٔ کوچک به‌وسیلهٔ نقاط تقسیم
$$\alpha = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_n = \beta$$
صادق در نامساویهای
$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$
شروع می‌کنیم . فرض کنیم
$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{۱}$$
و
$$\mu = \max\{\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n\}$$
را ماکزیمم تمام زوایای (۱) می‌گیریم . در این صورت ، شعاعهای $\theta = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ ناحیهٔ OCD را به n برش نازک کیک مانند تقسیم می‌کنند . تابع f پیوسته بوده ، ودرنتیجه اگر $\Delta\theta_i$ به قدر کافی کوچک باشد ، مقدارش در زیربازهٔ $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ تغییر مختصری خواهد کرد . لذا ، اگر f را با مقدار ثابت $f(\phi_i)$ بر $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ بگیریم که ϕ_i نقطهٔ **دلخواهی** از $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ است ، تقریب مناسبی برای آن به دست می‌آید . تعویض $f(\theta)$ با $f(\phi_i)$ برهرزیربازهٔ $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ معادل تعویض برشها به وسیلهٔ قطاعهای مستدیر سایه‌دار در شکل است . مجموع مساحات این قطاعها مساوی است با
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\phi_i)]^2 \Delta\theta_i \tag{۲}$$
(فرمول (۸) ، صفحهٔ ۹۰ ، را به یاد آورید) . معقول آن است که (۲) را تقریب مناسبی به مساحت A ناحیهٔ OCD بگیریم ، که در آن تقریب با کوچک شدن μ بهتر می‌شود . حال باتوجه به این استدلال ، A را حد
$$A = \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\phi_i)]^2 \Delta\theta_i$$
تعریف می‌کنیم ، که چیزی جز انتگرال
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta \tag{۳}$$
نیست . در اینجا ازاین استفاده می‌کنیم که مجموع (۲) یک مجموع ریمان برای f^2 بر $[\alpha, \beta]$ است ، و جود انتگرال از پیوستگی f^2 نتیجه می‌شود ، که به نوبهٔ خود پیوستگی f راایجاب می‌کند .

به‌طورکلی ، وقتی ناحیه مانند ناحیهٔ سایه‌دار $CEFD$ شکل ۷۹ باشد که به دو شعاع $\theta = \alpha, \theta = \beta$ و نمودارهای دو تابع پیوستهٔ $r = f(\theta), r = g(\theta)$ که $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ محدود



شکل ۷۹

شده است ، می‌توان نوشت

$$A = CEFD \text{ مساحت } = (\text{ مساحت } OEF) - (\text{ مساحت } OCD)$$

زیرا نواحی OEF و OCD غیر از مرز مشترکشان CD نقطهٔ دیگری ندارند . اما ، اگر فرمول (۳) را دوبار به کار گیریم ،

$$OEF \text{ مساحت } = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta, \qquad OCD \text{ مساحت } = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\, d\theta,$$

و درنتیجه ،

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\, d\theta,$$

یا معادلا"

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{[f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\}\, d\theta. \qquad (۳')$$

مثال ۱ . مساحت داخل دلگون $r = 1 + \cos\theta$ ، و نیز مساحت خارج این دلگون و داخل دایرهٔ $r = 3\cos\theta$ را بیابید .

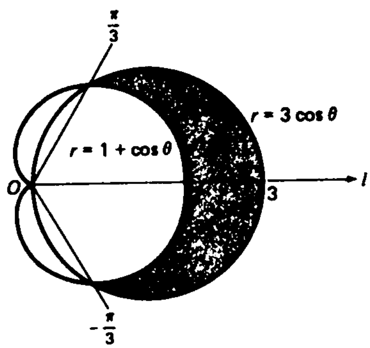
حل . در ناحیهٔ R_1 داخل دلگون [ر.ک. شکل ۸۰ (آ)] ، حدود انتگرالگیری عبارتنداز $\alpha = -\pi, \beta = \pi$ ، و شعاعهای $\theta = \alpha, \theta = \beta$ که ناحیه را دربرمی‌گیرند به یک نقطه ، یعنی قطب O ، " جمع می‌شوند " ، زیرا $r|_{\theta=-\pi} = r|_{\theta=\pi} = 0$. پس از فرمول (۳) نتیجه‌می‌شود که مساحت R_1 مساوی است با

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

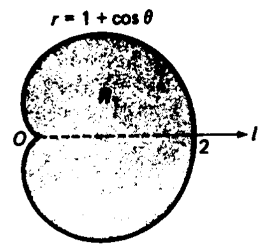
(در مرحلهٔ دوم از تقارن R_1 نسبت به محور قطبی استفاده می‌کنیم) . بنابراین ،

$$A_1 = \left[\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

در مورد ناحیهٔ R_2 خارج دلگون و داخل دایرهٔ $r = 3\cos\theta$ (به شعاع $\frac{3}{2}$) ، حدود انتگرالگیری عبارتند از $\alpha = -\pi/3, \beta = \pi/3$ ، زیرا اینها مختصات زاویه‌ای نقاط اشتراک دلگون و دایره‌اند [ر.ک. شکل ۸۰ (ب)] ، و به علاوه، اگر $-\pi/3 \le \theta \le \pi/3$ ، $3\cos\theta \ge 1+\cos\theta$.



(ب)



(آ)

شکل ۸۰

لذا ، طبق فرمول (۳́) به ازای $f(\theta) = 3\cos\theta, g(\theta) = 1+\cos\theta$ ، $\alpha = -\pi/3, \beta = \pi/3$ مساحت R_2 مساوی است با

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}[(3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2]\,d\theta = \int_0^{\pi/3}(8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/3}\left(8\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta - 1\right)d\theta = \int_0^{\pi/3}(4\cos 2\theta - 2\cos\theta + 3)\,d\theta$$

(مجدداً " از تقارن R_2 نسبت به محور قطبی استفاده می‌کنیم) . بنابراین ،

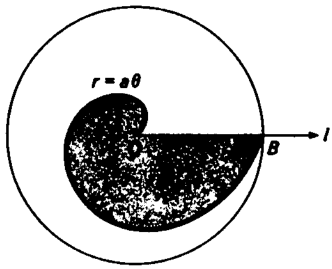
$$A_2 = \left[2\sin 2\theta - 2\sin\theta + 3\theta\right]_0^{\pi/3} = 2\sin\frac{2\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} + \pi = \pi,$$

که $\frac{4}{9}$ مساحت $(\frac{3}{2})^2\pi = \frac{9}{4}\pi$ محدود به فقط دایره است .

مثال ۲ . مساحت A ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۸۱ محدود به محور قطبی l و " دور "اول مارپیچ ارشمیدسی

$$r = a\theta \qquad (\theta \geq 0, a > 0).$$

یعنی بخشی از مارپیچ که نظیر به بازهٔ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است ، را بیابید .



شکل ۸۱

حل . در اینجا $\alpha = 0$ ، $\beta = 2\pi$ ، و

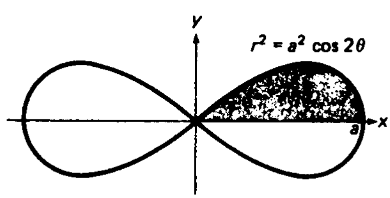
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{6}\, a^2\theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\, \pi^3 a^2.$$

توجه کنید که A یکسوم مساحت محدود به دایرهٔ ذکر شده به شعاع $|OB| = 2\pi a$ است .

مثال ۳ . مساحت A محصور به لمنیسکات

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \qquad (a > 0) \qquad (۴)$$

نموده شده در شکل ۸۲ را بیابید .



لمنیسکات

شکل ۸۲

حل . ابتدا با قرار دادن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ در (۴) ، آن را بـه مختصات قطبی

تبدیل می‌کنیم . این کار نتیجه می‌دهد که

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad \text{یا} \quad r^4 = a^2r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

(تقسیم بر r^2 را توجیه کنید) . لمنیسکات نسبت به هر دو محور x و y متقارن است ؛ و لذا ، مساحت کل A محصور به لمنیسکات چهار برابر مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل است که در ربع اول بین شعاعهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi/4$ قرار دارد . بنابراین ،

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 \, d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

طول یک منحنی قطبی . حال به یافتن طول یک منحنی قطبی می‌پردازیم . فرض کنیم C یک منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = f(\theta) \qquad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

باشد . در این صورت ، C دارای نمایش پارامتری زیر است :

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \qquad (\alpha \le \theta \le \beta),$$

که در آن مختص زاویه‌ای θ پارامتر بوده ، و می‌توان نظریهٔ طولها را که قبلا "در بخش ۴.۸ ارائه شده به کار برد . در واقع ، هرگاه f به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد ، آنگاه C با طول متناهی و دارای طول

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$

خواهد بود (ر.ک. فرمول (۲) ، ص ۷۴۱) . اما

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta]^2 + [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta]^2$$
$$= [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2,$$

درنتیجه ،

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2} \, d\theta,$$

یا ، به‌طور فشرده‌تر ،

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta. \qquad (۵)$$

مثال ۴ . محیط L دلگون $r = 1 + \cos \theta$ را ، که در شکل ۸۰ (آ) رسم شده ، بیابید .

حل. با استفاده از فرمول (۵) و تقارن دلگون نسبت به محور قطبی، داریم

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$
$$= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 4\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta.$$

اما اگر $0 \le \theta \le \pi$ ، $\cos(\theta/2) \ge 0$ ؛ و لذا،

$$L = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

مثال ۵. طول L اولین دور مارپیچ ارشمیدسی $r = a\theta$ مثال ۲ را بیابید.

حل. با اعمال فرمول (۵)، به کمک فرمول (۶َ)، صفحهٔ ۶۲۹، به دست می‌آوریم

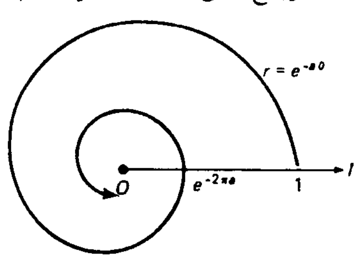
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\, d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta$$
$$= \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2+1})\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})\right] \approx 21.3a.$$

مثال ۶. طول کل مارپیچ لگاریتمی

$$r = e^{-a\theta} \qquad (0 \le \theta < \infty, a > 0)$$

را بیابید.

حل. وقتی θ افزایش می‌یابد، مارپیچ طبق شکل ۸۳ حول قطب O درجهت خلاف عقربه‌های



شکل ۸۳

ساعت می‌چرخد . طول کل L مارپیچ با انتگرال مجازی زیر تعریف می‌شود :

$$L = \int_0^\infty \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^\infty \sqrt{(e^{-a\theta})^2 + (-ae^{-a\theta})^2}\, d\theta$$
$$= \sqrt{1+a^2} \int_0^\infty e^{-a\theta}\, d\theta = \sqrt{1+a^2} \lim_{u\to\infty} \int_0^u e^{-a\theta}\, d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \lim_{u\to\infty} (1 - e^{-au}) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

مثال ۷ . مساحت A سطح حاصل از دوران لمنیسکات $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ حـول محـور x را بیابید (ر.ک. شکل ۸۲) .

حل . بنابر تقارن ، A دوبرابر مساحت سطح حاصل از دوران قوس

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \qquad (0 \le \theta \le \pi/4, r \ge 0)$$

حول حور x است .لذا ، طبق فرمول (۱) ، صفحهٔ ۷۵۰ ، پس از تعویض t با θ ،

$$A = 4\pi \int_0^{\pi/4} y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 4\pi \int_0^{\pi/4} r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

با مشتقگیری از $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ نسبت به θ ، به دست می‌آوریم

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -2a^2 \sin 2\theta,$$

درنتیجه ،

$$r\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{r^4 + \left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(a^2\cos 2\theta)^2 + (-a^2 \sin 2\theta)^2}$$
$$= \sqrt{a^4(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)} = a^2.$$

بنابراین ،

$$A = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta = -4\pi a^2 \cos\theta \Big|_0^{\pi/4} = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

که حدودا" 29% مساحت $4\pi a^2$ کره‌ای به شعاع a است .

مسائل

مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی قطبی داده شده و جفت شعاع مشخص شده را بیابید .

۱. $r = 3 \sec \theta, \theta = 0, \theta = \pi/4$

۲. $r = -4 \csc \theta, \theta = 5\pi/4, \theta = 7\pi/4$

۳. $r = 2 \tan \theta, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3$

۴. $r = 1/(1 + \theta), \theta = -\pi/4, \theta = \pi/4$

۵. $r = \sqrt{2}/(1 + \cos \theta), \theta = \pi/3, \theta = \pi/2$

۶. $r = 1/\theta, \theta = 2\pi/3, \theta = \pi$

۷. $r = 2^{\theta}, \theta = 0, \theta = \pi/2$

۸. $r = 5\theta^2, \theta = -\pi/2, \theta = 0$

مساحت داخل منحنی قطبی داده شده را بیابید.

۹. $r = 8 \sin \theta$

۱۰. $r = -\sqrt{3} \cos \theta$

۱۱. $r = 10 |\cos \theta|$

۱۲. $r = \cos \theta + \sin \theta$

۱۳. $r = 3 - 3 \sin \theta$ (دلگون)

۱۴. $r = 2 - \cos \theta$ (لیماسون)

۱۵. $r = 3 + 2 \cos \theta$ (لیماسون)

۱۶. $r^2 = 4 \sin 2\theta$ (لمنیسکات)

۱۷. $r = \sqrt{5} \sec^3 (\theta/3)$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$

۱۸. $r = \sec \theta - 4 \cos \theta$ $(-\pi/3 \le \theta \le \pi/3)$

مساحت کل محصور به رز داده شده را بیابید.

۱۹. $r = \sin 2\theta$

۲۰. $r = \cos 4\theta$

۲۱. $r = \cos 3\theta$

۲۲. $r = \sin 5\theta$

راهنمایی. ابتدا مساحت یک پر را حساب کنید.

در هر مورد، مساحت داخل منحنی قطبی اول و خارج منحنی قطبی دوم را بیابید.

۲۳. $r = \cos \theta, r = \sin \theta$

۲۴. $r = 4 \sin \theta, r = 2$

۲۵. $r = 1, r = 1 + \cos \theta$

۲۶. $r = 2 - \cos \theta, r = 3 \cos \theta$

۲۷. $r = \sin 2\theta, r = \frac{1}{2}$

۲۸. $r^2 = \sin 2\theta, r^2 = \cos 2\theta$

در هر مورد، مساحت داخل هر دو منحنی قطبی را بیابید.

۲۹. $r = \cos \theta, r = \cos (\theta - (\pi/4))$

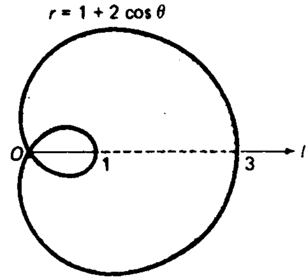
۳۰. $r = 1 + \cos \theta, r = 1 - \cos \theta$

۳۱. $r = \sin 2\theta, r = \cos \theta$

۳۲. $r = 2 \cos 3\theta, r = 1$

۳۳. مساحت محصور به حلقهٔ داخلی لیماسون $r = 1 + 2 \cos \theta$ را بیابید. همچنین،

مساحت بین حلقهٔ داخلی و حلقهٔ خارجی، یعنی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۸۴، را بیابید.



شکل ۸۴

۳۴. با کمترین تلاش، نشان دهید که مساحت محدود به منحنی

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \qquad (0 < e < 1)$$

مساوی است با $\pi p^2(1 - e^2)^{-3/2}$.

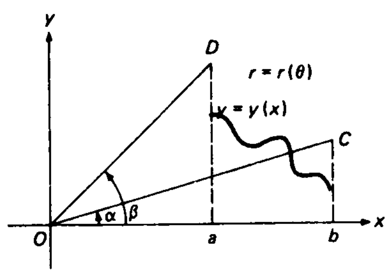
راهنمایی. ر.ک. مثال ۴، صفحهٔ ۹۴۹.

۳۵. واضح است که محاسبات زیر نادرستند. مساحت محصور به لمنیسکات $r^2 = a^2\cos 2\theta$ مساوی است با

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(برای جواب درست، ر.ک. مثال ۳). اشکال در کجاست؟

۳۶. شکل ۸۵ منحنیی را نشان می‌دهد که دارای معادلهٔ قطبی $r = r(\theta)$ بر بازهٔ $\alpha \le \theta \le \beta$



شکل ۸۵

و معادلهٔ دکارتی $y = y(x)$ بر بازهٔ $a \le x \le b$ است. حال دو عبارت برای مساحت A

از ناحیهٔ OCD وجود دارند؛ یعنی ،

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

و

$$A = \int_a^b y\,dx + (\text{مساحت مثلث } OaD) - (\text{مساحت مثلث } ObC)$$

تحقیق کنید که مقدار A به دست آمده در دو حالت یکی است ، و این چیزی است که یک نظریهٔ سازگار از مساحت در صفحه طالب آن می‌باشد .

طول منحنی قطبی داده شده را بیابید (ثابت a مثبت است) .

۳۷. $r = a\sec\theta \quad (-\pi/4 \le \theta \le \pi/4)$

۳۸. $r = a\csc\theta \quad (\pi/3 \le \theta \le 2\pi/3)$

۳۹. $r = 2a\sin\theta \quad (\pi \le \theta \le 2\pi)$

۴۰. $r = \cos\theta + \sin\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$

۴۱. $r = e^{\theta} \quad (0 \le \theta \le 1)$

۴۲. $r = \theta^2 \quad (-\pi \le \theta \le \pi)$

۴۳. $r = 1/\theta \quad (\frac{1}{2} \le \theta \le 2)$

۴۴. $r = 2^{\theta} \quad (-\infty < \theta \le 0)$

۴۵. $r = 1/(1+\cos\theta) \quad (-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$

۴۶. $r = a\cos^2(\theta/2) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

۴۷. $r = a\sin^3(\theta/3) \quad (0 \le \theta \le 3\pi)$

۴۸. $r = a\tanh(\theta/2) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

۴۹. مساحت سطح حاصل از دوران دلگون $r = a(1+\cos\theta)$ حول محور x را بیابید .

۵۰. مساحت سطح حاصل از دوران لمنیسکات $r^2 = a^2\cos 2\theta$ نسبت به محور y (به جای محور x ، مثل مثال ۷) را بیابید .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتقال و دوران محورها ، انتقال و دوران معادلات

آزمونهای تقارن برای رسم $F(x, y) = 0$

تعریف سهمی

کانون ، هادی ، محور ، و رأس سهمی

معادلات سهمی به شکل متعارف
خاصیت انعکاسی سهمی
تعریف بیضی
کانونها، محور اطول، محور اقصر، و رئوس بیضی
معادلات بیضی به شکل متعارف
خروج از مرکز بیضی
خاصیت انعکاسی بیضی
تعریف هذلولی، شاخه‌های هذلولی
کانونها، محور متقاطع، محور مزدوج، رئوس و مجانبهای هذلولی
معادلات هذلولی به شکل متعارف
خروج از مرکز هذلولی
هادیهای بیضی و هذلولی
خاصیت کانون ــ هادی مقاطع مخروطی
منحنیهای درجهٔ دو به عنوان مقاطع مخروطی
تعریف مختصات قطبی
رابطهٔ بین مختصات قطبی و قائم
نمودار معادلات قطبی، آزمونهای تقارن برای نمودار $F(r, \theta) = 0$
مخروطیها در مختصات قطبی
خط مماس بر یک منحنی قطبی، زاویهٔ شعاعی ــ مماسی
مساحت در مختصات قطبی، طول یک منحنی قطبی

مسائل تکمیلی

۱. انتقالی از محورها نقطهٔ $(3, -4)$ در دستگاه xy را به نقطه‌ای از محور x' ونقطهٔ $(2, 3)$ را به نقطه‌ای از محور y' می‌برد. معادلات انتقال مربوطه چیست؟

۲. از نظر هندسی واضح است که (آ) حاصل دو انتقال متوالی محورها خود انتقالی از محورهاست؛ و (ب) فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ درصفحه **تحت *انتقال پایا*** است؛ یعنی، پس از انتقال محورها تغییر نمی‌کند. (آ) و (ب) را به‌طور جبری تحقیق نمایید.

۳. از نظر هندسی واضح است که (آ) حاصل دو دوران متوالی حول نقطهٔ O خوددورانی حول O است؛ و (ب) فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ **تحت *دوران***

پایا است؛ یعنی، پس از دوران محورها تغییر نمی‌کند. (آ) و (ب) را به طور جبری تحقیق کنید.

۴. پیشامد E که در موضع x (در امتداد یک خط) رخ می‌دهد و زمان t را می‌توان با جفت مرتب (x, t) مشخص کرد. فرض کنید پیشامد E در دو "کنج"، یعنی دستگاه xt و دستگاه $x't'$، که نسبت به دستگاه xt با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، مشاهده شده باشد، و

$$\theta = \tanh^{-1}\frac{v}{c},$$

که در آن c سرعت نور است (θ را *پارامتر سرعت* می‌نامند). در این صورت، بنابر نسبیت خصوصی اینشتن (ر.ک. مسئلهٔ ۵۴، صفحهٔ ۴۴۳)، مختصات x' و t' به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر به مختصات x و t مربوط می‌شوند:

$$\begin{aligned} x' &= x\cosh\theta - ct\sinh\theta, \\ ct' &= -x\sinh\theta + ct\cosh\theta, \end{aligned} \qquad (\text{یک})$$

که *تبدیل لورنتس*[1] نام دارند. نشان دهید که حاصل دو تبدیل لورنتس متوالی خود یک تبدیل لورنتس است.

راهنمایی. از فرمولهای (۶) و (۷)، صفحهٔ ۵۶۴ استفاده کنید.

۵. در نظریهٔ نسبیت، *بازهٔ فضا زمان* بین پیشامدهای $E_1 = (x_1, t_1)$ و $E_2 = (x_2, t_2)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2},$$

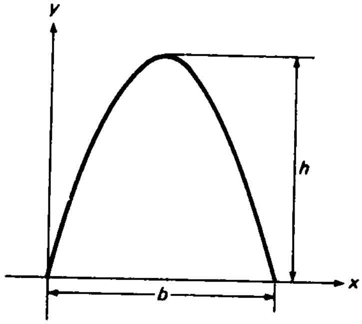
که در آن c سرعت نور است. نشان دهید که کمیت s *پایای لورنتس* است؛ یعنی در اثر تبدیل لورنتس (یک) تغییر نمی‌کند.

۶. فرض کنید G نمودار معادلهٔ $\sin(x + y) = 0$ باشد. G از چهار تقارن مطرح شده در صفحهٔ ۹۲۸ کدامها را دارد؟ G را توصیف کنید.

۷. معادله قوس سهموی به قاعدهٔ b و ارتفاع h شکل ۸۶ را بیابید. مساحت تحت قوس چقدر است؟

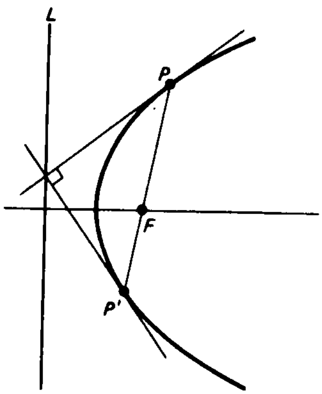
۸. وتری از یک سهمی را *وتر کانونی* نامند که از کانون F سهمی گذشته باشد. نشان‌دهید که مماسهای بر یک سهمی در نقاط انتهایی یک وتر کانونی برهم عمود بوده و روی‌هادی

1. Lorentz



شکل ۸۶

L همدیگر را قطع می‌کنند (ر.ک. شکل ۸۷، که در آن PP' یک وتر کانونی می‌باشد).

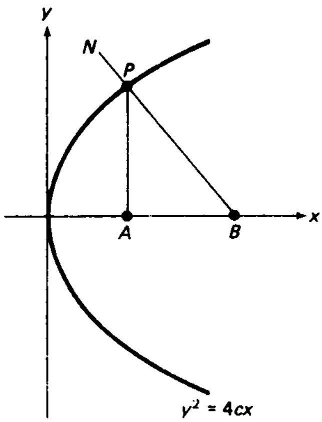


شکل ۸۷

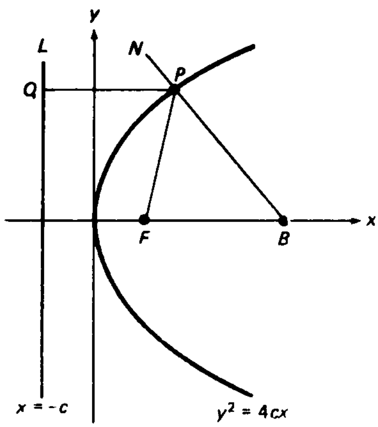
راهنمایی. از مسائل ۳۱ و ۳۲، صفحهٔ ۹۴۱، استفاده کنید.

۹. قائم N در نقطهٔ دلخواه P از سهمی $y^2 = 4cx$ $(c > 0)$ ، به کانون $F = (c, 0)$ ، محور x را در نقطهٔ B قطع می‌کند. نشان دهید دو موضع برای P وجود دارد که به ازای آنها مثلث FPB متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $4c$ است. (ر.ک. شکل ۸۸ ، که در آن L هادی سهمی بوده و Q پای عمود مرسوم از P به L می‌باشد.)

۱۰. فرض کنید N ، P ، و B همانهای بوده در مسئلهٔ قبل بوده، و A پای عمود مرسوم از P به محور x باشد (ر.ک. شکل ۸۹). نشان دهید که پاره‌خط AB ، به نام **تحت قائم سهمی**، به ازای هر موضع نقطهٔ P ، به طول ثابت $2c$ است.

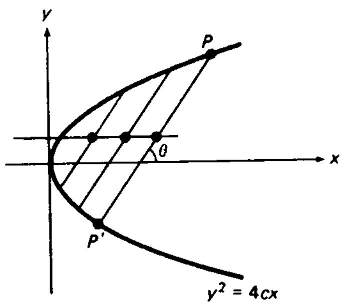


شکل ۸۹



شکل ۸۸

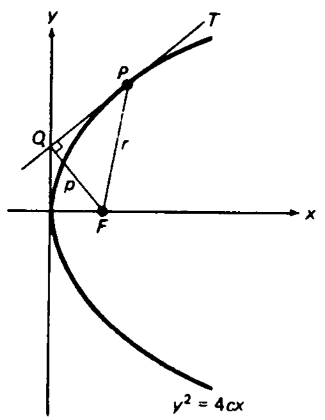
۱۱. نشان دهید مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای سهمی $y^2 = 4cx$ با میل ناصفر ثابت θ خط مستقیمی موازی محور x است (ر.ک. شکل ۹۰).



شکل ۹۰

۱۲. نشان دهید که عمود مرسوم از کانون F بر سهمی $y^2 = 4cx$ $(c > 0)$ بر مماس T درنقطهٔ P سهمی همیشه T را درنقطهٔ Q از محور y قطع می‌کند (ر.ک. شکل ۹۱). همچنین، نشان دهید که هرگاه $r = |FP|$ و $p = |FQ|$ ، آنگاه به ازای هر موضع P ، $p^2 = cr$.

۱۳. فرض کنید E بیضی به معادلهٔ $7x^2 + 3y^2 = 55$ باشد. از شش نقطهٔ $P_1 = (2, -3)$ $P_2 = (-2, 2)$, $P_3 = (0, -5)$, $P_4 = (3, -2)$, $P_5 = (1, 4)$, $P_6 = (-3, 1)$ کدامها روی E اند؟ کدامها داخل E اند؟ کدامها خارج E می‌باشند؟



شکل ۹۱

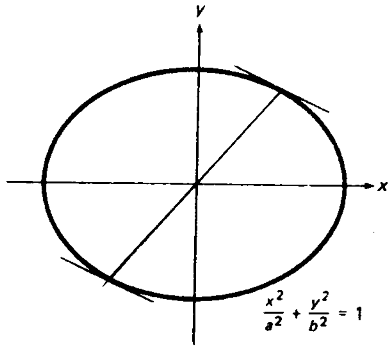
۱۴. مساحت چهار ضلعیی را بیابید که دو رأسش در کانونهای بیضی $\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ودو رأس دیگرش در نقاط انتهایی محور اقصر قرار داشته باشند.

۱۵. یک بیضی که نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است از نقاط $(6, 0)$ و $(4, \sqrt{5})$ می‌گذرد. معادلهٔ بیضی را بنویسید. خروج از مرکز چقدر است؟

۱۶. نقاط تقاطع بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ و دایرهٔ مار بر کانونها وقطع y بالایی بیضی را پیدا کنید.

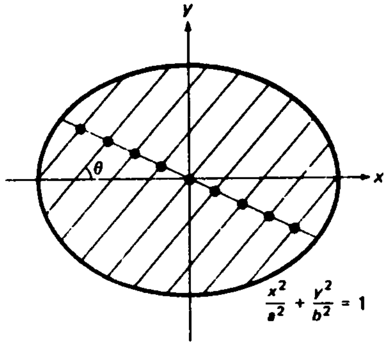
۱۷. مماسهایی از بیضی $\frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{24}y^2 = 1$ را بیابید که با خط $6x - 3y + 11 = 0$ موازی باشند. فاصلهٔ بین مماسها چقدر است؟

۱۸. وتری از یک بیضی که از مرکز آن بگذرد **قطر** نام دارد. نشان دهید که مماسهای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ در نقاط انتهایی یک قطر موازیند (ر.ک. شکل ۹۲).



شکل ۹۲

۱۹ . نشان دهید مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ با میل ثابت θ قطری از بیضی است (ر.ک. شکل ۹۳) .



شکل ۹۳

۲۰ . بر بیضی $\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = 1$ نزدیکترین نقطهٔ P به خط $2x - 3y + 25 = 0$ را بیابید . فاصلهٔ بین P و خط چقدر است؟

۲۱ . نشان دهید که حاصل‌ضرب فواصل نقطهٔ P از هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ به کانونهای $(\pm c, 0)$ تا مجانبهایش به ازای جمیع مواضع P مقدار یکسانی دارد . این مقدار چقدر است؟

۲۲ . نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x = x_0 + a \sec t, \quad y = y_0 + b \tan t \quad (-\pi/2 < t < \pi/2) \qquad \text{(دو)}$$

شاخهٔ راست یک هذلولی با محور متقاطع افقی است اگر $a > 0$ و شاخهٔ چپ آن است اگر $a < 0$. معادلات پارامتری شاخه‌های یک هذلولی به محور متقاطع قائم را بنویسید .

۲۳ . مماسهای بر هذلولی $\frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{5}y^2 = 1$ عمود بر خط $4x + 3y - 7 = 0$ را بیابید .

۲۴ . مماسهای بر هذلولی $\frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{16}x^2 = 1$ موازی خط $2x + 4y - 5 = 0$ را بیابید . فاصلهٔ بین مماسها چقدر است؟

۲۵ . نقطهٔ اشتراک مماس بر هذلولی $xy = 1$ ماربر نقطهٔ $(2, \frac{1}{2})$ با مماس ماربر نقطهٔ $(\frac{1}{2}, 2)$ را بیابید .

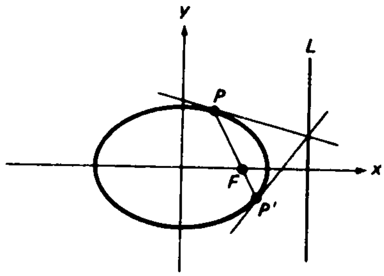
۲۶ . خروج از مرکز بیضی را بیابید که در آن فاصلهٔ بین هادیها سه برابر فاصلهٔ بین کانونهاست .

۲۷ . خروج از مرکز هذلولی را بیابید که در آن فاصلهٔ بین کانونها پنج برابر فاصلهٔ بین هادیهاست .

۲۸. فاصلهٔ بین هادیهای یک بیضی به مرکز $(-3, 4)$ و محور اطول افقی 36 بوده، ونقطه‌ای بر بیضی وجوددارد که فاصله‌اش تاکانونها 9 و 15 است. معادلهٔ بیضی به‌شکل متعارف چقدر است؟

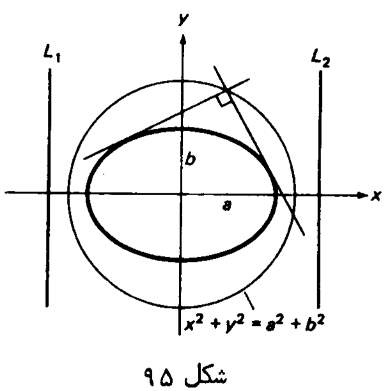
۲۹. هذلولیی بیابید که کانونهایش در رئوس بیضی $\frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{64}y^2 = 1$ بوده، و هادیهایش از کانونهای بیضی بگذرند.

۳۰. وتری از بیضی را یک **وتر کانونی** نامند اگر از یکی از کانونهای بیضی بگذرد. نشان دهید که مماسهای بر بیضی درنقاط انتهایی یک وتر کانونی روی هادی L که به‌کانون مربوطه نزدیکتر است متقاطع می‌باشند (ر.ک. شکل ۹۴، که در آن PP' یک‌وترکانونی است).



شکل ۹۴

۳۱. نشان دهید مکان هندسی تمام نقاطی‌که بتوان از آنها دو خط مماس متعامد بر بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ کشید دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ است که **دایرهٔ هادی** بیضی نام دارد (ر.ک شکل ۹۵، که هادیهای L_1 و L_2 بیضی را نیز نشان می‌دهد.)



شکل ۹۵

۳۲. شعاع دایرهٔ هادی یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{4}{5}$ و نیم محور اطول 15 را بیابید.

۳۳. بنابر مسئلهٔ ۳۰، مماسهای مرسوم از نقاط انتهایی یک وتر کانونی بیضی روی یک هادی متقاطعند. نشان دهید که، برخلاف سهمی (ر.ک. مسئلهٔ ۸)، این مماسها هرگز بر هم عمود نیستند.

پس از دوران مناسبی از محورها، بگویید نمودار معادلهٔ داده شده چه مخروطی است. مخروطی را درصورت تباه نشده بودن رسم نمایید.

۳۴. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y + 36 = 0$

۳۵. $9x^2 + 30xy + 25y^2 - 42x - 70y + 49 = 0$

۳۶. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

۳۷. $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + y = 0$

۳۸. نشان دهید هرگاه $A + C$ و $4AC - B^2$ هر دو مثبت باشند، آنگاه نمودار معادلهٔ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ بیضی‌است‌که مساحت‌محصور به‌آن $2\pi/\sqrt{4AC - B^2}$ می‌باشد.

۳۹. منحنی درجهٔ دو به معادلهٔ

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

را به‌طور ساده تعبیر هندسی کنید.

۴۰. نشان دهید که نمودار معادلهٔ

$$xy + Ax + By + C = 0$$

یا یک هذلولی متساوی‌الاضلاع است یا یک جفت خط عمود بر هم.

فرض کنید C_k منحنی به معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} = 1 \qquad \text{(سه)}$$

باشد، که در آن $a^2 > b^2, k > -a^2, k \neq -b^2$.

۴۱. نشان دهید C_k بیضی است اگر $k > -b^2$ و هذلولی است اگر $-a^2 < k < -b^2$.

۴۲. نشان دهید همهٔ C_k ها کانونهای یکسان‌دارند (به‌این دلیل است که C_k را هم‌کانون می‌نامند).

۴۳. معادلهٔ (سه) را به ازای $a^2 = 4, b^2 = 1$ و $k = -3, -2, 0, 1$، که کانونهای F_1 و F_2 را مشخص‌می‌کنند، رسم نمایید.

۴۴. نشان دهید که هر بیضی C_k $(k > -b^2)$ به هر هذلولی $C_{k'}$ $(-a^2 < k' < -b^2)$ متعامد است؛ یعنی، نشان‌دهید که منحنیهای C_k و $C_{k'}$ درتمام نقاط اشتراکشان برهم عمودند.

۴۵. یک دایره به معادلهٔ قطبی زیر است:

$$r^2 - 3\sqrt{3}\, r\cos\theta - 3r\sin\theta - 7 = 0.$$

شعاع و مرکز آن را (در مختصات قطبی) بیابید .

۴۶. مختصات قطبی جدید نقــاط $A = (4, \pi/3)$ ، $B = (1, 2\pi/3)$ ، و $C = (5, \pi/4)$ را پس از دوران محور قطبی تا آنکه از A بگذرد پیدا نمایید .

۴۷. نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین نقاط به مختصات قطبی $(12, 4\pi/9)$ و $(12, -2\pi/9)$ را بیابید .

۴۸. منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = a + b \sec \theta \qquad (a > 0, b > 0)$$

یــک **حلزونگون** نــام دارد . یکی از ســه حلزونگون $r = 2 + \sec \theta$، $r = 2 + 2 \sec \theta$، $r = 2 + 3 \sec \theta$ دارای " حلقه " است . آن کدام است ؟

معادلهٔ قطبی $F(r, \theta) = 0$ را طوری مثال بزنید که نمودارش نسبت به محور y متقارن بوده ولو اینکه مجموعهٔ جوابش با مجموعهٔ جواب هر یک از معادلات زیر یکی نباشد .

۴۹. $F(-r, -\theta) = 0$ ۵۰. $F(r, \pi - \theta) = 0$

۵۱. $F(-r, -\theta) = 0$ یا $F(r, \pi - \theta) = 0$.

۵۲. نقطهٔ P طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب فواصلش تا دونقطهٔ ثابت F_1 و F_2 مقدار ثابت b^2 است (لذا ، $|PF_1||PF_2| = b^2$). معادلهٔ دکارتی و معادلهٔ قطبی مسیـر P ، که **بیضی کاسینی** نام دارد ، را با اختیار $F_1 = (-a, 0), F_2 = (a, 0)$ در مختصات قائم یا معادلا " $F_1 = (a, \pi), F_2 = (a, 0)$ در مختصات قطبی پیدا کنید . بیضیهای کاسینی را به ازای $b^2 = 8,\ a^2 = 6, 8, 10$ رسم کرده ، و تفاوتهای کیفی این سه حالت را توصیف نمایید .

۵۳. یک خط مار بر کانون F یک مخروطی تباه نشده با خروج از مرکز e و فاصلهٔ کانون تا هادی d مخروطی را در نقاط A و B قطع می‌کند . نشان دهید که مجموع

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|}$$

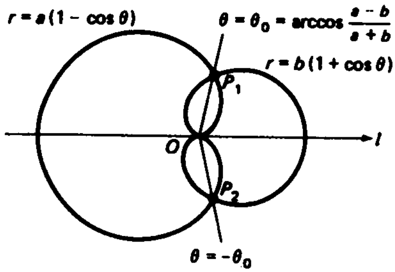
به ازای جمیع مواضع خط مقدار یکسانی دارد ؟

۵۴. با استفاده از مختصات قطبی ، برهان دیگری برای خاصیت انعــکاسی سهمی که در صفحهٔ ۹۳۹ ثابت شد بیاورید .

۵۵. نشان دهید که دوایر $r = a \sin \theta$ و $r = b \cos \theta$ در نقاط اشتراک ، صرف‌نظر از ثابتهای مثبت a و b ، متعامدند (یعنی ، همدیگر را در زوایای قائمه قطع می‌کنند) .

۵۶. دلگونهای $r = a(1 - \cos \theta)$ و $r = b(1 + \cos \theta)$ در قطب و دو نقطهٔ P_1 و P_2 که نسبت به محور قطبی متقارن‌اند همدیگر را قطع می‌کنند (رک. شکل ۹۶) . نشان دهید که

دلگونها در P_1 و P_2 ، بی‌توجه به ثابتهای مثبت a و b ، متعامدند. زاویهٔ بین دلگونها در قطب چقدر است؟



شکل ۹۶

فرض کنید A_n مساحت یک پر رز $r = a\sin n\theta$ بوده ، و A مساحت کل محصور به تمام رزباشد. نشان دهید که

۵۷. $A_n = \dfrac{\pi a^2}{4n}$

۵۸. $A = \dfrac{\pi a^2}{2}$ اگر n زوج باشد ، ولی $A = \dfrac{\pi a^2}{4}$ اگر n فرد باشد .

۵۹. مساحت داخل هر دو دلگون $r = 1 + \sin\theta$ و $r = 1 - \cos\theta$ را بیابید .

۶۰. فرض کنید A_n مساحت محدود به محور قطبی و n دور اول مارپیچ ارشمیدسی $r = a\theta\ (\theta \geq 0, a > 0)$ باشد . نشان دهید که $A_{n+1} - A_n = 8\pi^3 a^2 n$ $(n \geq 1)$. A_1 ، A_2 ، A_3 ، و A_4 را بیابید .

۶۱. دو منحنی قطبی بستهٔ ساده با مساحات محصور مختلف مثال بزنید که هر یک از هر خط مار بر قطب پاره‌خطی به طول ثابت $2a$ جدا سازد .

۶۲. با استفاده از مختصات‌قطبی ،نشان‌دهید که مساحت محصور به حلقهٔ چینهٔ دکارت

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \qquad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

(ر.ک. شکل ۴۱ ، صفحهٔ ۷۳۷) مساوی است با $\frac{3}{2}a^2$.

راهنمایی . چینه دارای معادلهٔ دکارتی $x^3 + y^3 = 3axy$ است .

۶۳. اگر $0 < a < b$ ، لیماسون $r = a + b\cos\theta$ دو حلقه دارد ، یکی حلقهٔ داخلی ودیگری حلقهٔ خارجی . مساحت بین دو حلقه را به دست آورید .

۶۴. نشان دهید که مارپیچ هذلولوی $r\theta = 1 \ (1 \leq \theta < \infty)$ طول متناهی ندارد.

۶۵. طول منحنی قطبی

$$\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \qquad (1 \leq r \leq 3)$$

را بیابید.

۶۶. طول منحنی به " معادلات پارامتری قطبی "

$$r = t, \qquad \theta = \ln t \qquad (0 < t \leq 1)$$

را پیدا کنید. محاسبات را ابتدا با بیان r به صورت تابعی از θ امتحان نمایید.

بردارها در صفحه ۱۱

در این فصل نشان می‌دهیم چگونه می‌توان مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را ازتوابع معمولی ، که اعداد را به‌اعداد می‌برند ،به‌توابع *برداری* ، که‌اعداد را به *بردارها* می‌برند، تعمیم داد . یک بردار کمیتی است که فقط با یک عدد ، به نام *اندازه* ، معین نشده و بلکه **جهت** نیز لازم دارد . پیدایش روشهای برداری تاحدود زیاد از کارهای شیمی‌دان وریاضی فیزیکدان بزرگ آمریکایی ، جوشیا ویلاردگیبس[1] (۱۸۳۹ - ۱۹۰۳) ناشی شده است ، که نشان داد که استفاده از آنها موجب تسهیل در حل مسائل علوم کاربسته می‌شود .

بحث ما از حساب برداری در سطح مقدماتی صورت می‌گیرد . در این فصل‌خود را به بردارها در صفحه محدود می‌کنیم ، که در آن اغلب ویژگیهای مبحث ظاهر می‌شوند . در فصل بعد ، از بعد دو به سه رفته ، و بردارها در *فضا* را درنظر می‌گیریم . گام نهایی مجاز دانستن توابع برداری با **شناسه**‌های برداری علاوه بر **مقادیر** برداری بعدا" ، پس از آنکه تکنیکهای لازم حساب دیفرانسیل و انتگرال‌توابع چندمتغیره به دست آمد ،برداشته‌خواهد شد .

۱۱.۱ مفهوم بردار؛ اعمال بر بردارها

اسکالرها و بردارها . در علوم و صنعت تمایز بین دو نوع کمیت ، یعنی اسکالر و بردار، اهمیت دارد . منظور از *اسکالر* کمیتی است که کاملا" با یک عدد (و با واحد سنجش مناسبی) مشخص می‌شود . مثلا" ، فشار یک گاز محبوس، ارتفاع یک هواپیما ، و دمای یک کوره همه اسکالرند . از آن سو ، منظور از *بردار* یعنی کمیتی که برای مشخص شدن فقط به یک عدد ، به نام *اندازهٔ* بردار،محتاج نبوده ، بلکه **جهت** نیز لازم دارد . مثلا" ، سرعت

1. Josiah Willard Gibbs

باد در یک ایستگاه هواشناسی ، موضع یک هدف نسبت به یک توپخانهٔ دریایی ، و نیروی وارد بر یک الکترون متحرک در یک میدان مغناطیسی همه بردار می‌باشند .

بردارها را با حروف سیاه مانند

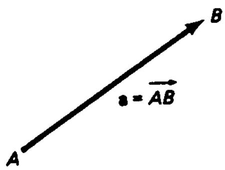
$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$$

(در چاپ) ، یا با گذاردن سهم روی حروف نازک نظیر مانند

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \ldots$$

(در دستنوشت) نشان می‌دهند. همانند اسکالرها ، آنها را با حروف نازک معمولی بدون سهم نیز نشان می‌دهند .

برای نمایش هندسی یک بردار ، یک پاره‌خط جهتدار یا سهم به کار می‌بریم که اشاره به جهت بردار داشته و طولش مساوی اندازهٔ بردار می‌باشد (توجه کنید که اندازهٔ یک بردار ذاتا" نامنفی است) . هر بردار یک **نقطهٔ شروع** و یک **نقطهٔ پایان** دارد ، نقطهٔ دوم با سر سهم نموده می‌شود . مثلا" ، از دو نقطهٔ انتهایی بردار $\mathbf{a}$ در شکل ۱ ، A نقطهٔ شروع و B نقطهٔ پایان است ؛ پاره‌خط جهتدار از A به B **به‌همین ترتیب** با $\overrightarrow{AB}$ نموده می‌شود ؛



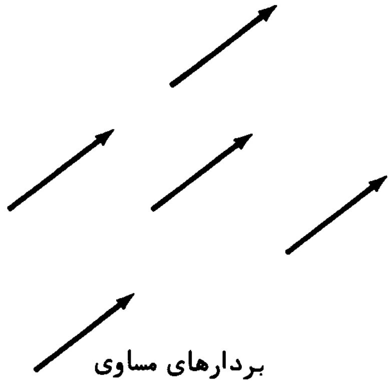
شکل ۱

و درنتیجه ، $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. اندازهٔ یک بردار با حرف نازک نظیر (هرچه باشد ،اندازه اسکالر است) ، یا با گذاردن بردار داخل علامت قدرمطلق نموده‌می‌شود . مثلا" ، در بردار شکل ۱ داریم

$$a = |\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|.$$

دو بردار را **مساوی** گوییم اگر موازی (یا همخط) بوده ، به یک جهت اشاره کنند ،و اندازهٔ یکسانی داشته‌باشند . توجه‌کنید که **تساوی** دو بردار همانی آنها را معنی‌نمی‌دهد ، و این برخلاف تساوی کسرهایی چون $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{4}$ است که به معنی همانی می‌باشند .

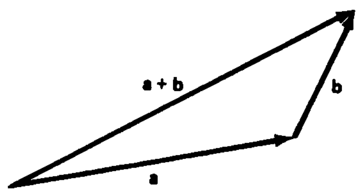
مثال ۱ . پنج بردار شکل ۲ ، که دوتای بالا همخط اند ، همه مساوی می‌باشند .



بردارهای مساوی

شکل ۲

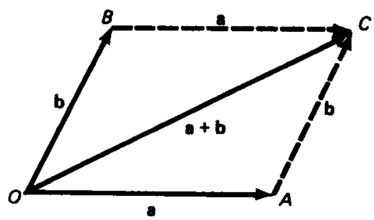
جمع بردارها. منظور از مجموع دو بردار **a** و **b** ، که با **a + b** نموده می‌شود ، یعنی بردار حاصل از قرار دادن نقطهٔ شروع **b** در نقطهٔ پایان **a** و سپس رسم برداری با نقطهٔ شروع **a** و نقطهٔ پایان **b** (ر.ک. شکل ۳) . ممکن است قبلا" با این ترسیم به صورت " قانون



جمع بردارها

شکل ۳

متوازی‌الاضلاع " فیزیک مقدماتی (که برای یافتن " برآیند " دو تغییر مکان ، دوسرعت ، دو نیرو ، و غیره به کار رفته) برخورد کرده باشید . در واقع ، هرگاه **a** و **b** راازنقطهٔ‌شروع مشترک O ، مثل شکل ۴ ، رسم کرده و متوازی‌الاضلاع $OACB$ " پیموده شده به وسیلهٔ **a** و



تعویضپذیری جمع برداری

شکل ۴

b را بسازیم ، آنگاه **a** + **b** قطر OC متوازی‌الاضلاع می‌باشد (چرا؟) . از این شکل معلوم می‌شود که

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

و

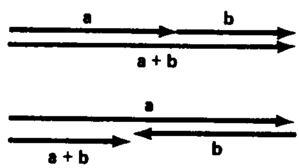
$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

که باهم ایجاب می‌کنند که

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \qquad (۱)$$

نشانگر آنکه جمع برداری **تعویضپذیر** است .

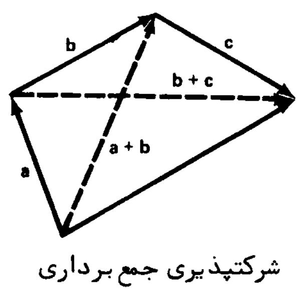
تبصره. اگر **a** و **b** موازی باشند ، مثلث شکل ۳ " فرو می‌ریزد " . در این صورت ، یکی‌از دو حالت شکل ۵ را خواهیم داشت .



شکل ۵

شکل ۶ نشان می‌دهد که جمع برداری **شرکتپذیر** نیز هست ، بدین معنی که

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \qquad (۲)$$



شرکتپذیری جمع برداری

شکل ۶

با چند بار استفاده از فرمولهای (۱) و (۲) معلوم می‌شود که مجموع هر تعداد بردار از ترتیب دسته‌بندی جملات مستقل است . بخصوص، با این مجازیم ، در نوشتن مجموع

بردارها، پرانتزها و کروشه‌ها را حذف نماییم. مثلا"،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = [(\mathbf{d} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}] + \mathbf{a} = [\mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{d})] + \mathbf{b},$$

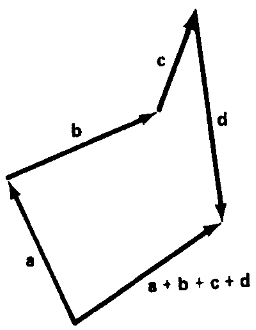
و از این قبیل.

این امر که طول یک ضلع هر مثلث نمی‌تواند از مجموع طول سایر اضلاع تجاوز کند، *نامساوی مثلثی*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \qquad (۳)$$

را به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ایجاب می‌نماید (ر.ک. شکل۳). توجه کنید که نامساوی مثلثی برای اسکالرها (قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۲۲) حالت خاصی از (۳) است که، مثل شکل۵، وقتی به دست می‌آید که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همخط می‌باشند.

مثال ۲. در شکل ۷ مجموع $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ برداری است که مسیر چندضلعی حاصل از



شکل ۷

قرار دادن نقطهٔ شروع $\mathbf{b}$ در نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$، نقطهٔ شروع $\mathbf{c}$ در نقطهٔ پایان $\mathbf{b}$، و نقطهٔ شروع $\mathbf{d}$ در نقطهٔ پایان $\mathbf{c}$ را می‌بندد.

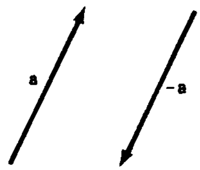
منظور از *بردار* صفر، که با $\mathbf{0}$ (صفر سیاه) نموده می‌شود یعنی "بردار"ی که نقاط شروع و پایانش یکی هستند. لذا، بردار صفر دارای اندازهٔ 0 است، ولی جهت تعریف شده‌ای ندارد. واضح است که بردار $\mathbf{0}$ همان نقش جمع برداری را دارد که عدد 0 در جمع (اسکالر) معمولی ایفا می‌کند؛ یعنی، به ازای $\mathbf{a}$ ی دلخواه،

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

به ازای بردار $\mathbf{a}$، بردار با همان اندازهٔ $\mathbf{a}$ ولی در جهت مخالف قرینهٔ $\mathbf{a}$ نام دارد

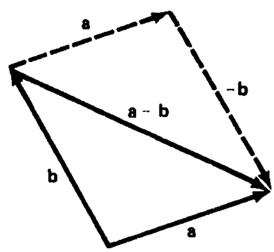
و با $-\mathbf{a}$ نموده می‌شود (ر.ک. شکل ۸). از تعریف جمع برداری نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0},$$



شکل ۸

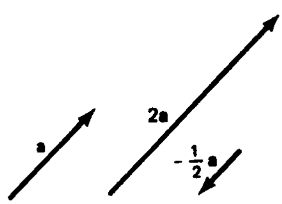
و چون $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$، قرارمی‌دهیم $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$. تفاضل $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ مساوی مجموع $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ تعریف می‌شود. برای ساختن $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ می‌توان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را طوری قرار داد که نقاط شروعشان یکی باشد، و سپس بردار از نقطهٔ پایان $\mathbf{b}$ به نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ را رسم کرد. شکل ۹ دلیل کارکردن این ترسیم را نشان می‌دهد.



تفریق پاره‌خطها

شکل ۹

مضارب اسکالر یک بردار. باحاصلضرب $p\mathbf{a}\ (=\mathbf{a}p)$ اسکالر ناصفر p و بردار ناصفر $\mathbf{a}$ برداری تعریف می‌شود که اندازهٔ آن $|p|$ برابر اندازهٔ $\mathbf{a}$ است (درنتیجه $|p\mathbf{a}| = |p||\mathbf{a}|$) همجهت با $\mathbf{a}$ اگر $p > 0$ و مختلف‌الجهت اگر $p < 0$ (ر.ک. شکل ۱۰)). بخصوص، $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.



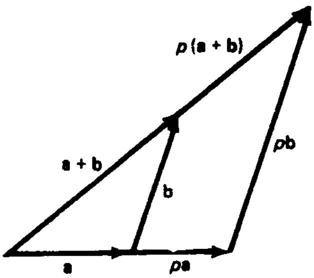
شکل ۱۰

اگر $p = 0$ یا $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ، طبق تعریف قرار می‌دهیم $p\mathbf{a} = \mathbf{0}$. به ازای دو اسکالر p و q ،فورا" می‌بینیم $p(q\mathbf{a}) = pq\mathbf{a}$ ، که در آن $pq\mathbf{a}$ حاصل‌ضرب اسکالر pq در بردار $\mathbf{a}$ است .همچنین ، به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ و اسکالرهای p, q ، قوانین پخشپذیری زیر را داریم :

$$(p + q)\mathbf{a} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}, \tag{۴}$$

$$p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = p\mathbf{a} + p\mathbf{b}. \tag{۵}$$

شکل ۱۱ برقراری (۵) را توضیح می‌دهد ، و اثبات (۴) به عنوان تمرین گذارده‌شده‌است.



شکل ۱۱

تقسیم یک بردار بر یک اسکالر به‌طور طبیعی تعریف می‌شود؛ یعنی ، با قرار دادن

$$\frac{\mathbf{a}}{p} = \frac{1}{p}\mathbf{a} \qquad (p \neq 0).$$

هر بردار به طول ۱ یک **بردار یکه** نام دارد . اگر $\mathbf{a}$ یک بردار ناصفر باشد ، بردار

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

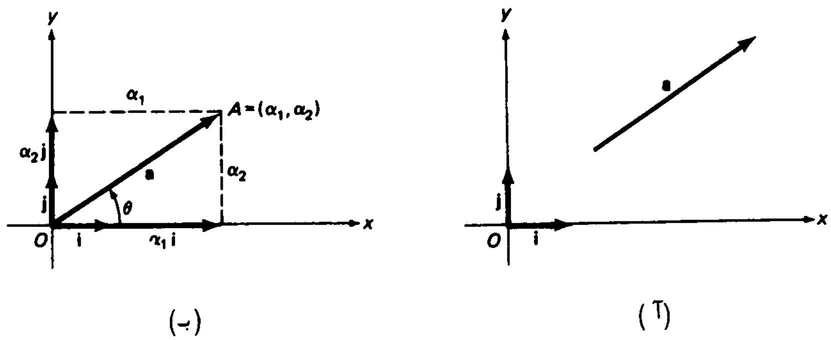
یک بردار یکه است ، زیرا

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

مؤلفه‌های یک بردار. تا بحال بحث ما از بردارها صرفا" هندسی و " فارغ از مختصات " بوده است . حال دستگاهی از مختصات قائم x و y در صفحه به مبداء O اختیار می‌کنیم . فرض‌کنیم $\mathbf{i}$ بردار یکه در امتداد محور x مثبت و $\mathbf{j}$ بردار یکه در امتداد محور y مثبت ، مثل شکل ۱۲ (آ) باشد . در این صورت ، هر بردار $\mathbf{a}$ در صفحه نمایش منحصر به فردی به شکل زیر دارد :

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}. \tag{۶}$$

اسکالرهای α_1 و α_2 ، به‌نام مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ ،به‌صورت زیر تعیین می‌شوند . بردار $\mathbf{a}$ را انتقال می‌دهیم ، یعنی آن را به موازات خود بدون دوران حرکت می‌دهیم ، تا آنکه‌نقطهٔ شروعش با مبداء O یکی شود . در این صورت ، نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ نقطهٔ $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ از صفحهٔ xy بوده ، و البته $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ، زیرا تمام انتقالهای یک بردار باهم مساویند . اما ، همانطورکه از شکل ۱۲ (ب) معلوم است ، مختصات α_1 و α_2 نقطهٔ A دقیقا " اسکالرهایی هستند که در نمایش یا " بسط " (۶) به‌کار می‌روند . به‌علاوه ، اندازهٔ $\mathbf{a}$ چیزی جز فاصلهٔ O تا A نیست؛



شکل ۱۲

یعنی ،

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}. \qquad (۷)$$

شکل همچنین نشان می‌دهد که هرگاه θ زاویهٔ بین محور x مثبت و بردار $\mathbf{a}$ باشد ، آنگاه

$$\alpha_1 = |\mathbf{a}| \cos \theta, \qquad \alpha_2 = |\mathbf{a}| \sin \theta.$$

منظور از **پایه** در صفحه یعنی دوبردار ثابت $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ ،به‌نام **بردارهای‌پایه** ،به طوری که هر بردار دلخواه $\mathbf{a}$ در صفحه نمایش منحصر به فردی به شکل

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2, \qquad (۶')$$

به نام **بسط** $\mathbf{a}$ نسبت‌به $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ ،داشته‌باشد . دراین‌صورت ، اسکالرهای α_1 و α_2 **مؤلفه‌های** $\mathbf{a}$ (نسبت به $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$) نام‌دارند . می‌توان نشان داد که دو بردار ناصفر $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ یک‌پایه در صفحه تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر **غیر همخط** باشند؛ یعنی ، اگر و فقط اگرخطی شامل (یا موازی) هر دو بردار موجود نباشد . اگر بردارهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ یک پایه برهم عمودباشند، پایه **متعامد** نام دارد ، و اگر علاوه‌بر عمود بودن بردارهای **یکه** نیز باشند ، پایه **متعامدیکه** نامیده می‌شود . مثلا " ، بردارهای‌یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ درامتداد محورهای مختصات یک‌پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند . توجه کنید که فرمول (۷) فقط برای پایهٔ متعامد یکه برقرار است (چرا؟) .

بردارها به عنوان جفتهای مرتب. بنابر نکات فوق، از اینجا به بعد از جفتهای‌مرتب برای نمایش نقاط و بردارها در صفحه استفاده می‌کنیم. لذا، (α_1, α_2) ممکن است به‌معنی نقطه به مختصات قائم α_1 و α_2 یا بردار $\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}$ به مؤلفه‌های α_1 و α_2 (نسبت به پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ زمینه) باشد. چون $\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ و $\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$، جفتهای مرتب نمایش خود بردارهای پایه مساویند با

$$\mathbf{i} = (1, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1).$$

حال اعمال جبری بر بردارها را از دیدگاه جفتهای مرتب تعبیر می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ بردارهای دلخواهی باشند. در این صورت،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}) + (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j}) = (\alpha_1\mathbf{i} + \beta_1\mathbf{i}) + (\alpha_2\mathbf{j} + \beta_2\mathbf{j}),$$

و لذا، به کمک (۴)،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{j}, \tag{۸}$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2). \tag{۸'}$$

هرگاه p اسکالر باشد، آنگاه $p\mathbf{a} = p(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j})$؛ و لذا، به کمک (۵)،

$$p\mathbf{a} = p\alpha_1\mathbf{i} + p\alpha_2\mathbf{j}, \tag{۹}$$

یا

$$p(\alpha_1, \alpha_2) = (p\alpha_1, p\alpha_2). \tag{۹'}$$

پس از (۸′) نتیجه می‌شود که به ازای هر بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$،

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (0, 0) = (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

درنتیجه، $(0, 0)$ جفت مرتبی *است که بردار* صفر $\mathbf{0}$ *را نمایش می‌دهد*. برای به دست‌آوردن جفت مرتب نمایش $-\mathbf{a}$، در فرمول (۹) قرار می‌دهیم $p = -1$، به دست می‌آید $-\mathbf{a} = -\alpha_1\mathbf{i} - \alpha_2\mathbf{j}$، یا معادلاً

$$-\mathbf{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2).$$

به‌علاوه، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$؛ درنتیجه،

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2) + (-\beta_1, -\beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2) \tag{۱۰}$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2) - (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2). \tag{۱۰'}$$

دوبردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ مساویند اگروفقط اگر $\alpha_1 = \beta_1$ و $\alpha_2 = \beta_2$؛ یعنی اگر و فقط اگر هر دو با یک جفت مرتب نموده شوند. این امر از شکل ۱۲ (ب) واضح است،

زیرا بردارهای مساوی یا منطبق‌اند یا اشکال انتقال یافتهٔ هم می‌باشند. لذا، اگر $\mathbf{b} = \mathbf{a}$، بردار $\mathbf{b}$، پس از انتقال نقطهٔ شروع $\mathbf{b}$ به مبداء، بر $\overrightarrow{OA}$ منطبق می‌شود؛ درنتیجه، $\mathbf{b}$ مانند $\mathbf{a}$ با جفت مرتب $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ نموده می‌شود.

مثال ۳. فرض کنید $\mathbf{a} = (5, -1)$، $\mathbf{b} = (1, 6)$، و $\mathbf{c} = (0, -2)$. بردار $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ را حساب کرده، و سپس اندازه‌اش را بیابید.

حل. از قواعد (۸) تا (۱۰) آزادانه استفاده می‌کنیم، داریم

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c} = (5, -1) - 2(1, 6) + 4(0, -2)$$
$$= (5 - 2 + 0, -1 - 12 - 8) = (3, -21),$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 21\mathbf{j}.$$

بنابر فرمول (۷)، اندازهٔ این بردار مساوی است با

$$|3\mathbf{i} - 21\mathbf{j}| = \sqrt{3^2 + (-21)^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}.$$

مثال ۴. بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را همجهت بردار $12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ بیابید.

حل. اندازهٔ $12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ مساوی است با

$$|12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13,$$

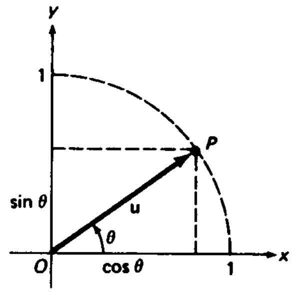
و درنتیجه،

$$\mathbf{u} = \frac{12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{|12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}|} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}.$$

مثال ۵. بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را طوری بیابید که با محور x مثبت زاویهٔ θ بسازد.

حل. اگر نقطهٔ شروع $\mathbf{u}$ را مبداء O بگیریم، نقطهٔ پایانش P به مختصات قطبی $|\mathbf{u}| = 1, \theta$ بوده و مختصات قائم آن، مثل شکل ۱۳، مساوی $|\mathbf{u}| \sin\theta = \sin\theta$, $|\mathbf{u}| \cos\theta = \cos\theta$ می‌باشند بنابراین،

$$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}.$$



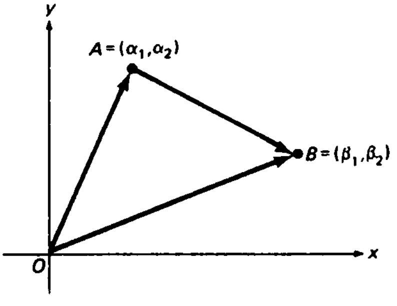
شکل ۱۳

برای بردار یکهٔ **u** در مثال ۴ داریم $\theta = \arctan \frac{5}{12} \approx 22.6°$.

مثال ۶. مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ با نقطهٔ شروع $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ و نقطهٔ پایان $B = (\beta_1, \beta_2)$ را بیابید.

حل. با رسم *بردارهای موضع* نقاط A و B ، یعنی بردارهای واصل از مبداء O به A و B ، معلوم می‌شود که، مثل شکل ۱۴ ، $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. بنابراین ،

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\beta_1, \beta_2) - (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2)$$



شکل ۱۴

یا $\overrightarrow{AB} = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{i} + (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{j}$. مثلاً، هرگاه $A = (-2, 3), B = (4, -1)$ ، آنگاه $\overrightarrow{AB} = (4 - (-2), -1 - 3) = (6, -4) = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، بردارها ابزار توانایی در اثبات قضایای هندسی

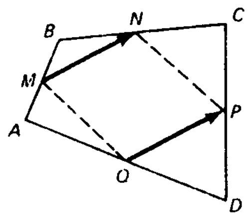
می‌باشند .

مثال ۷. نشان‌دهید که شکل حاصل‌از وصل نقاط میانی اضلاع مجاور هر چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است .

حل . فرض کنیم M ، N ، P ، و Q نقاط میانی اضلاع AB ، BC ، CD ، و DA باشند (ر.ک. شکل ۱۵) . در این صورت ،

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

بنابراین ، $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ ؛ یعنی ، دو ضلع مقابل چهارضلعی $MNPQ$ مساوی و موازیند ؛ در نتیجه ، $MNPQ$ یک متوازی‌الاضلاع می‌باشد . همین برهان در بعد سه کار می‌کند ؛ پس‌لازم نیست چهارضلعی $ABCD$ یک شکل مسطح باشد!



شکل ۱۵

چند مفهوم از جبرخطی . در خاتمه ، چند ایده را لمس می‌کنیم که در **جبر خطی** ، که‌مبحث جا افتاده‌ای در برنامهٔ ریاضیات لیسانس است ، نقش کلیدی دارند . منظور از **ترکیب‌خطی** n بردار $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ یعنی عبارتی به شکل

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n, \qquad (۱۱)$$

که در آن ضرایب $c_1, c_2, \ldots, c_n$ اسکالرند . (۱۱) خود بوضوح بردار است ؛ و در واقع ، قبلاً دیدیم که هر بردار دلخواه در صفحه ترکیبی خطی از بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ می‌باشد. ترکیب خطی (۱۱) را **بدیهی** گوییم اگر تمام ضرایب $c_1, c_2, \ldots, c_n$ صفر باشند (دراین

صورت ، مساوی بردار صفر است) ، و *نابدیهی* خوانیم اگر دست کم یکی از ضرایب ناصفر باشد . بردارهای $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ را *وابستهٔ خطی* گوییم اگر ترکیب خطی نابدیهی از $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ مساوی صفر باشد ؛ یعنی ، اگر بسطی به شکل (۱۱) با دست کم یک ضریب ناصفر داشته باشیم که مساوی بردار صفر باشد ؛ در غیر این صورت ، گوییم $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *مستقل خطی* می‌باشند . مثلاً ، بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ مستقل خطی‌اند ، زیرا

$$c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (c_1, c_2) = \mathbf{0}$$

اگر و فقط اگر $c_1 = c_2 = 0$ ، ولی بردارهای $\mathbf{a}_1 = (1, 2), \mathbf{a}_2 = (3, 4), \mathbf{a}_3 = (2, 3)$ وابستهٔ خطی‌اند ، زیرا

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3 &= (1, 2) + (3, 4) - 2(2, 3)\\ &= (1 + 3 - 4, 2 + 4 - 6) = (0, 0) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

به‌طورکلی ، می‌توان نشان داد که *هر سه بردار در صفحه وابستهٔ خطی بوده ، و دو بردار در صفحه مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر غیرهمخط باشند* .

مسائل

بردارهای داده شده را در یک دستگاه مختصات قائم (با اختیار مبداء به عنوان نقطهٔ شروع مشترک) رسم نمایید .

۱. $-2\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, -3\mathbf{j}$

۲. $\frac{3}{2}\mathbf{j}, \mathbf{i} - \mathbf{j}, -2\mathbf{i} + \mathbf{j}, 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

در هر یک از مسائل زیر ، بردارهای $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ، $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ، $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ ، و $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ را پیدا نمایید .

۳. $\mathbf{a} = (1, -5), \mathbf{b} = (3, 6)$

۴. $\mathbf{a} = (2, 0), \mathbf{b} = (0, -2)$

۵. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

۶. $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

۷. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۸. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 9\mathbf{j}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

۹. $\mathbf{a} = (1, 1), \mathbf{b} = (1, -1)$

۱۰. $\mathbf{a} = (6, -5), \mathbf{b} = (-4, 3)$

بردار $\overrightarrow{AB}$ با نقاط انتهایی داده شده را بیابید .

۱۱. $A = (-3, 0), B = (0, 6)$

۱۲. $A = (3, 5), B = (4, 7)$

۱۳. $A = (1, -4), B = (-1, -9)$

۱۴. $A = (-5, 10), B = (0, 0)$

۱۵. $A = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), B = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

۱۶. $A = (-\sin \frac{1}{4}\pi, \cos \frac{1}{4}\pi), B = (\cos \frac{1}{4}\pi, \sin \frac{1}{4}\pi)$

۱۷. نقطهٔ پایان بردار $-7\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ عبارت است از $(3, -11)$. نقطهٔ شروعش چیست ؟

۱۸. نقطهٔ شروع بردار $5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ عبارت است از $(-4, 8)$. نقطهٔ پایانش چیست ؟

اندازهٔ بردار داده شده را بیابید .

۱۹. $\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

۲۰. $\alpha\mathbf{i}$

۲۱. $-\beta\mathbf{j}$

۲۲. $-7\mathbf{i} + 24\mathbf{j}$

۲۳. $35\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

۲۴. $-\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{11}\mathbf{j}$

۲۵. اندازهٔ کدامیک از بردارهای $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ بزرگتر است ؟

۲۶. برداری با نصف اندازهٔ $16\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ و جهت مخالف آن را بیابید .

بردار یکهٔ همجهت برداردادهشده را بیابید .زاویهازمحور x مثبت بهاین جهت چقدراست ؟

۲۷. $\mathbf{i} + \mathbf{j}$

۲۸. $\mathbf{i} - \mathbf{j}$

۲۹. $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۳۰. $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

۳۱. $-6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

۳۲. $40\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

بردار یکهای را بیابید که با محور x مثبت زاویهٔ داده شده را بسازد .

۳۳. $5\pi/3$

۳۴. $7\pi/6$

۳۵. $3\pi/4$

برداری به اندازهٔ 4 بیابید که با محور x مثبت زاویهٔ داده شده را بسازد .

۳۶. $3\pi/2$

۳۷. $\arctan \frac{2}{3}$

۳۸. $-\pi/4$

۳۹. فرض کنید $\mathbf{a} = (7, -1), \mathbf{b} = (13, 2), \mathbf{c} = (4, 5)$. بردار $\mathbf{x}$ را طوری بیابید که $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{x} = 3\mathbf{c} - \mathbf{x}$.

۴۰. با شروع از فرمول (۸) ، تعویضپذیری و شرکتپذیری جمع برداری را به طور جبری ثابت کنید .

۴۱. فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای موضع دو نقطهٔ A و B نسبت به مبداء O باشند . نشان دهید که نقطهٔ پایان P بردار $(1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\ (0 \le t \le 1)$ پارهخط AB را بهنسبت $t:(1 - t)$ تقسیم میکند ؛ و بخصوص ، نقطهٔ میانی AB دارای بردار موضع $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ میباشد .

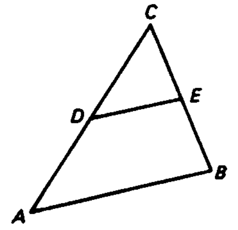
۴۲. چه وقت نامساوی مثلثی (۳) به صورت تساوی درمیآید ؟ (فرضکنید $\mathbf{a} \ne \mathbf{0}, \mathbf{b} \ne \mathbf{0}$.)

۴۳. نامساوی $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \ge ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}||$ را به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ثابت کنید .

به کمک بردارها ثابت کنید که

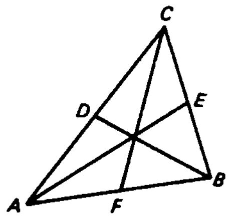
۴۴. اقطار یک متوازیالاضلاع یکدیگر را نصف میکنند .

۴۵ . پاره‌خط واصل بین نقاط میانی دو ضلع یک مثلث نصف ضلع سوم و موازی آن است (ر.ک. شکل ۱۶)



شکل ۱۶

۴۶ . میانه‌های یک مثلث در نقطه‌ای متقاطعند که روی هر یک در دوسوم از رأس واقع است (ر.ک. شکل ۱۷)



شکل ۱۷

راهنمایی . از مسئلهٔ ۴۱ استفاده کنید .

۴۷ . نشان دهید که بردارهای $\mathbf{e}_1 = (1, 1)$ و $\mathbf{e}_2 = (1, 2)$ یک پایهٔ غیرمتعامد تشکیل می‌دهند. بردار $\mathbf{a} = (-3, 5)$ را نسبت به $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بسط دهید .

۴۸ . هر یک از بردارهای $\mathbf{a} = (3, -2), \ \mathbf{b} = (-2, 1), \ \mathbf{c} =(7, -4)$ را به صورت ترکیبی‌خطی از دو تای دیگر بیان نمایید .

۴۹ . تمام بردارهایی را بیابید که با بردار $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ پایهٔ متعامد تشکیل دهند .

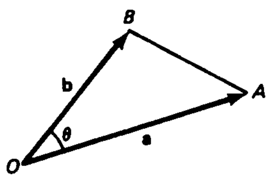
۵۰ . فرض کنید $\mathbf{a} = (3, -1), \ \mathbf{b} = (1, -2), \ \mathbf{c} = (-1, 7)$. بردار $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ را به‌صورت‌ترکیبی خطی از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بیان نمایید .

۵۱ . ناخدای یک قایق ماهیگیری ،که باسرعت ۱۰ گره به‌شرق می‌رود ، درمی‌یابدکه‌ظاهرا " باد مستقیما " از شمال به جنوب می‌وزد . وقتی سرعت قایق دوبرابر شود ، ظـاهرا " از شمال شرقی می‌وزد . سرعت واقعی باد چقدر است؟

۵۲. هواپیمایی با سرعت 240 km/hr در بادی با سرعت 60 km/hr که مستقیماً " از شرق به غرب می‌وزد به سوی شمال درحال پرواز است. سرعت هواپیما نسبت به هوا و جهت این سرعت را پیدا نمایید.

۲.۱۱ حاصل‌ضرب نقطه‌ای

مفهوم " حاصل‌ضرب نقطه‌ای " دوبردار در مسئلهٔ هندسی یافتن مؤلفهٔ یک بردار در امتداد برداری دیگر و نیز در مسئلهٔ فیزیکی یافتن کار انجام شده به‌وسیلهٔ نیرویی‌که در جهت حرکت یک جسم بر آن اثر نمی‌کند ظاهر می‌شود (هر دو مسئله درآخر این بخش حل خواهند شد). برای تعریف حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار، لازم است زاویهٔ بین‌آنها را بدانیم. فرض‌کنیم دوبردار ناصفر **a** و **b** طوری قرار داشته باشند که نقاط شروعشان O بوده و، مثل شکل ۱۸، $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$.



زاویهٔ بین **a** و **b** مساوی θ است.

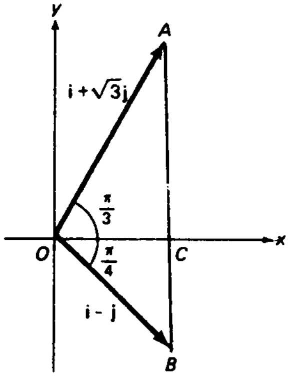
شکل ۱۸

دراین صورت، منظور از زاویهٔ بین **a** و **b** (با هر ترتیب) یعنی زاویهٔ θ در رأس O مثلث AOB. اگر **a** و **b** موازی باشند، یعنی $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$ که در آن p اسکالر است، مثلث " فرو می‌ریزد "، و در این حالت تعریف می‌کنیم $\theta = 0$ اگر $p > 0$ و $\theta = \pi$ اگر $p < 0$. توجه کنید که θ همواره در بازهٔ $0 \le \theta \le \pi$ قرار دارد.

مثال ۱. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ را بیابید.

حل. باتوجه به شکل ۱۹، معلوم می‌شود که زاویهٔ AOC مساوی است با $\arctan\sqrt{3} = \pi/3$، ولی زاویهٔ BOC برابر است با $\arctan 1 = \pi/4$. لذا، زاویهٔ AOB بین **a** و **b** مجموع زیر می‌باشد:

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} = 105°.$$



شکل ۱۹

تعریف حاصل‌ضرب نقطه‌ای. اکنون *حاصل‌ضرب نقطه‌ای* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را بافرمول

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta \qquad (۱)$$

تعریف می‌کنیم ،که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است . هرگاه $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ یا $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ، آنگاه θ تعریف نشده است ، و طبق تعریف قرار می‌دهیم $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. حاصل‌ضرب نقطه‌ای ، که به خاطر آمدن نقطه در عبارت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ این نام را یافته است ، *حاصل‌ضرب اسکالر* نیز خوانده می‌شود ، زیرا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ یک‌عدد یعنی یک اسکالر می‌باشد[۱] . از تعریف (۱) فوراً معلوم می‌شود که حاصل ضرب نقطه‌ای تعویضپذیر است :

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}.$$

زاویهٔ بین یک بردار با خودش صفر است . لذا ،

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}|^2.$$

بخصوص ، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$ اگر و فقط اگر $|\mathbf{a}|=0$ ؛ یعنی ، اگر و فقط اگر $\mathbf{a}=\mathbf{0}$. حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ مساوی صفر است اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{b}$ عمود باشد ، که نوشته می‌شود $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ ، و بردار صفر بر هر بردار عمود فرض می‌شود . در واقع ، فرمول

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = 0 \qquad (0\le\theta\le\pi)$$

برقرار است اگر و فقط اگر $\cos\theta=0$ ؛ و درنتیجه ، $\theta=\pi/2$ ، یا دست‌کم یکی‌ازبردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ صفر باشد ؛ لذا ، در هر حالت ، $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

---

۱ . در بخش ۱۲ . ۳ نوع دیگری از حاصل ضرب دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ معرفی می‌شود ، که‌به‌جای اسکالر بودن بردار است و به جای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ به صورت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نوشته می‌شود .

شکل مولفه‌ای حاصل‌ضرب نقطه‌ای . حال برای حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ عبارتی برحسب موءلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نسبت به بردارهای پایهٔ $\mathbf{i}=(1,0)$ و $\mathbf{j}=(0,1)$ پیدا می‌کنیم .

قضیهٔ ۱ (شکل مؤلفه‌ای حاصل‌ضرب نقطه‌ای) . *هرگاه* $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}$ *و* $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j}$ *یا معادلا"* $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2)$ *و* $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2)$ *، آنگاه*

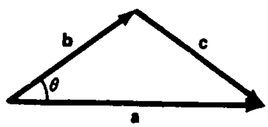
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2. \qquad (۲)$$

برهان . فرض کنیم

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=(\alpha_1-\beta_1)\mathbf{i}+(\alpha_2-\beta_2)\mathbf{j}.$$

با اعمال قانون کسینوسها (قضیهٔ ۲ ، صفحهٔ ۹۲) بر مثلث شکل ۲۰ به اضلاع $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ،و $\mathbf{c}$ ، به دست می‌آوریم

$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta,$$



شکل ۲۰

که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است . بنابراین ،

$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

درنتیجه ،

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2). \qquad (۳)$$

ولی

$$|\mathbf{a}|^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2, \qquad |\mathbf{b}|^2=\beta_1^2+\beta_2^2,$$

$$|\mathbf{c}|^2=(\alpha_1-\beta_1)^2+(\alpha_2-\beta_2)^2=\alpha_1^2-2\alpha_1\beta_1+\beta_1^2+\alpha_2^2-2\alpha_2\beta_2+\beta_2^2,$$

و با گذاردن این عبارات در (۳) به جای $|\mathbf{a}|^2$ ، $|\mathbf{b}|^2$ ،و $|\mathbf{c}|^2$ ، فورا" (۲) به دست خواهد آمد .

نتیجه . *هرگاه* p *و* q *اسکالر باشند ، آنگاه به ازای بردارهای دلخواه* $\mathbf{a}$ *و* $\mathbf{b}$ *،*

$$(p\mathbf{a})\cdot(q\mathbf{b})=pq(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad (۴)$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای در قوانین پخشپذیری

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \tag{۵}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \tag{۵'}$$

به ازای بردارهای دلخواه **a** ، **b** ،و **c** نیز صدق می‌کنند.

برهان . فرض کنیم

$$\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j},\qquad \mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}+\beta_2\mathbf{j},\qquad \mathbf{c}=\gamma_1\mathbf{i}+\gamma_2\mathbf{j}$$

(γ گامای کوچک یونانی است) . در این صورت ،

$$p\mathbf{a}=p\alpha_1\mathbf{i}+p\alpha_2\mathbf{j},\qquad q\mathbf{b}=q\beta_1\mathbf{i}+q\beta_2\mathbf{j},$$

و

$$\mathbf{b}+\mathbf{c}=(\beta_1+\gamma_1)\mathbf{i}+(\beta_2+\gamma_2)\mathbf{j}.$$

لذا ،

$$(p\mathbf{a})\cdot(q\mathbf{b})=(p\alpha_1)(q\beta_1)+(p\alpha_2)(q\beta_2)=pq(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)=pq(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$$

که (۴) را ثابت می‌کند . همچنین ،

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\alpha_1(\beta_1+\gamma_1)+\alpha_2(\beta_2+\gamma_2)=\alpha_1\beta_1+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_2\gamma_2,$$

ولی

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)+(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2),$$

که (۵) را ثابت خواهد کرد ، زیرا طرفهای راست این دو فرمول مساوی می‌باشند . بالاخره برای اثبات (۵') ، از (۵) و تعویضپذیری حاصل‌ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

مثال ۲ . بنابر فرمول (۲) ، حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a}=(2, 5)$ و $\mathbf{b}=(4, -1)$ عبارت است از $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2(4)+5(-1)=8-5=3$.

مثال ۳ . با استفاده از قوانین پخشپذیری (۵) و (۵') ، معلوم می‌شود که به ازای بردارهای دلخواه **a** ، **b** ، **c** ، و **d** ،

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$$

بخصوص ،

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2&=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\&=|\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

در اینجا $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ یعنی $2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ و، به‌طورکلی، $p\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ یعنی $p(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

به ازای بردارهای یکهٔ $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$ داریم

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1(1) + 0(0) = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 1(0) + 0(1) = 0, \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 0(0) + 1(1) = 1,$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \qquad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1.$$

این فرمولهای اساسی را باید حفظ کرد. با استفاده از آنها معلوم می‌شود که هرگاه $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}$، آنگاه

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j})\cdot\mathbf{i} = \alpha_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = \alpha_1,$$

و به همین نحو،

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{j} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j})\cdot\mathbf{j} = \alpha_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \alpha_2.$$

مثال ۴. بردارهای $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ به ازای چه مقدار از پارامتر t موازیند؟ برهم عمودند؟

حل. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی (یا همخط) اند اگر و فقط اگر به ازای اسکالر ناصفری چون $p \neq 0$، $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$؛ یعنی، $3\mathbf{i} + \mathbf{j} = p(-2\mathbf{i} + t\mathbf{j})$. با گرفتن مؤلفه و حل دستگاه معادلات حاصل $-2p = 3,\ pt = 1$، معلوم می‌شود که $p = -\frac{3}{2},\ t = 1/p = -\frac{2}{3}$. بردارها بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$؛ یعنی، $(3\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot(-2\mathbf{i} + t\mathbf{j}) = -6 + t = 0$ یا $t = 6$.

فرض کنیم θ زاویهٔ بین بردارهای ناصفر $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j}$ باشد. پس از تعریف (۱) حاصلضرب نقطه‌ای نتیجه می‌شود که

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \tag{۶}$$

اما $|\cos\theta| \le 1$؛ و درنتیجه،

$$\left|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\right| \le 1,$$

یا معادلاً

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|. \tag{۷}$$

فرمولهای (۶) و (۷) برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ خواهند شد

$$\cos\theta = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \tag{۶'}$$

و

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \le \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}. \qquad (۷')$$

نامساوی (۷′) حالت خاصی از *نامساوی کشی ــ شوارتز*[1] است (ر.ک. مسئلهٔ ۴۷). توجه کنید که در (۷) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\cos\theta = \pm 1$؛ یعنی، اگر و فقط اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$؛ دراین‌حالت **a** و **b** موازی و همجهت‌اند اگر $\theta = 0$ ومختلف‌الجهت‌اند اگر $\theta = \pi$. همچنین، توجه‌کنید که زاویهٔ θ حاده است $(0 < \theta < \pi/2)$ اگر $0 < \cos\theta < 1$ و منفرجه است $(\pi/2 < \theta < \pi)$ اگر $-1 < \cos\theta < 0$.

مثال ۵. زاویهٔ θ بین بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ را بیابید.

حل. دراینجا داریم

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1(2) - 1(1) = 1, \qquad |\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

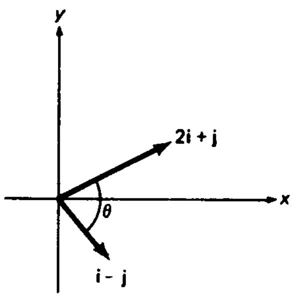
بنابراین، طبق (۶)،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71.6^\circ$$

(ر.ک. شکل ۲۱).



شکل ۲۱

1. *Cauchy–Schwarz*

تصویر یک بردار روی دیگری. فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار ناصفر باشند. در این صورت، منظور از *مؤلفهٔ* $\mathbf{a}$ *در امتداد* $\mathbf{b}$، که به صورت $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ نوشته می‌شود، یعنی *اسکالری* که مساوی حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u_b}$ است، که در آن $\mathbf{u_b}$ بردار یکه‌ای در جهت $\mathbf{b}$ می‌باشد. چون

$$\mathbf{u_b} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

داریم

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

یا معادلاً "

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\theta,$$

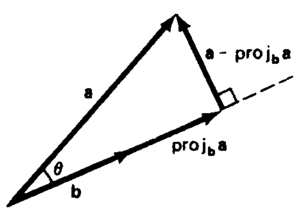
که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می‌باشد. منظور از **تصویر** $\mathbf{a}$ **روی** $\mathbf{b}$، که با $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ نموده می‌شود، یعنی *برداری* با اندازهٔ $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ و موازی $\mathbf{b}$؛ یعنی،

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = (\mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a})\mathbf{u_b}.$$

می‌توان برحسب حاصلضرب نقطه‌ای نوشت

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{u_b} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}.$$

در شکل ۲۲، $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ تعبیر هندسی شده است. توجه کنید که اگر نقاط شروع $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یکی باشند، نقطهٔ پایان $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ پای عمود وارد از نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ به خط شامل $\mathbf{b}$ است. پس نتیجه می‌شود که بردار $\mathbf{a} - \mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$، طبق شکل، بر $\mathbf{b}$ عمود می‌باشد.



تجزیهٔ a به مؤلفه‌ها در
امتداد b و عمود بر b

شکل ۲۲

لذا، $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت مجموع بردار $\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ موازی $\mathbf{b}$ و بردار $\mathbf{a} - \mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ عمود

بر $\mathbf{b}$ نمایش داد . این بردارها به مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}$ (یا موازی $\mathbf{b}$) ومؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ **متعامد به** $\mathbf{b}$ (" متعامد " مترادف " عمود برهم " است) نیز شهرت دارند .

مثال ۶ . $\operatorname{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ و $\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ را درصورتی‌بیابید که $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$. $\mathbf{a}$ را به‌صورت مجموعی از یک بردار موازی $\mathbf{b}$ و یک بردار متعامد به $\mathbf{b}$ نمایش دهید .

حل . چون

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3(5) + 2(-1) = 13, \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26},$$

داریم

$$\operatorname{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{13}{\sqrt{26}},$$

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (\operatorname{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a})\mathbf{u}_{\mathbf{b}} = \frac{13}{\sqrt{26}} \frac{5\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{26}} = \frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

بردار

$$\mathbf{a} - \operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - \left(\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}$$

متعامد به $\mathbf{a}$ است . لذا ، نمایش $\mathbf{a}$ به صورت مجموع برداری موازی $\mathbf{b}$ و برداری متعامد به $\mathbf{b}$ عبارت است از

$$\mathbf{a} = \left(\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}\right).$$

کار به عنوان حاصلضرب نقطه‌ای . فرض کنیم جسمی تحت اثر نیروی ثابت F که در امتداد خط حرکت اثر می‌کند مسافت d را طی کرده باشد . همانطور که از مثال ۵ ، صفحهٔ ۴۳۰ ، می‌دانیم ، کار این نیرو از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$W = Fd. \tag{۸}$$

برای تعمیم این فرمول به حالتی که $\mathbf{F}$ **بردار** ثابتی است که کلاً " در امتداد حرکت اثر نمی‌کند ، به صورت زیر استدلال می‌کنیم . فرض کنیم تغییر مکان جسم بردار $\mathbf{d}$ بوده ، و θ زاویهٔ بین $\mathbf{F}$ و $\mathbf{d}$ باشد . همچنین ،

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

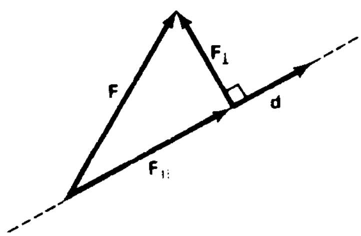
که در آن

$$\mathbf{F}_{\|} = \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{F} = \frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{d})\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$$

مؤلفهٔ برداری **F** موازی **d** بوده و

$$\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F} - \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}\,\mathbf{F}$$

مؤلفهٔ برداری **F** متعامد به **d** است (ر.ک. شکل ۲۳) . مؤلفهٔ $\mathbf{F}_{\perp}$ حرکتی درامتداد **d** تولید نمی‌کند؛ و درنتیجه، از دیدگاه حرکت در امتداد **d** ، نیروی **F** را می‌توان با $\mathbf{F}_{\|}$ عوض‌کرد.



شکل ۲۳

لذا، تمام کار به‌وسیلهٔ $\mathbf{F}_{\|}$ انجام شده است؛ درنتیجه، بنابر فرمول (۸)،

$$W = \begin{cases} |\mathbf{F}_{\|}|\,|\mathbf{d}| & \text{اگر}\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ -|\mathbf{F}_{\|}|\,|\mathbf{d}| & \text{اگر}\ \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$$

اما

$$|\mathbf{F}_{\|}|\,|\mathbf{d}| = \frac{|\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}|\,|\mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|^2}\,|\mathbf{d}| = |\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}|$$

$$= \begin{cases} \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} & \text{اگر}\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ -\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} & \text{اگر}\ \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$$

و درنتیجه،

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}. \qquad (۸')$$

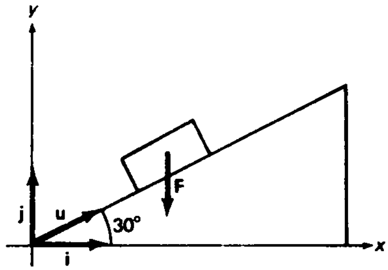
*لذا، کار حاصل‌ضرب نقطه‌ای نیروی **F** و تغییرمکان **d** است.*

در اینجا فرض است که **F** ثابت بوده و تغییر مکان مستقیم‌الخط است. در غیر این صورت، تعریف کار نیاز به مفهوم جدید "انتگرال خط" دارد، که در بخش ۱۰.۱۵ معرفی خواهد شد.

مثال ۷. یک قطعه الوار به وزن 4 lb از یک سطح شیب‌دار بدون اصطکاک که باافق زاویهٔ 30°

می‌سازد به بالا برده می‌شود. چقدر کار در مقابل ثقل انجام دهیم تا الوار 5 ft بالارود؟

حل. همانند شکل ۲۴، بردارهای یکهٔ **i** و **j** را در جهات افقی و قائم معرفی می‌کنیم. در



شکل ۲۴

این صورت، بردار یکه در جهت تغییر مکان $\mathbf{u} = \cos 30° \,\mathbf{i} + \sin 30° \,\mathbf{j}$ می‌باشد. نیروی ثقل قائم و رو به پایین اثر کرده و با اندازهٔ 4 lb است؛ درنتیجه، $\mathbf{F} = -4\mathbf{j}$، و بردار تغییر مکان نظیر به بالا بردن الوار به اندازهٔ 5 ft عبارت است از $\mathbf{d} = 5\mathbf{u}$. لذا، در این تغییر مکان، کار انجام شده توسط ثقل مساوی است با

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} &= (-4\mathbf{j})\cdot 5\mathbf{u} = -20\mathbf{j}\cdot(\cos 30°\,\mathbf{i} + \sin 30°\,\mathbf{j})\\ &= -20\sin 30° = -10 \text{ ft-lb},\end{aligned}$$

و کار انجام شده در *مقابل* ثقل برابر است با $-\mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = 10$ ft-lb.

مسائل

حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ بردارهای داده شده و نیز زاویهٔ بین بردارها را بیابید.

۱. $\mathbf{a} = (-2, 1), \mathbf{b} = (3, 6)$ ✓

۲. $\mathbf{a} = (1, 1), \mathbf{b} = (-2, -2)$ ✓

۳. $\mathbf{a} = (1, 1), \mathbf{b} = (1, 0)$ ✓

۴. $\mathbf{a} = (3, 4), \mathbf{b} = (6, -8)$ ✓

۵. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i}$ ✓

۶. $\mathbf{a} = 16\mathbf{i}, \mathbf{b} = -19\mathbf{j}$ ✓

۷. $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ✓

۸. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 24\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ✓

کمیات زیر را با فرض اینکه زاویهٔ بین بردارهای **a** و **b** مساوی $2\pi/3$ بوده و $|\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 4$ پیدا نمایید.

۹. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ✓

۱۰. $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$ ✓

۱۱. $|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|^2$ ✓

۱۲. $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ ✓

۱۳. آیا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ که در آن $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ تساوی $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ را ایجاب می‌کند؟ جواب خود را توضیح دهید.

۱۴. نشان دهید که $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ متعامد به $\mathbf{b}$ است.

۱۵. فرض کنید $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ بردارهای یکه‌ای باشند که $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ را بیابید.

۱۶. چه وقت فرمول $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ به ازای بردارهای ناصفر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ برقرارند؟

۱۷. زوایای مثلث به رئوس $A=(1,0)$ ، $B=(1,3)$ ، و $C=(2,1)$ را بیابید.

۱۸. مثال ۱ را با فرمول (۶) امتحان کنید.

۱۹. نشان دهید که بردار $\mathbf{v}=|\mathbf{b}|\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نصف می‌کند.

۲۰. نشان دهید که بردارهای $\mathbf{v}=|\mathbf{b}|\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ و $\mathbf{w}=|\mathbf{a}|\mathbf{b}-|\mathbf{b}|\mathbf{a}$ متعامدند.

دو بردار یکه بیابید که به بردار داده شده متعامد باشند.

۲۱. $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ۲۲. $-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

۲۳. $6\mathbf{i}-8\mathbf{j}$ ۲۴. $-5\mathbf{i}-12\mathbf{j}$

۲۵. دو بردار یکه بیابید که با بردار $-4\mathbf{i}+\mathbf{j}$ زاویهٔ $\pi/4$ بسازند.

۲۶. اگر $|\mathbf{a}|=3, |\mathbf{b}|=5$ ، بردارهای $\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}-t\mathbf{b}$ به ازای چه مقادیری از t بر هم عمودند؟

۲۷. بردارهای $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=4t\mathbf{i}-5\mathbf{j}$ به‌ازای چه‌مقداری از t موازیند؟برهم عمودند؟

۲۸. بردارهای $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+6t\mathbf{j}$ به‌ازای چه‌مقداری از t موازیند؟برهم عمودند؟

۲۹. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}=\mathbf{i}+t\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ به ازای چه مقادیری از t مساوی $\pi/3$ است؟

فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ناصفری باشند. نشان دهید که

۳۰. $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمودند اگر $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$

۳۱. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از $\pi/2$ کوچکتر است اگر

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|>|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$$

۳۲. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از $\pi/2$ بزرگتر است اگر $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|<|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$.

۳۳. تحقیق کنید که به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=2|\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{b}|^2$.

۳۴. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ را درصورتی بیابید که $|\mathbf{a}|=11, |\mathbf{b}|=23, |\mathbf{a}-\mathbf{b}|=30$.

۳۵. نشان دهید که اقطار یک لوزی (متوازی‌الاضلاعی به اضلاع مساوی) برهم عمودند.

۳۶. نامساوی مثلثی $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ را به‌طور جبری ثابت کنید.

$\text{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ ، یعنی مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}$ ، را به ازای بردارهای داده شده $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ،

و نیز موٴلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ متعامد به $\mathbf{b}$ ، را بیابید .

۳۷. $\mathbf{a} = (3, 2), \mathbf{b} = (-1, -1)$

۳۸. $\mathbf{a} = (5, 1), \mathbf{b} = (-2, 10)$

۳۹. $\mathbf{a} = (-4, 7), \mathbf{b} = (3, 6)$

۴۰. $\mathbf{a} = (8, 0), \mathbf{b} = (4, 2)$

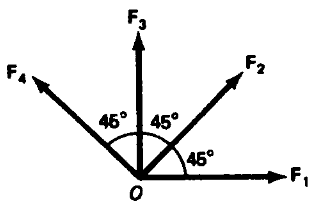
۴۱. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{j}$

۴۲. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

۴۳. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

۴۴. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

۴۵. هر یک از نیروهای شکل ۲۵ به‌اندازهٔ 10 lb بوده‌و بر نقطهٔ O وارد می‌شوند. اندازهٔ نیروی برآیند $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ را بیابید .



شکل ۲۵

۴۶. نامساوی (′۷) را مستقیما " ، بدون استفاده از بردارها ، ثابت کنید .

۴۷. ***نامساوی کشی ـ شوارتز کلی***

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}$$

را ثابت‌کنید ، که به ازای اعداد حقیقی دلخواه α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ برقرار است .

۴۸. یک بچه واگنی را با نیروی 50 lb در امتدادی که با افق زاویهٔ $60°$ می‌سازد به اندازهٔ 12 ft می‌کشد. نیرو چقدر کار انجام داده است ؟

۴۹. کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ را درصورتی بیابید که جسمی را در امتداد محور x از نقطهٔ $(-2, 0)$ تا نقطهٔ $(13, 0)$ حرکت داده باشد . در امتداد محور y از مبداٴ تا نقطهٔ $(0, -6)$ برده باشد . (نیرو به پوند و فاصله به فوت است .)

۵۰. اگر جرم 10-kg را از سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ $45°$ ساخته است به اندازهٔ 3 m بالا بریم ، چقدر کار در مقابل ثقل انجام داده‌ایم ؟ (g ، یعنی شتاب ثقل ، را $9.8\ \text{m/sec}^2$ بگیرید .)

۵۱. جسمی در امتداد یک خط مستقیم از نقطهٔ $(-3, -2)$ تا $(1, 11)$ تحت اثر دو نیروی $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_2 = -7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ حرکت می‌کند . کار انجام شده توسط این دو نیرو به طور همزمان را بیابید . (نیرو به دین و فاصله به سانتیمتر است .)

۵۲. با استفاده از بردارها، ثابت کنید ارتفاعات یک مثلث دریک نقطه متقاطع اند.
۵۳. نشان دهید که بردار (A, B) بر خط $Ax + By + C = 0$ عمود است.
۵۴. با استفاده‌از بردارها، قضیهٔ ۱۰ درصفحهٔ ۵۵ درموردفاصلهٔ بین‌نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ و خط $Ax + By + C = 0$ را به طریقی دیگر ثابت کنید.

۱۱.۳ توابع برداری؛ سرعت و بردار یکهٔ مماس

در زبانی که تا بحال به کار برده‌ایم، تابع قاعده‌ای است که ما را از یک *اسکالر*، یعنی شناسه، به *اسکالر* دیگر، یعنی مقدار آن (که منحصرا" با شناسه‌اش معین می‌شود) می‌برد. مثلا"، اگر $f(t) = \cos t$، تابع f، وقتی شناسه‌اش t مساوی $\pi/3$است، مقدار $\frac{1}{2}$ را به خود می‌گیرد. حال که کمیاتی کلیتر از اسکالرها، یعنی بردارها، معرفی شده‌اند، طبیعی است ببینیم وقتی مقدار یا شناسهٔ یک تابع *بردار* باشد چه رخ می‌دهد. بحث را با **توابع بردار مقدار**، یا به‌طورخلاصه **توابع برداری**، یعنی توابعی باشناسهٔ‌اسکالر که‌مقادیرشان بردارند، آغاز می‌کنیم. مثلا"، تابع برداری

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

وقتی شناسهٔ t آن اسکالر$\pi/3$است، مقدار $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$ را دارد. حالت پیچیده "میدان برداری" است؛ یعنی یک تابع برداری از یک شناسهٔ *برداری*، که بعدها مطرح خواهد شد (ر.ک. فصل ۱۵).

حد یک تابع برداری. حال به حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری می‌پردازیم. بحث را با مفهوم **حد** یک تابع برداری آغاز می‌کنیم. فرض کنیم بردار $\mathbf{L}$ چنان باشد که

$$\lim_{t\to a} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| = 0, \tag{1}$$

در آن ملاحظه می‌کنید که $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|$ یک اسکالر است، که اندازهٔ یک بردار می‌باشد. در این صورت، گوییم وقتی $t \to a$، $\mathbf{f}(t)$ به حد $\mathbf{L}$ نزدیک می‌شود، و می‌نویسیم وقتی $t \to a$، $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{L}$ یا

$$\lim_{t\to a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}.$$

ممکن است حدس زده باشید که تابع برداری $\mathbf{f}$ به حد $\mathbf{L}$ نزدیک می‌شود اگر و فقط اگر تک تک مؤلفه‌هایش به مؤلفه‌های $\mathbf{L}$ نزدیک گردند. قضیهٔ زیر دلیل این امر را به شما نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲ (حد یک تابع برداری برحسب مؤلفه‌های آن) . *تابع برداری*

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j},$$

که نسبت به *بردارهای‌پایهٔ* $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ *دارای‌مؤلفه‌های* $f_1(t)$ و $f_2(t)$ *است* ،به حد $\mathbf{L} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ نزدیک می‌شود *اگر و فقط اگر* مؤلفه‌هایش به *مؤلفه‌های* $\mathbf{L}$ نزدیک گردند ؛ یعنی ،

$$\lim_{t \to a} f_1(t) = A, \qquad \lim_{t \to a} f_2(t) = B. \tag{۲}$$

برهان (اختیاری) . ابتدا فرض می‌کنیم وقتی $t \to a$ ، $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{L}$ یا معادلاً " وقتی $t \to a$ ، $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| \to 0$. واضح است که

$$|f_1(t) - A| = \sqrt{[f_1(t) - A]^2} \le \sqrt{[f_1(t) - A]^2 + [f_2(t) - B]^2} = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|,$$
$$|f_2(t) - B| = \sqrt{[f_2(t) - B]^2} \le \sqrt{[f_1(t) - A]^2 + [f_2(t) - B]^2} = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|,$$

که در آنها ازاین استفاده‌شده‌است‌که $f_1(t) - A$ و $f_2(t) - B$ مؤلفه‌های $\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}$ می‌باشند. اما طرفهای راست‌این نامساویها بارفتن $t \to a$ به 0 نزدیک می‌شوند ؛ و درنتیجه ،طرفهای چپ نیز چنین می‌کنند ، که موجب اثبات (۲) می‌گردد .

به عکس ، فرض کنیم فرمولهای (۲) ، یا معادلاً "

$$\lim_{t \to a} |f_1(t) - A| = 0, \qquad \lim_{t \to a} |f_2(t) - B| = 0, \tag{۲'}$$

برقرار باشند . بنابر نامساوی مثلثی برای بردارها (فرمول (۳) ، صفحهٔ ۱۰۴۹) ، داریم

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| &= |[f_1(t) - A]\mathbf{i} + [f_2(t) - B]\mathbf{j}| \le |[f_1(t) - A]\mathbf{i}| + |[f_2(t) - B]\mathbf{j}| \\ &= |f_1(t) - A|\,|\mathbf{i}| + |f_2(t) - B|\,|\mathbf{j}| = |f_1(t) - A| + |f_2(t) - B|. \end{aligned}$$

ولی طرف راست این نامساوی ، وقتی $t \to a$ ، به خاطر (۲′) به 0 نزدیک می‌شود ؛ و در نتیجه ، طرف چپ نیز چنین می‌کند . بنابراین ، وقتی $t \to a$ ، $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| \to 0$ ؛ یعنی ، وقتی $t \to a$ ، $\mathbf{f}(t) \to \mathbf{L}$.

قضیهٔ ۲ محاسبات مثال زیر را (که در آن حد یک تابع برداری " مؤلفه به مؤلفه " گرفته می‌شود) توجیه خواهد کرد .

مثال ۱ . هرگاه

$$\mathbf{f}(t) = (t^2 + 2)\mathbf{i} + (\arctan t)\mathbf{j},$$

آنگاه

$$\lim_{t\to 1} \mathbf{f}(t) = \left[\lim_{t\to 1} (t^2+2)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t\to 1} \arctan t\right]\mathbf{j}$$
$$= (1^2+2)\mathbf{i} + (\arctan 1)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + \frac{\pi}{4}\mathbf{j}.$$

مشتقگیری از یک تابع برداری. پیوستگی و مشتقپذیری از توابع برداری همانند توابع اسکالر تعریف می‌شوند. لذا، گوییم تابع برداری $\mathbf{f}(t)$ در a پیوسته است اگر

$$\lim_{t\to a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(a)$$

و در a مشتقپذیر است اگر حد

$$\lim_{t\to a} \frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(a)}{t-a}, \qquad (۳)$$

یا معادلاً

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\mathbf{f}(a+\Delta t)-\mathbf{f}(a)}{\Delta t} \qquad (۳')$$

$(\Delta t = t-a)$ موجود و متناهی باشد. حد (۳) یا (۳′) مشتق $\mathbf{f}(t)$ در a نام دارد و با $\mathbf{f}'(a)$ نموده می‌شود.

از قضیهٔ ۲ معلوم می‌شود که تابع برداری $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ در نقطهٔ a پیوسته است اگر و فقط اگر هر دو مؤلفه $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در a پیوسته باشند. به همین نحو، با اعمال قضیهٔ ۲ بر مؤلفه‌های

$$\frac{f_1(t)-f_1(a)}{t-a}, \qquad \frac{f_2(t)-f_2(a)}{t-a}$$

خارج‌قسمت تفاضلی (۳)، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{f}'(a) = f'_1(a)\mathbf{i} + f'_2(a)\mathbf{j},$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. لذا، برای یافتن مشتق یک تابع برداری مشتقپذیر $\mathbf{f}(t)$، تابعی برداری تشکیل می‌دهیم که مؤلفه‌هایش مشتقات مؤلفه‌های $\mathbf{f}(t)$ می‌باشند. مثل همیشه، پیوستگی یا مشتقپذیری بر *بازهٔ* I یعنی پیوستگی یا مشتقپذیری در هر نقطه از I. نمادهای دیگر برای مشتق $\mathbf{f}'(t)$ عبارتنداز $\mathbf{D}_t\mathbf{f}(t)$ و $d\mathbf{f}(t)/dt$.

مثال ۲. چون e^t و $\ln t$ هر دو بر $I = (0, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیرند، تابع برداری

$$\mathbf{f}(t) = (e^t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j}$$

نیز بر I پیوسته و مشتقپذیر، با مشتق

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}(t) = \left(\frac{d}{dt}e^t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d}{dt}\ln t\right)\mathbf{j} = (e^t)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{t}\right)\mathbf{j}$$

می‌باشد.

مثال ۳. فرض کنیم $c(t)$ یک تابع اسکالر و $\mathbf{f}(t)$ یک تابع برداری بوده و هر دو بر بازهٔ I مشتقپذیر باشند. در این صورت،

$$\frac{d}{dt}[c(t)\mathbf{f}(t)] = \frac{d}{dt}[c(t)f_1(t)\mathbf{i} + c(t)f_2(t)\mathbf{j}]$$
$$= \frac{dc(t)}{dt}f_1(t)\mathbf{i} + c(t)\frac{df_1(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dc(t)}{dt}f_2(t)\mathbf{j} + c(t)\frac{df_2(t)}{dt}\mathbf{j},$$

و درنتیجه،

$$\frac{d}{dt}[c(t)\mathbf{f}(t)] = \frac{dc(t)}{dt}\mathbf{f}(t) + c(t)\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}.$$

این فرمول در حالت خاص که ثابت $c(t) \equiv c =$ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{d}{dt}[c\mathbf{f}(t)] = c\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}.$$

مثال ۴. فرض کنیم $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ دو تابع برداری باشند که هر دو بر بازهٔ I مشتقپذیر بوده و مؤلفه‌هایشان به‌ترتیب $f_1(t), f_2(t)$ و $g_1(t), g_2(t)$ باشند. دراین صورت، با حذف شناسه‌ها برای سادگی، معلوم می‌شود که مشتق حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$ مساوی است با

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \frac{d}{dt}(f_1g_1 + f_2g_2) = \frac{df_1}{dt}g_1 + f_1\frac{dg_1}{dt} + \frac{df_2}{dt}g_2 + f_2\frac{dg_2}{dt}$$
$$= \left(\frac{df_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{df_2}{dt}\mathbf{j}\right)\cdot(g_1\mathbf{i} + g_2\mathbf{j}) + (f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j})\cdot\left(\frac{dg_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg_2}{dt}\mathbf{j}\right),$$

یعنی،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}. \qquad (۴)$$

به تشابه بین این فرمول و قاعدهٔ مشابه آن برای مشتقگیری از حاصل‌ضرب دو تابع اسکالر

توجه نمایید . با اینحال ، حاصل‌ضربهای طرف راست (۴) حاصل‌ضرب معمولی نبوده بلکه حاصل‌ضربهایی *نقطه‌ای* می‌باشند .

مثال ۵ . فرض کنیم $\mathbf{f}(t)$ یک تابع برداری با اندازهٔ ثابت ولی جهت متغیر باشد . در این صورت ،

$$|\mathbf{f}(t)|^2 = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = c,$$

که در آن c اسکالر ثابتی است ؛ و درنتیجه ،

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{f}(t)|^2 = \frac{d}{dt}c = 0.$$

این را می‌توان به کمک (۴) به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{f}|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 2\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0$$

(مجددا " شناسه‌ها را حذف می‌کنیم) . بنابراین ،

$$\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0,$$

درنتیجه ، $\mathbf{f}$ به $d\mathbf{f}/dt$ متعامد می‌باشد . به عبارت دیگر ، ***یک تابع برداری با اندازهٔ ثابت همیشه به مشتق خود متعامد است .***

انتگرالگیری از یک تابع برداری . *انتگرال معین* تابع برداری $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ بـا فرمول

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\mathbf{j}, \qquad (۵)$$

یعنی با " مؤلفه به مؤلفه " انتگرالگیری ، تعریف می‌شود . اگر تابع $\mathbf{f}(t)$ پیوستـه بـاشـد ، مؤلفه‌هایش نیز چنین‌اند ؛ و درنتیجه ، هر دو انتگرال سمت راست (۵) وجود دارند ، که وجود انتگرال سمت‌چپ نتیجه‌می‌شود . اگر انتگرال $\mathbf{f}(t)$ را حد مجموع ریمان‌برداری مناسبی تعریف کنیم ، همان فرمول (۵) به دست می‌آید (ر.ک. مسئلهٔ ۳۴) .

مثال ۶ . هرگاه مثل مثال ۲

$$\mathbf{f}(t) = (e^t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j} \qquad (0 < t < \infty),$$

آنگاه

$$\int_1^2 \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_1^2 e^t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_1^2 \ln t\,dt\right)\mathbf{j}$$

$$= e^t\Big|_1^2\,\mathbf{i} + (t\ln t - t)\Big|_1^2\,\mathbf{j} = (e^2 - e)\mathbf{i} + (2\ln 2 - 1)\mathbf{j}.$$

منظور از یک *پاد* مشتق تابع برداری $\mathbf{f}(t)$ ، که بر بازهٔ I تعریف شده است ، یعنی تابعی چون $\mathbf{F}(t)$ که بر I تعریف شده و

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t).$$

هرگاه $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ و $F_1(t), F_2(t)$ به‌ترتیب پادمشتقهایی از $f_1(t), f_2(t)$ باشند ، آنگاه $\mathbf{F}(t) = F_1(t)\mathbf{i} + F_2(t)\mathbf{j}$ بوضوح یک پاد مشتق $\mathbf{f}(t)$ می‌باشد . از نظیر قضیه راجع به توابع اسکالر (قضیهٔ ۴ ، صفحه ۳۹۸) فورا" معلوم می‌شود که دو پادمشتق $\mathbf{f}(t)$ بر بازهٔ I فقط می‌توانند به اندازهٔ بردار ثابتی چون C فرق داشته باشند . پاد مشتق کلی $\mathbf{f}(t)$ ، یعنی $\mathbf{F}(t) + \mathbf{C}$ ، *انتگرال نامعین* $\mathbf{f}(t)$ نام دارد و با $\int \mathbf{f}(t)\,dt$ ، بدون حدود انتگرالگیری ، نموده می‌شود . انتگرالگیری نامعین موءلفه به موءلفه از $\mathbf{f}(t)$ فورا" نتیجه می‌دهد که

$$\int \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int f_1(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int f_2(t)\,dt\right)\mathbf{j}.$$

البته ، مشابه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع برداری عبارت است از

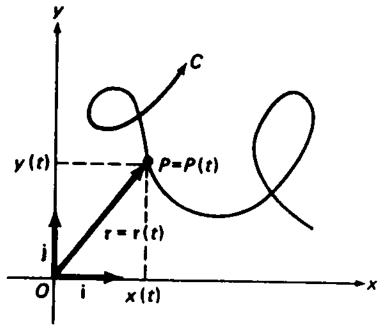
$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(t)\Big|_a^b$$

مثال ۷. تابع برداری $\mathbf{F}(t) = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ یک پادمشتق تابع برداری $\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ بر هر بازه است .

حال از توابع برداری در مطالعهٔ حرکت در صفحه استفاده می‌کنیم . فرض کنیم

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (\text{ در } I \text{ } t)$$

یک تابع برداری پیوسته باشد که بر بازهٔ I تعریف شده است ، و نقطهٔ شروع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را در مبداٴ O صفحهٔ xy ، مثل شکل ۲۶ ، قرارداده‌ایم . در این صورت ، نقطهٔ پایان $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ نقطهٔ متغیر $P = P(t) = (x(t), y(t))$ از صفحه است ، و $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *بردار موضع* (یا *بردار شعاعی*) $P = P(t)$ نام دارد . (در اینجا از علامت $\mathbf{r}$ به جای $\mathbf{f}$ استفاده می‌کنیم ، و این



شکل ۲۶

به خاطر موارد استعمال متعدد آن در فیزیک و ریاضیات کار بسته است.) وقتی t افزایش می‌یابد، $P = P(t)$ یک منحنی مسطح به نام نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یعنی منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \ (\ t \text{ در } I\ ). \tag{۶}$$

می‌پیماید. بالاخص گرفتن پارامتر t به‌عنوان زمان الهام‌بخش است، و ما این کار را با علم به اینکه این تنها امکان نیست انجام می‌دهیم.

سرعت و تندی. اگر $\mathbf{r}(t)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

میزان تغییر زمانی بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ است که موضع نقطهٔ متغیر $P = P(t)$ را مشخص می‌کند. این کمیت، به خاطر معنی فیزیکی‌اش، به *بردار سرعت*، یا فقط سرعت، معروف است و با $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ نموده می‌شود. چون $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ، داریم

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j},$$

که از آن معلوم می‌شود که $\mathbf{v}(t)$ تعمیم سرعت یک بعدی تعریف شده در بخش ۱۰۲ به دو بعد می‌باشد.

منظور از تندی نقطهٔ متغیر $P = P(t)$ یعنی اندازهٔ بردار سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ ؛ یعنی، اسکالر

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \tag{۷}$$

از حالا به بعد فرض می‌کنیم

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0 \qquad (I \text{ در } t) \tag{۸}$$

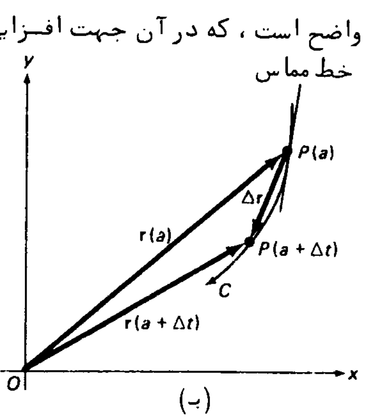
پس نتیجه می‌شود که تندی، و درنتیجه سرعت، نقطهٔ P که منحنی C را می‌پیماید هرگز صفر نیست؛ درنتیجه، نقطه هیچگاه از حرکت باز نمی‌ماند.

برای تعبیر هندسی سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$، فرض کنیم $\phi = \phi(t)$ زاویه از محور x مثبت به $\mathbf{v}$ باشد؛ این یعنی اگر نقطهٔ شروع بردار $\mathbf{v}$ در مبداء می‌بود، نقطهٔ پایانش بـه مختصات قطبی $|\mathbf{v}|$ و ϕ می‌شد. (ϕ را با زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و بردار یکهٔ $\mathbf{i}$، که برخلاف ϕ به‌بازهٔ $[0, \pi]$ محدود است، خلط نکنید.) فرض‌کنید a نقطه‌ای‌از I بوده، و $x'(a) \neq 0$. در این‌صورت،

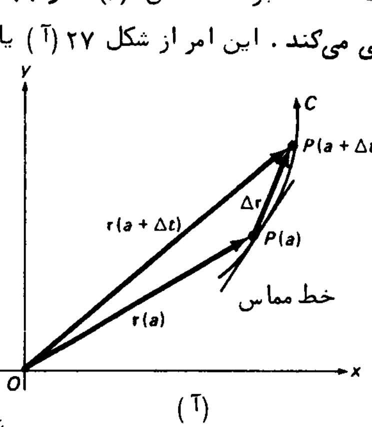
$$\tan\phi = \frac{y'(a)}{x'(a)},$$

زیرا $\mathbf{v}(a) = x'(a)\mathbf{i} + y'(a)\mathbf{j}$. اما، همانند صفحهٔ ۷۳۲، این خارج قسمت درست‌شیب‌مماس بر منحنی C به معادلات پارامتری (۶) در نقطهٔ $P(a) = (x(a), y(a))$ است. به‌علاوه، هرگاه $x'(a) = 0$، آنگاه، به خاطر شرط (۸)، $y'(a) \neq 0$، و در این صورت $\mathbf{v}(a) = y'(a)\mathbf{j}$؛ در نتیجه، $\mathbf{v}(a)$ قائم است، ولی مماس بر منحنی C در $P(a)$ نیز قائم می‌باشد (این را با مراجعه به‌تعریف‌مماس به‌عنوان موضع حدی خط قاطع مار بر نقاط $(x(a), y(a))$ و $(x(t), y(t))$ وقتی $t \to a$، نشان دهید). لذا، در هر حال، سرعت $\mathbf{v}(a)$ همواره موازی مماس برمنحنی C در $P(a)$ است. بنابراین، اگر نقطهٔ شروعش را در $P(a)$ قرار دهیم، بردار $\mathbf{v}(a)$ همیشه در جهت مماس بر C در $P(a)$ خواهد بود.

در واقع، حتی می‌توان در مورد جهت $\mathbf{v}(a)$ از این صریحتر بود. درحقیقت، از دو جهت مخالف بر خط مماس، $\mathbf{v}(a)$ *در جهتی اشاره دارد که در آن* $P = P(t)$ *با افزایش* t، C *را طی می‌کند*. این امر از شکل ۲۷ (آ) یا ۲۷ (ب) واضح است، که در آن جهت افزایش t



(ب)



(آ)

شکل ۲۷

در هر حالت با سر سهم روی خود منحنی C نموده شده است ، و بردار خارج‌قسمت‌تفاضلی

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(a + \Delta t) - \mathbf{r}(a)}{\Delta t} \tag{۹}$$

وقتی $\Delta t \to 0$ ، حول $P(a)$ چرخیده مآلا" به $\mathbf{v}(a)$ نزدیک‌می‌شود . در هر دو شکل Δt مثبت فرض شده است؛ درنتیجه ، $P(a)$ در امتداد منحنی C ، که در جهت افزایش t پیموده می‌شود ، پیش از $P(a + \Delta t)$ می‌آیدو اما ، اگر Δt منفی باشد ، جهت حدی بردار (۹) وقتی $\Delta t \to 0$ همان جهت به ازای Δt مثبت است ، ولواینکه در اینجا $P(a)$ **بعداز** $P(a + \Delta t)$ بیاید ، چرا که اگر Δt منفی باشد ، می‌توان (۹) را به شکل معادل زیر نوشت :

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(a + \Delta t) - \mathbf{r}(a)}{-|\Delta t|},$$

درنتیجه ، $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ بازهم در امتداد C در جهت افزایش t اشاره دارد (چرا؟)

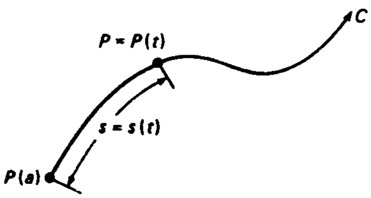
تبصره . اگر a یک نقطهٔ انتهایی I باشد ، $x'(a)$ و $y'(a)$ را مشتقات یکطرفهٔ مناسبی می‌گیریم. همچنین ، شرط (۸) را ضعیف کرده و می‌خواهیم فقط در نقاط درونی I برقرار باشد. با این کار می‌توان حالاتی را درنظر گرفت که در آنها سرعت اولیه یا نهایی یک حرکت صفر است .

تابع طول قوس . تا اینجا همه چیز خوب پیش رفته است . درک شهودی این را می‌طلبدکه تندی نقطهٔ متحرک P در امتداد منحنی C مساوی میزان تغییر زمانی مسافت پیموده شده توسط P در امتداد C باشد که از نقطهٔ ثابتی روی C سنجیده شده است (هرچه باشد،این معنی تندی در حالت خاصی است که C خط مستقیم است) . لذا ، اینک نشان می‌دهیم که تندی v ، که مساوی اندازهٔ $|\mathbf{v}|$ بردار سرعت $\mathbf{v}$ تعریف می‌شود ، مساوی مشتق ds/dt است ، که در آن s طول قوس در امتداد C است . برای این کار ، فرض کنیم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ باشد وقتی t روی بازهٔ I تغییر می‌کند ، و نیز توابع $x(t)$ و $y(t)$ بر I به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند . با انتخاب نقطهٔ ثابت a در I ، ***تابع طول قوس***

$$s = s(t) \qquad (t \geq a)$$

را طول‌قوس C بانقطهٔ‌شروع‌ثابت $P(a) = (x(a),\ y(a))$ ونقطهٔ‌پایان‌متغیر $P(t) = (x(t),\ y(t))$ تعریف می‌کنیم . در شکل ۲۸ ، $s(t)$ تعبیر هندسی شده است .بنابر فرمول (۲)،صفحهٔ ۷۴۱ ،

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du, \tag{۱۰}$$



تعبیر هندسی تابع طول قوس

شکل ۲۸

که در آن u را متغیر انتگرالگیری گرفته‌ایم تا با حد بالایی انتگرالگیری t خلط نشود . با مشتقگیری از (۱۰) نسبت به t ، به دست می‌آوریم

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \tag{۱۰َ}$$

(قضیهٔ ۵ در صفحهٔ ۴۰۵ را به‌کار برید) ، و از مقایسهٔ این فرمول با (۷) نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید :

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}. \tag{۱۱}$$

با استفاده از توابع برداری ، می‌توان (۱۰) را به شکل فشردهٔ

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\, du,$$

یا معادلا "

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)|\, du,$$

نوشت ، که از آن برقراری فرمول (۱۱) فورا " مشهود خواهد بود .

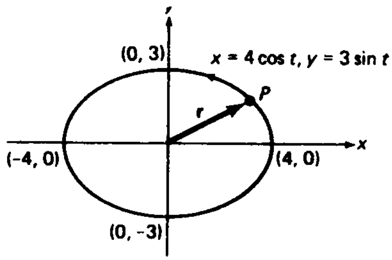
مثال ۸. سرعت و تندی نقطهٔ P به بردار موضع

$$\mathbf{r} = (4\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} \qquad (t \geq 0) \tag{۱۲}$$

را بیابید . چه وقت و کجا تندی ماکزیمم و مینیمم می‌شود ؟

حل . وقتی t افزایش می‌یابد ، P بیضی به معادلهٔ دکارتی $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$ را با شروع از نقطهٔ $(4, 0)$ درلحظهٔ $t = 0$ و حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت مرتبا " می‌پیماید

(ر.ک. شکل ۲۹) .



شکل ۲۹

با مشتقگیری از (۱۲) ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-4\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j}.$$

تندی اندازهٔ $\mathbf{v}$ و مساوی است با

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-4\sin t)^2 + (3\cos t)^2} = \sqrt{16\sin^2 t + 9\cos^2 t}.$$

چون

$$v^2 = 16\sin^2 t + 9\cos^2 t = 7\sin^2 t + 9(\sin^2 t + \cos^2 t) = 7\sin^2 t + 9,$$

ماکزیمم v^2 مساوی 16 است ، و وقتی حاصل می‌شود که $\sin t = \pm 1, \cos t = 0$ و مینیمم v^2 برابر 9 است ، و وقتی به دست می‌آید که $\sin t = 0, \cos t = \pm 1$. لذا ، تندی ماکزیمم 4 و در نقاط انتهایی $(0, \pm 3)$ محور اقصر بیضی رخ می‌دهد ، و تندی مینیمم 3 و در نقاط انتهایی $(\pm 4, 0)$ محور اطول روی خواهد داد .

تعریف بردار یکهٔ مماس. مثل قبل ، فرض کنیم بردار سرعت $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ناصفر بوده ، و نقطهٔ شروعش $P = P(t)$ ونقطهٔ پایانش بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد . همچنین ، C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد . در این صورت ، $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ مماس بر C در نقطهٔ P بوده و در جهت افزایش t اشاره دارد . با تقسیم بردار $\mathbf{v}$ بر اندازه‌اش، بردار یکهٔ

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \qquad (۱۳)$$

به دست می‌آید ، که مانند خود $\mathbf{v}$ بر C در نقطهٔ P مماس بوده و در جهت افزایش t اشاره دارد . بنابراین ، $\mathbf{T}$ *بردار یکهٔ مماس* برمنحنی C در نقطهٔ P می‌باشد . پس از (۱۳) نتیجه

می‌شود که

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|},$$

ولی می‌توان فرمول ساده‌تری برای $\mathbf{T}$ به دست آورد؛ یعنی،

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{۱۴}$$

و این با توصیف C به وسیلهٔ پارامتر طول قوس s انجام می‌گیرد. به این ترتیب که گوییم تابع $s = s(t)$ پیوسته و مشتقپذیر است، و صعودی نیز هست، چرا که انتگرالده (۱۰) همواره مثبت است (چرا؟). بنابراین، $s(t)$ دارای تابع معکوس پیوسته و مشتقپذیر $t = t(s)$ با مشتق

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt}$$

است (ر.ک. قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰). در این صورت، به کمک (۱۱)، داریم

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

که در آن قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع برداری (ر.ک. مسئلهٔ ۲۱) در آخرین مرحله به کار رفته است، و برهان فرمول (۱۴) کامل خواهد بود.

لذا، *بردار یکهٔ مماس* $\mathbf{T}$ *مشتق بردار موضع* $\mathbf{r}$ *نسبت به طول قوس* s *است*. فرمول (۱۴) برحسب مؤلفه‌های x و y بردار موضع $\mathbf{r}$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}. \tag{۱۴'}$$

بخصوص، این ایجاب می‌کند که

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

زیرا $\mathbf{T}$ بردار یکه می‌باشد.

تابع مشتقگیری شده در فرمول (۱۴) برحسب تابع اصلی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ به صورت تابع مرکب $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ است، که درآن $t = t(s)$ معکوس تابع طول قوس $s = s(t)$ می‌باشد. محاسبهٔ صریح تابع $s = s(t)$ اغلب مشکل یا غیرممکن است، ولی این از ارزش توجه به C با پارامتر طول قوس s نخواهد کاست.

مثال ۹. بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ را برای نمودار

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{j} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{j} \qquad (t \geq 0),$$

هم به‌عنوان تابع $\mathbf{T}(t)$ از پارامتر t و هم تابع $\mathbf{T}(s)$ از طول‌قوس s که‌ازنقطهٔ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} = (1, 0)$ سنجیده شده پیدا نمایید.

حل. مشتق $\mathbf{r}(t)$ مساوی است با

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= (-\sin t + \sin t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t \sin t)\mathbf{j} \\ &= (t\cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j},\end{aligned}$$

با اندازهٔ

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2} = t,$$

و درنتیجه،

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}.$$

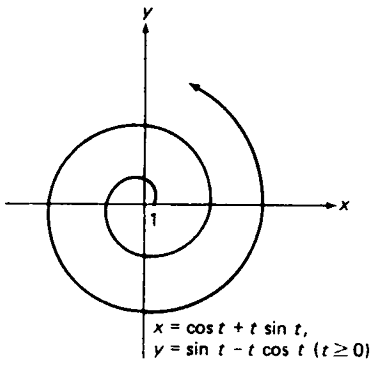
به‌علاوه،

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_0^t u\, du = \frac{1}{2}t^2,$$

و از اینرو، $t = \sqrt{2s}$؛ درنتیجه،

$$\mathbf{T}(s) = (\cos\sqrt{2s}\,)\mathbf{i} + (\sin\sqrt{2s}\,)\mathbf{j}.$$

نمودار تابع $\mathbf{r}(t)$ منحنی مارپیچی است که در شکل ۳۰ نموده شده است.



شکل ۳۰

مسائل

حد داده شده را محاسبه کنید.

۱.✓ $\lim_{t\to 2}(t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j})$

۲.✓ $\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\mathbf{i} - 2e^t\mathbf{j}\right)$

۳. $\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{t^2+1}\mathbf{i}+\cos\frac{\pi t}{3}\mathbf{j}\right)$ ✓ ۴. $\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\arccos t}{5}\mathbf{i}+\sqrt{t}\mathbf{j}\right)$ ✓

۵. $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{\ln t}\mathbf{i}+\frac{1-t}{1+t}\mathbf{j}\right)$ ✓ ۶. $\lim_{t\to -1}\left(\frac{t^2-1}{t-1}\mathbf{i}+\frac{t^3+1}{t+1}\mathbf{j}\right)$ ✓

۷. آیا تابع برداری $\mathbf{f}(t)=(\ln t)\mathbf{i}+(\ln(\ln t))\mathbf{j}$ در $t=e$ ؛ در $t=1$ پیوسته است؟

نشان دهید هرگاه وقتی $t\to a$ ، $\mathbf{f}(t)\to\mathbf{L}$ و $\mathbf{g}(t)\to\mathbf{M}$ ، آنگاه

۸. $\lim_{t\to a} c\mathbf{f}(t)=c\mathbf{L}$ (c اسکالر است)

۹. $\lim_{t\to a}[\mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t)]=\mathbf{L}+\mathbf{M}$

۱۰. $\lim_{t\to a}[\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)]=\mathbf{L}\cdot\mathbf{M}$

۱۱. $\lim_{t\to a}|\mathbf{f}(t)|=|\mathbf{L}|$

از تابع برداری داده شده مشتق بگیرید.

۱۲. $(2t^3-5)\mathbf{i}+(\sin 2t)\mathbf{j}$ ✓ ۱۳. $(t\ln t)\mathbf{i}+(t^2e^t)\mathbf{j}$ ✓

۱۴. $(\tan t)\mathbf{i}+(\ln(\ln t))\mathbf{j}$ ✓ ۱۵. $(\sec t)\mathbf{i}-(\sinh t)\mathbf{j}$ ✓

۱۶. $(\arctan t)\mathbf{i}+(\cos(\sin t))\mathbf{j}$ ✓ ۱۷. $(e^t\sin t)\mathbf{i}+(e^{-t}\cos t)\mathbf{j}$ ✓

نشان دهید که

۱۸. مشتق یک تابع برداری ثابت بردار صفر است.

۱۹. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ در a مشتقپذیر باشد، آنگاه $\mathbf{f}(t)$ در a پیوسته است.

۲۰. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ در a مشتقپذیر با مشتقات $\mathbf{f}'(a)$ و $\mathbf{g}'(a)$ باشند، آنگاه $\mathbf{f}(t)+\mathbf{g}(t)$ در a مشتقپذیر با مشتق $\mathbf{f}'(a)+\mathbf{g}'(a)$ می‌باشد.

۲۱. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ تابع مشتقپذیری از t بوده و t تابع مشتقپذیری از u باشد، آنگاه

$$\frac{d\mathbf{f}}{du}=\frac{d\mathbf{f}}{dt}\frac{dt}{du}$$ (قاعدهٔ زنجیره‌ای برای توابع برداری)

مشروط براینکه u چنان باشد که $t(u)$ در قلمرو $\mathbf{f}(t)$ واقع باشد.

پاد مشتق $\mathbf{F}(t)$ تابع برداری داده شدهٔ $\mathbf{f}(t)$ را طوری بیابید که در شرط تصریح شده صدق کند.

۲۲. $\mathbf{f}(t)=2t^2\mathbf{i}-t^3\mathbf{j},\ \mathbf{F}(1)=4\mathbf{j}$ ✓

۲۳. $\mathbf{f}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(e^t)\mathbf{j},\ \mathbf{F}(0)=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ✓

۲۴. $\mathbf{f}(t)=(2/t)\mathbf{i}+(\ln t)\mathbf{j},\ \mathbf{F}(e)=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ ✓

۲۵. $\mathbf{f}(t) = \sec t[(\tan t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}],\ \mathbf{F}(\pi/3) = \mathbf{0}$

انتگرال داده شده از یک تابع برداری را محاسبه کنید.

۲۶. $\int_1^2 (3t\mathbf{i} - 4t^2\mathbf{j})\,dt$

۲۷. $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j}\right) dt$

۲۸. $\int [(t \ln t)\mathbf{i} + (\csc^2 t)\mathbf{j}]\,dt$

۲۹. $\int_0^{10} |(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}|\,dt$

۳۰. $\int_0^1 (2^t\mathbf{i} + 3^{-t}\mathbf{j})\,dt$

۳۱. $\int [(\sin^2 t)\mathbf{i} + (\cos^2 t)\mathbf{j}]\,dt$

۳۲. فرض کنید $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ توابعی برداری بوده و هر دو بر $[a, b]$ پیوسته باشند. نشان دهید که

$$\int_a^b c\mathbf{f}(t)\,dt = c \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt \quad (\text{یک اسکالر است } c)$$

و

$$\int_a^b [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{g}(t)\,dt.$$

۳۳. فرض کنید $\mathbf{f}(t)$ بر $[a, b]$ پیوسته بوده، و $\mathbf{c}$ بردار ثابتی باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b \mathbf{c} \cdot \mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{c} \cdot \int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt.$$

۳۴. فرض کنید $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$ $\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\}$ ، و p_i نقطهٔ دلخواهی در زیربازهٔ $[t_{i-1}, t_i]$ باشد. نشان دهید هرگاه $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$ تابع برداری پیوسته بر $[a, b]$ بوده و $\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt$ به صورت $\lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(p_i)\Delta t_i$ تعریف شده باشد، آنگاه

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \int_a^b f_2(t)\,dt\right).$$

سرعت $\mathbf{v}$ و تندی $v = |\mathbf{v}|$ نقطهٔ $P = P(t)$ با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را بیابید. مسیر پیموده شده به‌وسیلهٔ P را طوری رسم کنید که جهت افزایش t را نشان دهد.

۳۵. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

۳۶. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$

۳۷. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$

۳۸. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$

۳۹. $\mathbf{r}(t) = (2 \sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$

۴۰. $\mathbf{r}(t) = (3 \cosh t)\mathbf{i} + (4 \sinh t)\mathbf{j}$

بردار واحد مماس $\mathbf{T}$ بر نمودار تابع برداری دادهٔ شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را، هم به‌صورت تابع $\mathbf{T}(t)$

از پارامتر t و هم به صورت تابع$\mathbf{T}(s)$از طول قوس s که از نقطه با بردارموضع$\mathbf{r}(0)$ سنجیده می‌شود ، پیدا نمایید .

۴۱ . $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ۴۲ . $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} - 8t\mathbf{j}$

۴۳ . $\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sin 3t)\mathbf{j}$ ۴۴ . $\mathbf{r}(t) = (4\sin t)\mathbf{i} + (4\cos t)\mathbf{j}$

۴۵ . $\mathbf{r}(t) = \frac{3}{2}t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad (t > 0)$ ۴۶ . $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\sin t)\mathbf{j}$

۴۷ . مسیر پیموده شده توسط نقطه به بردار موضع

$$\mathbf{r}(t) = (4\cos^3 t)\mathbf{i} + (4\sin^3 t)\mathbf{j} \qquad (t \geq 0)$$

را توصیف کنید . چه وقت و کجا تندی نقطهٔ P ماکزیمم و مینیمم خود را می‌گیرد ؟ آیا P هیچگاه از حرکت می‌ایستد ؟

۴.۱۱ بردار یکهٔ قائم ، انحنا و شتاب

برای مطالعهٔ بیشتر حرکت در صفحه ، فرض کنیم بردار موضع

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (\text{در } I \;\; t),$$

بردار سرعت

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j},$$

تابع طول قوس

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)|\,du, \tag{1}$$

و بردار یکهٔ مماس

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

همانند بخش پیش باشند . پریم نمایش مشتقگیری نسبت به پارامتر t است ، که ما آن را زمان می‌گیریم ، و a نقطهٔ ثابتی از بازهٔ I است که تابع برداری$\mathbf{r}(t)$بر آن تعریف شده است . مثل قبل ، فرض می‌کنیم$\mathbf{r}(t)$ بر I مشتقپذیر بوده و در شرط

$$|\mathbf{r}'(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$$

در هر نقطهٔ درونی I صدق می‌کند (ر.ک. تبصرهٔ صفحهٔ۱۰۸۰) ، ولی علاوه‌براین فرض می‌کنیم مشتقات دوم $x''(t)$ و $y''(t)$ بر I موجود و پیوسته باشند . همچنین ، به‌یاد می‌آوریم که فرمول (۱) ایجاب می‌کند که

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|. \tag{2}$$

مثل قبل ، فرض کنیم $P = P(t) = (x(t), y(t))$ نقطهٔ پایان بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ است که نقطهٔ شروعش درمبداء O صفحهٔ xy می‌باشد . دراین صورت ،با افزایش t ، $P(t)$ نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یعنی منحنی مسطح C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \ (\ t \text{ در } I\ )$$

را می‌پیماید . نقطهٔ شروع بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ نقطهٔ $P(t)$ بوده ، و وقتی t افزایش یابد ، جهت $\mathbf{T}$ معمولاً " از یک‌نقطه به نقطهٔ‌دیگر در امتداد C تغییر می‌کند .لذا ،علی‌رغم اینکه اندازهٔ $\mathbf{T}$ مقدار ثابت 1 را دارد ، مشتق $\mathbf{T}$ نسبت به t عموماً " ناصفر است . چون $|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ ، داریم

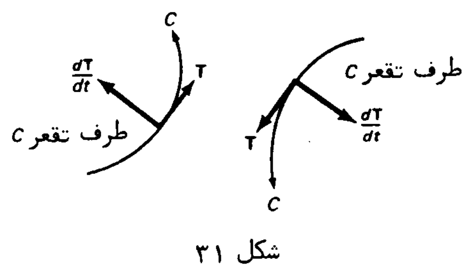
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

و درنتیجه ،

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0 \qquad (۲)$$

(قس. مثال ۵ ، صفحهٔ ۱۰۷۵) . لذا ، بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ همیشه به مشتقش $d\mathbf{T}/dt$ ، که عموماً " بردار یکه نیست ،متعامد است ، و وقتی جهت $\mathbf{T}$ تغییر می‌کند ، جهت $d\mathbf{T}/dt$ تغییر خواهد کرد .

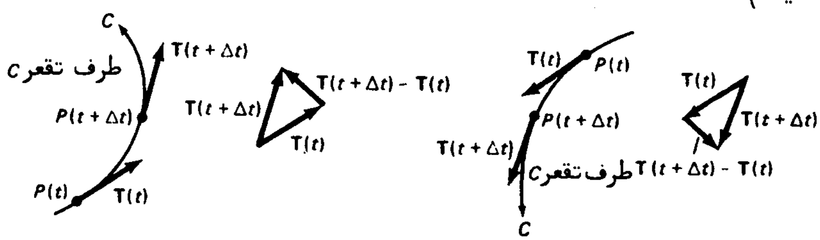
در شکل ۳۱ ، فرمول (۲) تعبیر هندسی شده است ، و در آن سر سهم روی C جهت پیموده شدن C ضمن افزایش t را نشان می‌دهد . بردار $d\mathbf{T}/dt$ همیشه اشاره به ***طرف تقعر***



شکل ۳۱

C دارد ؛ یعنی ، طرفی که وقتی منحنی C توسط نقطهٔ متحرک $P(t)$ پیموده می‌شود به آن می‌گردد . برای مشاهدهٔ دلیل آن ، شکل ۳۲ را درنظر می‌گیریم ، که در آن $\mathbf{T}(t)$ بردار یکهٔ مماس در لحظهٔ t بوده و $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ بردار یکهٔ مماس درزمان بعدی $t + \Delta t$ است . ازشکل واضح است که جهت خم شدن منحنی وقتی $P(t)$ آن را می‌پیماید همان جهت بردار تفاضلی $\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)$ اســت ، که این خود همان جهت مشتق $d\mathbf{T}/dt$ را دارد (حکم اخیر را

توجیه کنید) .



شکل ۳۲

مثال ۱ . بردارهای $\mathbf{T}$ و $d\mathbf{T}/dt$ را برای تابع برداری

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} \qquad (۳)$$

بیابید .

حل . نمودار (۳) دایره به شعاع ۱ و مرکز مبداء است که با افزایش t در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود . بردار یکهٔ مماس عبارت است از

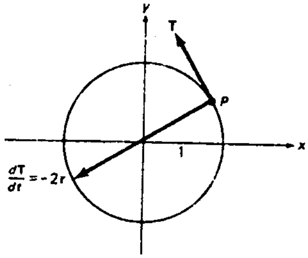
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{(-2\sin 2t)\mathbf{i} + (2\cos 2t)\mathbf{j}}{\sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}[(-2\sin 2t)\mathbf{i} + (2\cos 2t)\mathbf{j}] = (-\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}$$

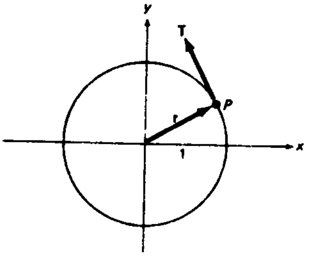
[ر.ک. شکل ۳۳ (آ)] ، و مشتقش مساوی است با

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -2[(\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}] = -2\mathbf{r}(t).$$

چون $-\mathbf{r}(t)$ ، یعنی قرینهٔ بردار موضع ، به مبداء اشاره دارد ، $d\mathbf{T}/dt$ به سمت مرکز دایرهٔ C ، و درنتیجه به طرف تقعر C ، می‌باشد . این امر در شکل ۳۳ (ب) نموده شده است، که در آن $P = (\cos 2t, \sin 2t)$ نقطهٔ شروع مشترک بردارهای $\mathbf{T}$ و $d\mathbf{T}/dt$ می‌باشد .



(ب)



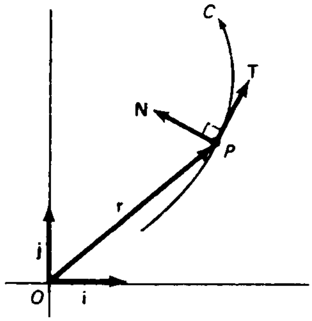
(آ)

شکل ۳۳

تعریف بردار یکهٔ قائم . حال ، علاوه‌بر بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ ، بردار یکهٔ دیگری معرفی می‌کنیم ، که با $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t)$ نموده و ***بردار یکهٔ قائم*** به منحنی C در نقطهٔ $P = P(t)$ نامیده می‌شود . این بردار یکهٔ

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \neq \mathbf{0}\right)$$

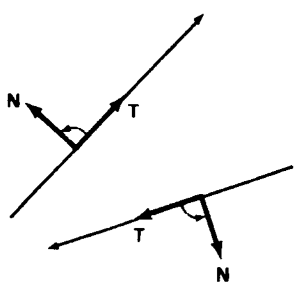
در جهت $d\mathbf{T}/dt = \mathbf{T}'(t)$ با نقطهٔ شروع P می‌باشد . چون $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به $\mathbf{T}$ بوده و به طرف تقعر C اشاره دارد ، همین امر در مورد بردار $\mathbf{N}$ درست است (ر.ک. شکل ۳۴) .اگر C خط مستقیم باشد ،جهت $\mathbf{T}$ تغییر نمی‌کند ،و دراین صورت ، $d\mathbf{T}/dt \equiv \mathbf{0}$. دراین‌حالت



بردارهای یکهٔ مماس و قائم T و N

شکل ۳۴

N را بردار حاصل از دوران T به اندازهٔ $90°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ، مثل شکل ۳۵ ، می‌گیریم .



شکل ۳۵

مثال ۲ . بردار یکهٔ قائم به منحنی

$$x = 2t, \qquad y = t^2 \tag{۴}$$

را در مبداء O و نیز در نقاط $(-2, 1)$ و $(4, 4)$ بیابید .

حل . با حذف پارامتر t از معادلات (۴) ، معلوم می‌شود که منحنی سهمی به معادلهٔ دکارتی $y = \frac{1}{4}x^2$ است . بردار موضع نظیر به (۴) عبارت است از $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ با مشتق $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. لذا ، بردار یکهٔ مماس مساوی است با

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{4 + 4t^2}} = \frac{\mathbf{i} + t\mathbf{j}}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

با مشتقگیری از $\mathbf{T}(t)$ ، بردار

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{-t\mathbf{i} + \mathbf{j}}{(1 + t^2)^{3/2}}$$

با اندازهٔ

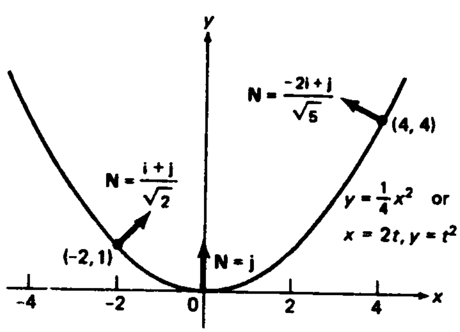
$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{\sqrt{(-t)^2 + 1^2}}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{1}{1 + t^2}$$

به‌دست می‌آید . لذا ، بردار یکهٔ قائم به سهمی در نقطهٔ $P(t) = (2t, t^2)$ عبارت است از

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{-t\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

مبداء O نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است ؛ و درنتیجه ، بردار یکهٔ قائم در O مساوی $\mathbf{N}(0) = \mathbf{j}$ می‌باشد . نقاط $(-2, 1)$ و $(4, 4)$ نظیر به مقادیر پارامتر $t = -1$ و $t = 2$ می‌باشند . بنابراین ،

$$\mathbf{N}(-1) = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$



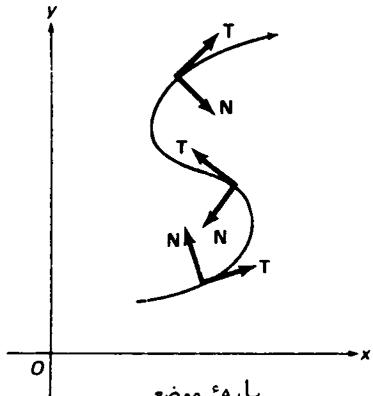
شکل ۳۶

بردار یکهٔ قائم در$(-2, 1)$ است ، ولی

$$\mathbf{N}(2) = \frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$

بردار یکهٔ قائم در $(4, 4)$ می‌باشد ؛ ر.ک. شکل ۳۶.

بردارهای یکهٔ $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ یک پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند (صفحهٔ ۱۰۵۲) ، که بر خلاف پایهٔ متعامد یکهٔ ثابت $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$ ، از یک نقطه به‌نقطهٔ دیگر در امتداد منحنی C ، طبق شکل ۳۷ ، تغییر می‌کند .



پایهٔ موضعی

شکل ۳۷

به این دلیل ، پایهٔ مرکب از $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ را **پایهٔ موضعی** می‌نامند . مثلاً ، پایهٔ موضعی حرکت مستدیر مثال ۱ عبارت است از

$$\mathbf{T} = (-\sin 2t)\,\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{N} = (-\cos 2t)\mathbf{i} + (-\sin 2t)\mathbf{j}$$

(این مطلب را تحقیق کنید) .

انحنا . هرگاه طول قوس s را پارامتر بگیریم ، آنگاه بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ، نقطهٔ پایانش $P = P(s)$ ، بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = d\mathbf{r}/ds$ ، و بردار یکهٔ قائم

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(s) = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \neq \mathbf{0}\right) \tag{۵}$$

همه توابعی از s اند ، و این امر از نمادهای آنها مشهود است . پس از (۵) معلوم می‌شود که

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \mathbf{N}.$$

فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ باشد. در این صورت، اسکالر مثبت $|d\mathbf{T}/ds|$ انحنای C در P نام دارد، که با κ (کاپای کوچک یونانی) نموده می‌شود، و معادلهٔ اخیر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}. \tag{۶}$$

انحنای κ میزان خمیدگی C را، وقتی توسط نقطهٔ متحرک $P = P(s)$ پیموده می‌شود، می‌سنجد. در واقع، فرض کنیم $\phi = \phi(s)$ زاویه از محور x مثبت به $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$ باشد، بدین معنی که اگر نقطهٔ شروع $\mathbf{T}$ در مبداء باشد، نقطهٔ پایان $\mathbf{T}$ دارای مختصات قطبی $|\mathbf{T}| = 1$ و ϕ می‌باشد. در این صورت،

$$\mathbf{T} = (\cos\phi)\mathbf{i} + (\sin\phi)\mathbf{j},$$

و، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left(-\sin\phi\,\frac{d\phi}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\cos\phi\,\frac{d\phi}{ds}\right)\mathbf{j}.$$

بنابراین،

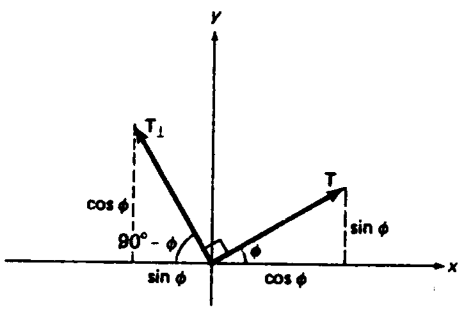
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\phi}{ds}\mathbf{T}_{\perp},$$

که در آن

$$\mathbf{T}_{\perp} = (-\sin\phi)\mathbf{i} + (\cos\phi)\mathbf{j}$$

بردار یکهٔ حاصل از دوران $\mathbf{T}$ به اندازهٔ $90°$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت است، و این را می‌توان باتوجه به شکل ۳۸ دریافت. اما $|\mathbf{T}_{\perp}| = 1$؛ و درنتیجه،

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| |\mathbf{T}_{\perp}| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|,$$

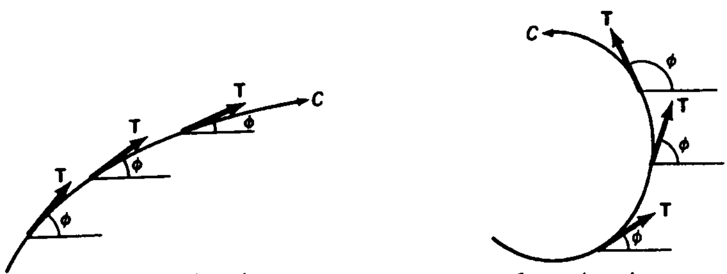


شکل ۳۸

درنتیجه ،

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|.$$

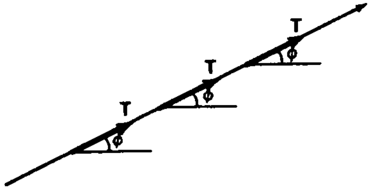
لذا ، انحنای κ قدرمطلق میزان‌تغییرزاویهٔ ϕ نسبت‌به‌طول قوس s است . هرقدر $\kappa = \kappa(s)$ بزرگتر باشد ، بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$ ضمن حرکت در امتداد C سریعترمی‌چرخد؛ یعنی ، C تیزتر خم می‌شود . این امر را در شکل ۳۹ توضیح داده‌ایم ، که در آن یک منحنی انحنای بزرگ داشته و سریع خم می‌شود ، ولی دیگری انحنای کوچک داشته و بتدریج خم می‌گردد .



شکل ۳۹

مثال ۳. نشان دهید که هر خط مستقیم دارای انحنای ثابت صفر $\kappa = 0$ است .

حل . همانطور که شکل ۴۰ نشان داده است ، در یک خط مستقیم زاویهٔ ϕ ثابت است .



انحنای ثابت صفر

شکل ۴۰

بنابراین ، $d\phi/ds = 0$ و

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| = 0.$$

منحنی C معمولا" نمودار یک تابع بردار موضعی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ گرفته می‌شود ، که در آن t پارامتری غیر از طول قوس s است . در این صورت ، به آسانی می‌توان انحنای κ را تابعی از t گرفت . در واقع ،

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \frac{|d\mathbf{T}/dt|}{ds/dt} = \frac{1}{v}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|,$$

که در آن در اولین گام از قاعدهٔ زنجیره‌ای و در دومین گام از فرمول مشتق یک تابع معکوس استفاده می‌کنیم (توجه کنید که $ds/dt > 0$) . به بیان معادل ،چون $v = |\mathbf{r}'(t)|$ ،

$$\kappa = \kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \qquad (۷)$$

مثال ۴ . انحنای دایرهٔ

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

به شعاع a را بیابید .

حل . در اینجا

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}'(t) = a[(-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}],$$

درنتیجه ،

$$|\mathbf{r}'(t)| = a\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = a$$

و

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{T}'(t) = (-\cos t)\mathbf{i} + (-\sin t)\mathbf{j}.$$

بنابراین ، $|\mathbf{T}'(t)| = 1$ و

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a},$$

یعنی ، یک دایره به شعاع a دارای انحنای ثابت $\kappa = 1/a$ می‌باشد . لذا ، هرقدر شعاع a کوچکتر باشد ، میزان تغییر جهت بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ نسبت به مسافت پیموده شده در امتداد دایره بیشتر است . به این دلیل است که هرقدر شعاع دورزدن یک اتومبیل کوچکتر باشد ، جهت حرکت خود بر واحد مسافت پیموده شده سریعتر تغییر خواهد کرد .

با کمی سعی می‌توان برای انحنای κ فرمولی برحسب مشتقات اول و دوم مؤلفه‌های

$x(t)$ و $y(t)$ بردار مثبت $\mathbf{r}(t)$ به دست آورد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}},$$

که درآن شناسهٔ t مشتقات x' ، y' ، x'' ،و y'' به خاطر اختصار حذف شده است. با استفاده از قاعدهٔ خارج قسمت برای مشتقگیری از $\mathbf{T}$ ، پس از اعمالی جبری وحذف‌جملات،

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{T}}{dt} &= \frac{\dfrac{d(x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})}{dt}(x'^2 + y'^2)^{1/2} - (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})\dfrac{d}{dt}(x'^2 + y'^2)^{1/2}}{x'^2 + y'^2} \\
&= \frac{(x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j})(x'^2 + y'^2) - (x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j})(x'x'' + y'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(x''y'^2 - x'y'y'')\mathbf{i} + (x'^2y'' - x'x''y')\mathbf{j}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\
&= \frac{(x'y'' - y'x'')(-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j})}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

بنابراین ،

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\,|-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j}| = \frac{|x'y'' - y'x''|}{x'^2 + y'^2},$$

زیرا $|-y'\mathbf{i} + x'\mathbf{j}| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. لذا ، بالاخره ،

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|}\,|\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}\,\frac{|x'y'' - y'x''|}{x'^2 + y'^2}$$

یعنی ،

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{۸}$$

مثال ۵. انحنای $\kappa = \kappa(t)$ سهمی $x = 2t,\ y = t^2$ مثال ۲ و نموده‌شده در شکل ۳۶رابیابید.

حل. در اینجا $x' = 2,\ x'' = 0,\ y' = 2t,\ y'' = 2$ ، و با گذاردن این مقادیر در فرمول (۸)، به دست می‌آوریم

$$\kappa = \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}. \tag{۹}$$

از (۹) معلوم می‌شود که سهمی انحنای ماکزیمم $\kappa(0) = \frac{1}{2}$ خود را در مبداء دارد. بخشی از سهمی که نظیر به مقادیر بزرگ $|t|$ است خیلی مستقیم است؛ و لذا، (۹) نشان می‌دهد که در آنجا انحنا بسیار کوچک می‌باشد. مثلا"، اگر $|t| = 100$، انحنا حدودا" $\frac{1}{2000}$ می‌باشد.

هرگاه C نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه C دارای نمایش پارامتری $x = t, y = f(t)$ است. بنابراین، $x' = 1,\ x'' = 0$؛ درنتیجه، فرمول (۸) به فرمول زیر تحویل می‌شود:

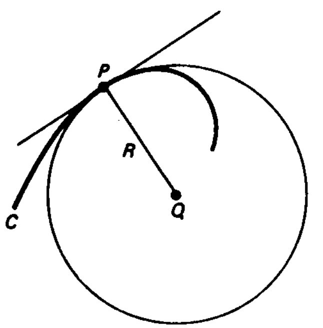
$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \qquad (8')$$

که در آن $y' = dy/dx$ و $y'' = d^2y/dx^2$. مثلا"، هرگاه C خط مستقیم $y = mx + b$ باشد، آنگاه، همانطور که قبلا" در مثال ۳ دیدیم، $y'' = 0$ و ('۸) ایجاب می‌کند که $\kappa = 0$.

شعاع انحنا. فرض کنیم κ انحنای منحنی C در نقطهٔ P باشد. منظور از *شعاع انحنای* C در P یعنی عدد

$$R = \frac{1}{\kappa},$$

یعنی، متقابل انحنا. از مثال ۴ معلوم می‌شود که شعاع انحنای یک دایره همان شعاع معمولی آن است. اگر κ کوچک باشد، R بزرگ است. لذا، یک منحنی بسیار مستقیم شعاع انحنای بسیار بزرگ دارد، و یک خط مستقیم $(\kappa = 0)$ را می‌توان با شعاع انحنای نامتناهی گرفت. در این وضع، در نقاطی که κ به بی‌نهایت میل می‌کند (در صورت وجود) قرار می‌دهیم $R = 0$. اگر $\kappa \neq 0$، منحنی C در نقطهٔ P شعاع انحنای متناهی دارد. در این صورت، منظور از *دایرهٔ انحنای* C در P یعنی دایره‌ای به شعاع R که از P گذشته و مرکزش Q در طرف تقعر C در امتداد قائم به C در P، مثل شکل ۴۱، قرار دارد. این دایره همان مماس



دایرهٔ انحنا

شکل ۴۱

و شعاع انحنای منحنی C در P را دارد؛ و لذا، با C در P برازش بسیار زیادی خواهد داشت. به این دلیل، دایرهٔ انحنا را **دایرهٔ بوسان** نیز می‌نامند.

مثال ۶. شعاع انحنای $R = R(t)$ بیضی

$$x = 2\cos t, \qquad y = \sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

را در نقاط $(2, 0)$ و $(0, 1)$ بیابید.

حل. توجه کنید که بیضی به معادلهٔ دکارتی $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ است. با محاسبهٔ مشتقات اول و دوم x و y، داریم

$$x' = -2\sin t, \qquad y' = \cos t,$$
$$x'' = -2\cos t, \qquad y'' = -\sin t,$$

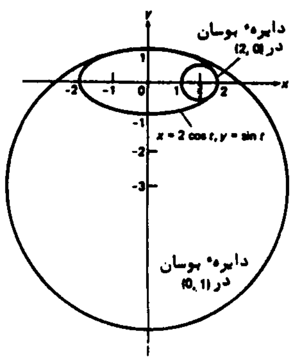
درنتیجه،

$$x'y'' - y'x'' = 2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 2,$$
$$x'^2 + y'^2 = 4\sin^2 t + \cos^2 t = 3\sin^2 t + 1.$$

بنابراین، به کمک فرمول (۸)،

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{1}{2}(3\sin^2 t + 1)^{3/2}.$$

نقاط $(2, 0)$ و $(0, 1)$ نظیر به مقادیر پارامتر $t = 0$ و $t = \pi/2$ اند. لذا، شعاع انحنای بیضی در $(2, 0)$ مساوی $R(0) = \frac{1}{2}$ و در $(0, 1)$ برابر $R(\pi/2) = \frac{1}{2}(4)^{3/2} = 4$ می‌باشد. دایرهٔ بوسان در $(2, 0)$ دایره‌ای است به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $(2 - \frac{1}{2}, 0) = (\frac{3}{2}, 0)$، و دایرهٔ بوسان در $(0, 1)$ دایره‌ای است به شعاع 4 و مرکز $(0, 1 - 4) = (0, -3)$. شکل ۴۲ بیضی را همراه با این دو دایرهٔ بوسان نشان می‌دهد.



شکل ۴۲

شتاب و مؤلفه‌هایش . بار دیگر فرض کنیم $P = P(t)$ نقطهٔ پایان بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بوده ، و پارامتر t را زمان می‌گیریم . در این صورت ، مثل حالت یک بعدی ، ***شتاب*** $\mathbf{a}$ نقطهٔ متحرک P مشتق زمانی سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ تعریف می‌شود . لذا ، $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ تابع برداری

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

می‌باشد .

حال $\mathbf{a}$ را نسبت به پایهٔ موضعی مرکب از بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بسط می‌دهیم . چون

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|} = \frac{\mathbf{v}}{v},$$

داریم

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}.$$

لذا ، طبق قواعد حاصل‌ضرب و زنجیره‌ای ،

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

اما $|ds/dt| = v$ و $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$ ، که در آن κ انحنا می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}, \qquad (۱۰)$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}, \qquad (۱۰')$$

که در آن $R = 1/\kappa$ شعاع انحنامی‌باشد . مؤلفه‌های (اسکالر) $\mathbf{a}$ نسبت به پایهٔ موضعی $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ ***مؤلفه‌های مماسی و قائم*** شتاب نام دارند ، و با a_T و a_N نموده می‌شوند . لذا ،

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N},$$

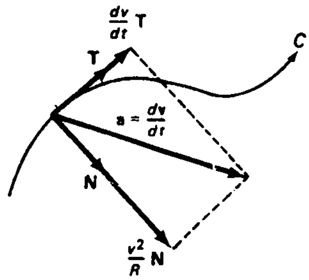
که درآن

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{v^2}{R}. \qquad (۱۱)$$

توجه کنید که (۱۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \qquad (۱۱')$$

در شکل ۴۳ ، بسط $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ تعبیر هندسی شده است .



شکل ۴۳

مثال ۷. شتاب ذره‌ای را بیابید که یک دایره به شعاع R را با تندی ثابت v می‌پیماید .

حل . چون v ثابت است ، داریم $dv/dt \equiv 0$. به‌علاوه ، شعاع انحنای دایره همان شعاع معمولی R آن است . بنابراین ، طبق (۱۱′) ،

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{R}\mathbf{N}.$$

لذا ، مؤلفهٔ مماسی شتاب صفر است ، یا به طور غیرصوریتر ، شتاب " مؤلفهٔ مماسی ندارد" در واقع ، شتاب **a** *مرکزگرا* است ، به این معنی که جهتش به سوی مرکز دایره است ، و اندازه‌اش مقدار ثابت v^2/R را دارد .

مثال ۸. مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب ذره‌ای را بیابیدکه درامتداد سهمی $x = 2t,\ t = t^2$ در حرکت است .

حل . در اینجا ، مثل مثال ۵ ،

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

و

$$\kappa = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}.$$

لذا ، طبق (۱۱) ، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب a عبارتنداز

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

مثلاً ، ذره در لحظهٔ $t = 1$ با $a_T = \sqrt{2}$ و $a_N = \sqrt{2}$ در نقطهٔ $(2, 1)$ بوده ، ولی در لحظهٔ $t = 2$ با $a_T = 4/\sqrt{5}$ و $a_N = 2/\sqrt{5}$ در نقطهٔ $(4, 4)$ می‌باشد . در واقع ، چون

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}) = 2\mathbf{j},$$

شتاب به اندازهٔ ثابت 2 بوده و جهتش‌قائم روبه بالا می‌باشد . همچنین ، توجه کنید که مؤلفهٔ قائم شتاب را می‌توان بدون محاسبهٔ انحنای κ پیدا کرد . در واقع ، چون $|\mathbf{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2$ (چرا ؟) ، داریم

$$a_N^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_T^2 = 4 - \frac{4t^2}{1+t^2} = \frac{4}{1+t^2},$$

و درنتیجه ، $a_N = 2/\sqrt{1+t^2}$.

مسائل

بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر نمودار تابع برداری داده شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را بیابید .

۱ . $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

۲ . $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ $(t > 0)$

۳ . $\mathbf{r}(t) = 2t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$ $(t > 0)$

۴ . $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j}$

۵ . $\mathbf{r}(t) = (\sinh t)\mathbf{i} + (\cosh t)\mathbf{j}$

۶ . $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$

انحنای κ ی منحنی داده شده را در نقطهٔ نظیر به مقدار ذکر شده از پارامتر t بیابید .

۷ . $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3,\ t = 1$

۸ . $x = \frac{1}{3}t^3,\ y = t,\ t = -1$

۹ . $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ t = \sqrt{3}$

۱۰ . $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ t = \pi/4$

۱۱ . $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ t = 0$

۱۲ . $x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ t = -2$

انحنای κ ی نمودار تابع داده شده را در نقطهٔ ذکر شده بیابید.

۱۳. $y = 4x - x^2$ در $(2, 4)$

۱۴. $y = x^3 + 1$ در $(-1, 0)$

۱۵. $y = 2/x$ در $(1, 2)$

۱۶. $y = \ln x$ در $(1, 0)$

۱۷. $y = xe^{-x}$ در $(1, 1/e)$

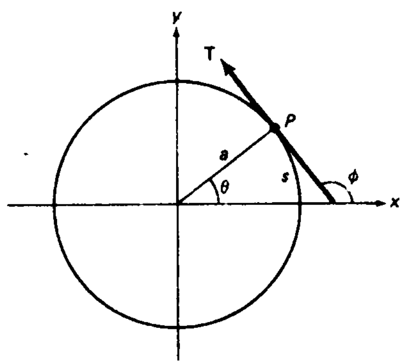
۱۸. $y = e^{-x^2}$ در $(0, 1)$

۱۹. انحنای ماکزیمم منحنی $y = e^x$ چیست و کجا صورت می‌گیرد؟

۲۰. نشان دهید که شعاع انحنای‌منحنی $y = \cosh x$ در نقطهٔ $P = (x, y)$ مساوی y^2 ، یعنی مجذور مختص y ، است.

۲۱. فرض کنید دایره‌ای به شعاع a در امتداد یک خط مستقیم افقی بدون لغزش بغلطد. در این صورت، همانطور که در مثال ۷، صفحهٔ ۷۲۹، نشان دادیم، نقطهٔ‌ثابت P از محیط دایره چرخزاد $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ را می‌پیماید. شعاع انحنای R را در یک نقطهٔ‌دلخواه چرخزاد بیابید. کجا R مساوی صفر است؟ مساوی a است؟ ماکزیمم R چیست و کجا صورت می‌گیرد؟

۲۲. در مثال ۴ نشان دادیم که انحنای یک دایره به شعاع a مساوی $1/a$ است. بااستفاده از شکل ۴۴، این امر را با محاسبهٔ مستقیم $|d\phi/ds|$ نشان دهید.



شکل ۴۴

معادلهٔ دایرهٔ بوسان منحنی داده شده را در نقطهٔ $(0, 1)$ بنویسید. در هر حالت، منحنی و دایره را رسم نمایید.

۲۳. $y = 1/(x^2 + 1)$

۲۴. $y = \cos(x/\sqrt{2})$

۲۵. $y = e^x$

۲۶. $y = \sec x$

۲۷. در چه نقاطی از سهمی $x^2 = 8y$ شعاع انحنا مساوی $\frac{125}{16}$ است؟

۲۸. شعاع انحنای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را در نقاط انتهایی محورهای اطول واقصر

آن تعیین کنید .

۲۹. فرض کنید C نمودار معادلهٔ $x^2 + xy + y^2 = 3$ باشد . شعاع انحنای C درنقطهٔ $(1, 1)$ چقدر است ؟

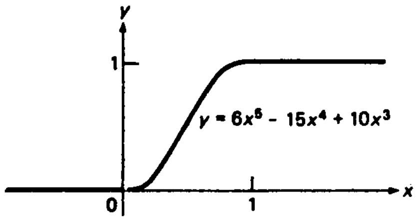
۳۰. نشان دهید که نمودار تابع

$$y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 \qquad (0 < x < 1)$$

دو قطعهٔ جدا از هم تابع ناپیوستهٔ

$$y = \begin{cases} 0 \quad \text{،} \quad x \le 0 \text{ اگر} \\ 1 \quad \text{،} \quad x \ge 1 \text{ اگر} \end{cases}$$

را طوری به هم وصل می‌کند که منحنی حاصل ، که در شکل ۴۵ نموده شده ، شیب و انحنای پیوسته دارد . آیا می‌توانید مثالی از زندگی واقعی بزنید که در آن این مسئلهٔ ریاضی ظاهر شود ؟



شکل ۴۵

۳۱ تا ۳۶. مؤلفه‌های مماسی و قائم a_T و a_N شتاب نقطهٔ $P = P(t)$ با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در مسائل ۱ تا ۶ را بیابید .

۳۷. تحقیق کنید که انحنای $\kappa = \kappa(\theta)$ منحنی قطبی $r = r(\theta)$ مساوی است با

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}, \qquad \text{(یک)}$$

که درآن $r' = dr/d\theta$ و $r'' = d^2r/d\theta^2$.

با استفاده از فرمول (یک) ، انحنای منحنی قطبی داده شده را در نقطه‌ای که θ ی آن ذکر شده پیدا نمایید .

۳۸. $r = 4\cos\theta, \theta = 10$

۳۹. $r = 1 - \cos\theta, \theta = \pi$

۴۰. $r = e^{\theta}, \theta = \ln 3$

۴۱. فرض کنید $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بردارهای یکهٔ مماس و قائم در یک نقطه از نمودار تابع با بردار موضع $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ، ϕ زاویه از محور x مثبت به $\mathbf{T}$ ، و $\mathbf{T}_\perp$ بردار یکهٔ حاصل از دوران $\mathbf{T}$ به اندازهٔ $90°$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد. نشان دهید که

$$\mathbf{N} = \begin{cases} \mathbf{T}_\perp & \text{اگر } d\phi/ds > 0 \\ -\mathbf{T}_\perp & \text{اگر } d\phi/ds < 0 \end{cases}$$

بخصوص، نشان دهید که اگر $x'y'' - y'x'' > 0$ ، $\mathbf{N}$ از $\mathbf{T}$ با تغییر $\mathbf{i}$ به $\mathbf{j}$ و $\mathbf{j}$ به $-\mathbf{i}$ به دست می‌آید، ولی اگر $x'y'' - y'x'' < 0$ ، $\mathbf{N}$ از $\mathbf{T}$ با تغییر $\mathbf{i}$ به $-\mathbf{j}$ و $\mathbf{j}$ به $\mathbf{i}$ حاصل خواهد شد.

۴۲ تا ۴۶. با استفاده از مسئلهٔ قبل، محاسباتی که در مسائل ۲ تا ۶ ما را از $\mathbf{T}$ به $\mathbf{N}$ می‌برند را ساده نمایید.

۵.۱۱ کاربردهایی در مکانیک

در این بخش چند مسئلهٔ دوبعدی از مکانیک نیوتنی را به‌کمک بردارها حل می‌کنیم. ذره‌ای به جرم m در نظر می‌گیریم که بر آن نیروی $\mathbf{F}$ اثر می‌کند. در این صورت، *طبق قانون دوم حرکت نیوتن*،

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{1}$$

که در آن $\mathbf{a}$ شتاب ذره است. این تعمیم طبیعی صورت یک بعدی قانون نیوتن است که در بخش ۷.۴ مطالعه شد، ولی اینجا نیروی $\mathbf{F}$ و شتاب $\mathbf{a}$ هردو*بردار*اند. فرض کنیم $\mathbf{F}$ و $\mathbf{a}$ دارای مؤلفه‌های F_1, F_2 و a_1, a_2 نسبت‌به‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ باشند. در این صورت، معادلهٔ برداری (۱) با جفت معادلات اسکالر زیر معادل است:

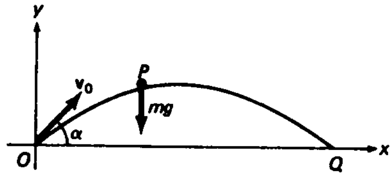
$$F_1 = ma_1, \qquad F_2 = ma_2, \tag{1'}$$

که با گرفتن مؤلفه از طرفین (۱) به دست می‌آید.

مثال ۱. حرکت یک گلوله. گلوله‌ای از یک توپ که زاویهٔ ارتفاعش α است شلیک شده است. مسیر گلوله را درصورتی بیابید که تندی اولیه‌اش v_0 باشد. از انحنا و دوران زمین، ونیز مقاومت هوا، صرف‌نظر نمایید.

حل. در صفحهٔ مسیر، یعنی در صفحهٔ قائم شامل بردار سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ ، یک دستگاه مختصات قائم اختیار می‌کنیم که محور y قائم و رو به بالا بوده و مبداء O در موضع توپ

باشد[1]. در این صورت، بردار $\mathbf{v}_0$، به اندازهٔ v_0، با محور x مثبت زاویهٔ α می‌سازد (ر.ک. شکل ۴۶، که درآن گلوله در یک‌لحظه در P بوده‌و مآلاً در Q فرود می‌آید)؛ درنتیجه برحسب پایهٔ متعامد یکهٔ $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$، $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}$. تنهانیروی



شکل ۴۶

وارد بر گلوله وزن آن است؛ یعنی، نیروی رو به پایین

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j},$$

که در آن g شتاب ثقل می‌باشد. فرض کنیم $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ بردار موضع گلوله‌نسبت‌به توپ در لحظهٔ t باشد. در این صورت، قانون نیوتن (۱′) یک جفت معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم به دست می‌دهد:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg,$$

یا معادلاً، پس از تقسیم بر جرم m که دیگر نقشی در مسئله ندارد،

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \tag{۲}$$

با انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل (۲)، به دست می‌آوریم

$$\frac{dx}{dt} = A_1, \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + B_1, \tag{۳}$$

و پس از انتگرالگیری نتیجه می‌دهد که

$$x = A_1t + A_2, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + B_1t + B_2. \tag{۴}$$

برای تعیین ثابتهای انتگرالگیری A_1، A_2، B_1، و B_2، شرایط اولیهٔ

$$x(0) = y(0) = 0, \qquad x'(0) = v_0 \cos \alpha, \qquad y'(0) = v_0 \sin \alpha \tag{۵}$$

---

۱. این امر که مسیر گلوله در صفحهٔ قائم ثابتی شامل بردار $\mathbf{v}_0$ قرار دارد در واقع نتیجه‌ای است از قانون نیوتن در بعد سه (ر.ک. مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۱۱۹۵).

را اعمال می‌کنیم $(x' = dx/dt,\ y' = dy/dt)$. این معادلات بیانگر آنند که گلوله، که ابتدا در حال سکون در لولهٔ توپ بوده، سرعت $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$ را درلحظهٔ آتش $t = 0$ به دست می‌آورد. پس از روابط (۳) تا (۵) معلوم می‌شود که

$$A_1 = v_0 \cos\alpha, \qquad A_2 = 0, \qquad B_1 = v_0 \sin\alpha, \qquad B_2 = 0,$$

و با گذاردن این مقادیر در (۴) یک جفت معادلهٔ

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \tag{۶}$$

برای مسیر گلوله به دست می‌آید که در آن پارامتر t زمان است. با حذف t از معادلات پارامتری (۶)، معادلهٔ دکارتی

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \tag{۶'}$$

به دست می‌آید که، همانطور که از شکل برمی‌آید، نمودارش یک سهمی است (ر.ک. صفحه ۹۳۵).

در مسائل ۱ تا ۱۲، حرکت گلوله‌ها بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. حال به مسائل مربوط به حرکت مستدیر می‌پردازیم.

مثال ۲. یک قمر مصنوعی در ارتفاع ثابت ۱۰۰۰ میل مدار مستدیری را حول زمین طی می‌کند[1]. تندی مداری v ی آن را بیابید.

حل. در اینجا پایهٔ متعامد یکه را پایهٔ موضعی مرکب از بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر مدار قمر، که دایره‌ای به مرکز O زمین است، می‌گیریم؛ لذا، $\mathbf{N}$ به سمت مرکز زمین می‌باشد. تنها نیروی وارد بر قمر نیروی جاذبهٔ ثقلی زمین است. این نیرو، مثل مثال ۸، صفحهٔ ۴۳۲، مساوی است با

$$\mathbf{F} = \frac{GMm}{R^2}\mathbf{N},$$

که در آن G ثابت عمومی ثقل، M جرم زمین، و m جرم قمر می‌باشد. بنابر فرمول (۱۰')،

---

۱. *این امر که اگر قمر مصنوعی‌را با تندی مناسبی درمدار قراردهیم، مدار مستدیرخواهیم داشت، در مثال ۱۰، صفحهٔ ۱۱۸۵، نشان داده شده است.*

صفحهٔ ۱۰۹۹، شتاب قمر مساوی است با

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N},$$

که در آن R شعاع (انحنای) مدار مستدیر است؛ درنتیجه، قانون دوم نیوتن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ یا $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ در پایهٔ موضعی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N} = \frac{GM}{R^2}\mathbf{N}$$

با گرفتن مؤلفه‌های مماسی و قائم از طرفین این معادلهٔ برداری، دو معادلهٔ اسکالر

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

و

$$v^2 = \frac{GM}{R} \qquad (۷)$$

به دست می‌آید، که اولی می‌گوید که تندی قمر ثابت است. همچنین، طبق فرمول (۱۸)، صفحهٔ ۴۳۴،

$$G = \frac{gR_0^2}{M},$$

که در آن R_0 شعاع زمین و g شتاب ثقل است. پس از (۷) و معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}}\,R_0 \qquad (۸)$$

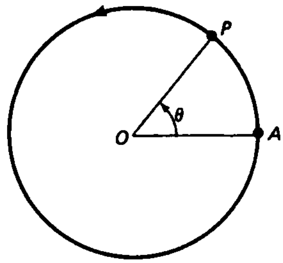
با قرار دادن $g = 32\ \text{ft/sec}^2$، $R_0 = 3960$ mi، و $R = R_0 + 1000 = 4960$ mi درفرمول (۸) و توجه به این امر که $1\ \text{mi} = 5280\ \text{ft}$، مآلاً خواهیم داشت

$$v = \sqrt{\frac{32}{5280(4960)}}\,3960 \approx 4.4\ \text{mi/sec.}$$

حرکت مستدیر یکنواخت. گوییم ذرهٔ P که یک مدار مستدیر را با تندی ثابتی، مثل مثال ۲، می‌پیماید حرکت مستدیر یکنواخت دارد. فرض کنیم P دارای تندی v بوده و شعاع دایره R باشد. در این صورت، P یک دور کامل دایره را در زمان

$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad (۹)$$

می‌پیماید، که آن را دورهٔ تناوب حرکت می‌نامیم. فرض کنیم O مرکز دایره بوده، و θ زاویه از شعاع ثابت OA تا شعاع OP دایره باشد (ر.ک. شکل ۴۷). در این صورت، θ یک



شکل ۴۷

تابع خطی از زمان t است، و θ در یک دورهٔ تناوب به اندازهٔ 2π افزایش می‌یابد (فرض کنیم حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد). بنابراین،

$$\theta = \frac{2\pi}{T} t + \theta_0,$$

که در آن ثابت θ_0 مقدار θ در $t = 0$ است، یا معادلاً"

$$\theta = \omega t + \theta_0,$$

که در آن کمیت

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

تندی زاویه‌ای نام دارد (ω امگای کوچک یونانی است). لذا،

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

و از مقایسهٔ این فرمول با (۹) معلوم می‌شود که

$$v = R\omega.$$

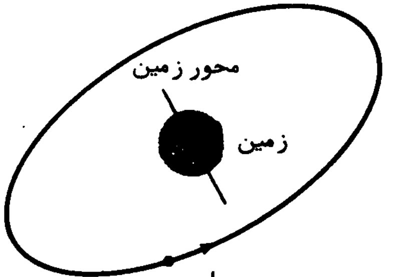
همچنین، باید توجه داشت که مؤلفهٔ قائم شتاب یک ذره در حرکت مستدیر یکنواخت مساوی است با

$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \qquad (۱۰)$$

مثال ۳. یک قمر ارتباطات مدار مستدیری به شعاع R را در صفحهٔ استوا و با تندی ثابت

v mi/sec طی می‌کند. انتخاب R چنان است که قمر مدام روی نقطهٔ ثابتی از سطح زمین ظاهر می‌شود. ارتفاع قمر چقدر است؟

حل. چون قمر مدام در آسمان ظاهر می‌شود، حرکتش با دوران زمین هماهنگ است؛ یعنی، قمر با همان سرعتی دور زمین می‌گردد که زمین حول محور خود دوران دارد (ر.ک. شکل ۴۸). به عبارت دیگر، دورهٔ تناوب حرکت مداری $T =$ روز $1 = 24(60)^2$ sec.



شکل ۴۸

بنابراین، طبق فرمول (۹)،

$$24(60)^2 = \frac{2\pi R}{v},$$

که پس از جانشانی v از فرمول (۸)،

$$R = \frac{12(3600)v}{\pi} = \frac{12(3600)R_0}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

لذا،

$$R^{3/2} = \frac{12(3600)R_0\sqrt{g}}{\pi},$$

و درنتیجه،

$$R = \left[\frac{12(3600)(3960)}{\pi}\sqrt{\frac{32}{5280}}\right]^{2/3} \approx 26{,}190 \text{ mi}.$$

لذا، ارتفاع قمر از سطح زمین حدوداً $26{,}190 - 3960 = 22{,}230$ mi می‌باشد. به عنوان تمرین، نشان دهید که سرعت حدوداً 1.9 mi/sec است.

از فرمولهای (۷) و (۹) معلوم می‌شود که دورهٔ تناوب T قمر که حرکت مستدیر یکنواخت حول مرکز جاذبهٔ ثقلی جرم M دارد مساوی است با

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2}, \qquad (11)$$

یا معادلا"

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3. \qquad (11')$$

لذا، مربع دورهٔ تناوب قمر با مکعب شعاع مدارش متناسب است. این **قانون سوم کپلر**[1] برای حالت خاصی است که مدار قمر مستدیر است (در حالت کلی، مدار بیضی است). قوانین کپلر حرکت سیاره‌ای به تفصیل در بخش ۵.۱۲ مطرح خواهند شد.

مثال ۴. مدار ماه تقریبا" مستدیر است، و دورهٔ گردش آن حول زمین تقریبا" 27.3 روز است. شعاع مدار ماه چقدر است؟

حل. بنابر (۱۱)،

$$T_m = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_m^{3/2},$$

که در آن T_m و R_m دورهٔ گردش ماه و شعاع مدارش می‌باشند (G ثابت عمومی ثقل و M جرم زمین است). به همین نحو،

$$1\ (\text{روز}) = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_s^{3/2},$$

که در آن R_s شعاع مدار یک قمر در حرکت همزمان حول زمین است. از تقسیم معادلهٔ اول بر معادلهٔ دوم، معلوم می‌شود که

$$T_m = \left(\frac{R_m}{R_s}\right)^{3/2},$$

درنتیجه،

$$R_m = T_m^{2/3} R_s.$$

1. Kepler

اما ، همانطور که در مثال ۳ دیدیم ، $R_s \approx 26{,}190$ mi ؛ و درنتیجه ،

$$R_m \approx (27.3)^{2/3}(26{,}190) \approx 237{,}500 \text{ mi.}$$

مثال ۵. در آزمون خلبانی برای تحمل شتابهای زیاد ، شخصی در یک دایرهٔ افقی به‌شعاع 10 ft با دستگاه سانتریفوژ بزرگ گردانده می‌شود . در چه تندی زاویه‌ای ω شتاب $3g$ بر وی وارد می‌شود ؟

حل . با مساوی $3g$ قرار دادن شتاب قائم (۱۰) ، به دست می‌آوریم $R\omega^2 = 3g$ یا

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{R}},$$

که ، پس از قرار دادن $R = 10$ ft و $g = 32$ ft/sec^2 ، به دست می‌آوریم

$$\omega = \sqrt{9.6} \approx 3.1 \text{ rad/sec}$$

با واحد سنجشی آشناتر ، (دور بر دقیقه) $\omega = 60\sqrt{9.6}/2\pi \approx 29.6$ rpm

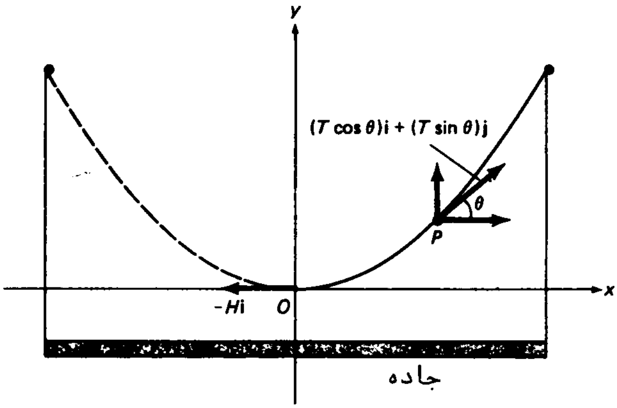
پل معلق . در خاتمه به‌چند مسئله‌ازاستاتیک‌می‌پردازیم ،که در آنها یک" دستگاه "از ذره‌ها در حال تعادل است ؛ درنتیجه ، هیچ حرکتی وجود ندارد .

مثال ۶. شکل پل معلقی را بیابید که جاده‌ای به وزن w بر واحد طول را تحمل می‌کند . از وزن خود کابل در مقایسه با وزن جاده صرف‌نظر نمایید .

حل . در صفحهٔ کابل یک دستگاه مختصات قائم اختیار می‌کنیم که محور y قائم و روبه‌بالا بوده و مبداء O در پایین‌ترین نقطهٔ کابل ، مثل شکل ۴۹ ، باشد .(اگر دو کابل موازی وجود داشته باشند ، همین مسئله را با هر کابل که نصف وزن جاده را تحمل می‌کند حل می‌کنیم) . فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از کابل سمت راست O باشد . در این صورت ، قطعهٔ OP از کابل تحت سه نیرو قرار دارد ، کشش افقی H که OP را به چپ در O می‌کشاند ،کشش مماسی به اندازهٔ T که OP را به راست و بالا در P می‌کشاند ، و وزن wx ، x فوت جاده که OP را به طور قائم به پایین می‌کشاند . لذا ، نیروی کل وارد بر OP مساوی است با

$$\mathbf{F} = (T\cos\theta - H)\mathbf{i} + (T\sin\theta - wx)\mathbf{j}.$$

که در آن بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ معانی عادی خود را داشته و θ میل مماس بر کابل در P



شکل ۴۹

می‌باشد (ر.ک. شکل). برای تعادل OP لازم است $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ، زیرا در غیر این‌صورت قانون دوم حرکت نیوتن شتاب OP را به دست می‌دهد[1]. بنابراین،

$$T\cos\theta = H, \qquad T\sin\theta = wx, \tag{۱۲}$$

و از تقسیم معادلهٔ دوم بر معادلهٔ اول، به دست می‌آوریم

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x,$$

که در آن $y = y(x)$ معادلهٔ کابل در حال تعادل است. (چرا همین نتیجه درصورتی که P سمت چپ O باشد به دست می‌آید؟) با انتگرالگیری از این معادلهٔ دیفرانسیل، معلوم می‌شود که

$$y = \int \frac{w}{H}x\,dx + C = \frac{w}{2H}x^2 + C.$$

اما $y(0) = 0$ ، زیرا مبداء روی منحنی $y = y(x)$ اختیار شده است. لذا، ثابت انتگرالگیری C صفر بوده و

$$y = \frac{w}{2H}x^2.$$

لذا، کابل به شکل سهمی می‌باشد.

---

۱. در اینجا ما عملا "قانون نیوتن را بر دستگاه ذرات سازای OP اعمال می‌کنیم؛ این را می‌توان با استدلالی که در آغاز بخش ۳.۱۴ شد توجیه کرد.

زنجیر آویزان . اگر جاده وجود نداشته باشد ، باید وزن خود کابل نیز به حساب آید . در این صورت ، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد ، منحنی $y = y(x)$ دیگر سهمی نیست .

مثال ۷. زنجیری به وزن w بر واحد طول از دو تکیه‌گاه به ارتفاع مساوی آویزان شده است (شکل ۴۹ را بدون جاده تصور کنید) . شکل زنجیر آویزان را بیابید .

حل . مثل مثال ۶ ، فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از زنجیر باشد ، و نیروهای وارد برقطعهٔ OP از زنجیر را تحلیل می‌کنیم ،که‌درآن مبدأ O در پایین‌ترین نقطهٔ‌زنجیر است .مجدداً" OP تحت کشش افقی H است که OP را در O می‌کشد و نیرویی مماسی به اندازهٔ T است که OP را در P می‌کشد ، ولی اینجا نیروی رو به پایین ws است (نه wx) ، که در آن s طول قطعهٔ OP می‌باشد . لذا ، به جای معادلات تعادل (۱۲) ، داریم

$$T\cos\theta = H, \qquad T\sin\theta = ws, \tag{۱۲'}$$

که با (۱۲) فقط در وجود s به جای x در معادلهٔ دوم تفاوت دارد . پس از (۱۲') معلوم می‌شود که

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}s.$$

با مشتقگیری از این معادله نسبت به x ، به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\frac{ds}{dx}. \tag{۱۳}$$

اما

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(در فرمول (۱۰) ، صفحهٔ ۱۰۸۰ ، قرار می‌دهیم $t = x$) . بنابراین ، (۱۳) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

یا ، برحسب متغیر کمکی $p = dy/dx$ ،

$$\frac{dp}{dx} = \frac{w}{H}\sqrt{1 + p^2} \tag{۱۴}$$

با جداسازی متغیرها در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۴) و انتگرالگیری ، به‌دست‌می‌آوریم

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{w}{H}\,dx + C_1,$$

که در آن C_1 ثابت انتگرالگیری است . بنابراین ، به کمک فرمول (۲) ، صفحهٔ ۵۷۳ ،

$$\sinh^{-1} p = \frac{wx}{H} + C_1,$$

یا معادلاً

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{wx}{H} + C_1\right)$$

شیب $p = dy/dx$ منحنی $y = y(x)$ در پایین‌ترین نقطهٔ خود صفر است (چرا؟) ؛ درنتیجه، $p|_{x=0} = 0$ ، که ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. لذا ،

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{wx}{H},$$

و ، با انتگرالگیری مجدد ، خواهیم داشت

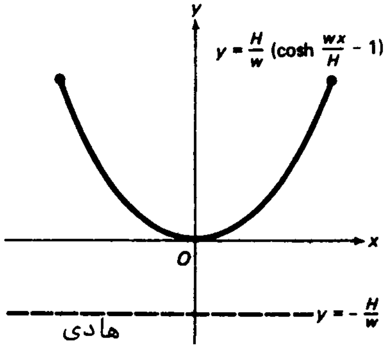
$$y = \int \sinh\frac{wx}{H}\,dx + C_2 = \frac{H}{w}\cosh\frac{wx}{H} + C_2, \tag{۱۵}$$

که در آن C_2 ثابت انتگرالگیری دیگری‌است . برای تعیین C_2 ، شرط $y(0) = 0$ را اعمال می‌کنیم (مبداء روی منحنی است) ، که ایجاب می‌کند که

$$0 = \frac{H}{w} + C_2$$

یا $C_2 = -H/w$. بنابراین ، (۱۵) به صورت زیر درمی‌آید :

$$y = \frac{H}{w}\left(\cosh\frac{wx}{H} - 1\right). \tag{۱۶}$$



شکل ۵۰

نمودار این معادله، که در شکل ۵۰ نموده شده، یک منحنی زنجیری نام دارد. خط افقی $y = -H/w$ هادی منحنی زنجیری است. از (۱۶) نتیجه می‌شود که هرگاه Y فاصلهٔ هادی تا نقطهٔ $P = (x, y)$ از منحنی زنجیری باشد، آنگاه

$$Y = \frac{H}{w}\cosh\frac{wx}{H}. \tag{۱۶'}$$

مسائل

همانند مثال ۱، گلوله‌ای از یک توپ به زاویهٔ ارتفاع α با تندی اولیهٔ (سرعت گریز) v_0 شلیک شده است.

۱. زمان کل پرواز گلوله از توپ تا هدف چقدر است؟

۲. ارتفاع ماکزیمم گلوله از سطح زمین و زمان صورت گرفتن آن چقدر است؟

۳. برد (افقی) توپ، یعنی مسافت $|OQ|$ در شکل ۴۶، را بیابید.

۴. نشان دهید که برد ماکزیمم توپ، وقتی زاویهٔ ارتفاع $45°$ باشد، مساوی v_0^2/g است.

۵. سرعت گریز لازم برای آنکه برد ماکزیمم توپ 20 mi باشد چقدر است؟

۶. نشان دهید که هر هدف که فاصله‌اش تا توپ از v_0^2/g (برد ماکزیمم) کمتر باشد را می‌توان با دو زاویهٔ ارتفاع مختلف مورد اصابت قرار داد.

۷. رأس و هادی مسیر سهموی گلوله را بیابید.

۸. نشان دهید که ارتفاع هادی همان ارتفاعی است که گلولهٔ شلیک شده باسرعت گریز v_0 به بالا به آن می‌رسد (و لذا، به زاویهٔ ارتفاع توپ بستگی ندارد).

۹. برد ماکزیمم یک توپ 10 mi است. برد آن در صورت شلیک با زاویهٔ ارتفاع $30°$ چقدر است؟

۱۰. دو زاویهٔ ارتفاع بیابید که یک خمپاره انداز با سرعت گریز 2000 ft/sec بتواند هدفی را در فاصلهٔ 15 mi بزند.

۱۱. هواپیمایی که در ارتفاع 200 ft با تندی ثابت 300 mph به طور افقی پرواز می‌کند بمبی را روی انبار مهمات دشمن می‌اندازد. بمب وقتی رها می‌شود که خط مستقیم دید از هواپیما به انبار زاویهٔ مشخصی با افق می‌سازد. این زاویه چقدر باید باشد تا بمب مستقیما" به هدف بخورد؟

۱۲. یک توپ کشیده به ارتفاع 75 ft پرتاب، و در فاصلهٔ 400 ft از محل پرتاب گرفته شده است. توپ چه مدت در هوا بوده است؟ زاویهٔ α بین مسیر توپ و افق را درلحظهٔ پرتاب بیابید. تندی اولیهٔ v_0 توپ چقدر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

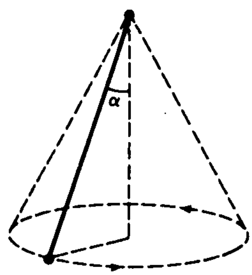
برای یک قمر مصنوعی در مداری مستدیر حول زمین و در ارتفاع داده شده (ازسطح‌زمین)، تندی v را به میل بر ثانیه و دورهٔ تناوب T را به دقیقه پیدا نمایید.

۱۳. 500 mi ۱۴. 2500 mi ۱۵. 5000 mi ۱۶. 10,000 mi

۱۷. برای یک قمر مصنوعی در مداری مستدیر که با سطح زمین تماس دارد، تندی v را به میل بر ثانیه و دورهٔ تناوب T را به دقیقه پیدا کنید. (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۱۸. در مثال ۵ تندی زاویه‌ای لازم برای داشتن شتاب $5g$ ؛ $10g$ چقدر است؟

۱۹. در دستگاهی به نام **پاندول مخروطی**، جسمی ("گلولهٔ" پاندول) به نخی به طول L بسته شده و در دایره‌ای افقی با تندی‌ثابت v چنان می‌گردد که نخ‌یک‌مخروط مستدیر قائم با محور قائم جارو می‌کند (ر.ک. شکل ۵۱). v را درصورتی بیابید که نخ به طول 120 cm بوده و زاویهٔ α بین نخ و قائم 30° باشد. اگر جرم جسم 50 گرم باشد، کشش T در نخ چقدر است (از $g = 980\ \text{cm/sec}^2$ استفاده کنید.)



شکل ۵۱

۲۰. جسمی به یک طناب بسته شده و در یک دایرهٔ **قائم** به شعاع R می‌گردد. این حرکت مستدیر (که یکنواخت نیست) را فقط وقتی می‌توان داشت که تندی جسم در بالای دایره دست کم به اندازهٔ تندی بحرانی v_{cr} باشد. نشان دهید که $v_{cr} = \sqrt{gR}$.

۲۱. یک سطل پر آب در انتهای طنابی بسته شده و دور یک دایرهٔ قائم به شعاع 80 cm می‌چرخد. تندی زاویه‌ای لازم برای جلوگیری از ریزش آب چقدر است؟

۲۲. مدار زمین به یک دایره به شعاع 1.5×10^8 km خیلی نزدیک است. با این فرض که ثابت عمومی ثقل G تقریبا "$6.67 \times 10^{-20}\ \text{km}^3/\text{kg}$ است، جرم خورشید را تخمین بزنید.

۲۳. مشتری 14 ماه دارد که چهار تای آنها، یعنی" قمرهای گالیله[1] " که عبارتند از یو ،

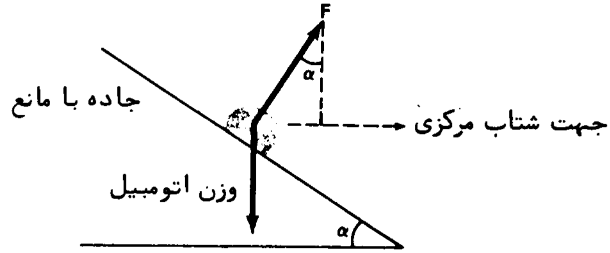
---

1. Galileo

اویروپا، گانیمد و کالیستو، توسط گالیله در ۱۶۱۰ کشف شدند. فرض کنیم T دورهٔ تناوب و n شعاع مدار یک ماه مشتری باشدکه با شعاع مشتری سنجیده می‌شود. در این صورت، بنابر اطلاعاتی که جان فیلم استید[1]، ستاره‌شناس سلطنتی معاصر نیوتن، به دست آورده است، نسبت n^3/T^2 حدوداً " $7.5 \times 10^{-9}\ \mathrm{sec}^{-2}$ " بوده و برای هر چهار قمر گالیله یکی است، که قانون سوم کپلر را تأیید می‌کند. با استفاده از این و مقدار G داده شده در مسئلهٔ قبل، نشان دهید که چگالی ρ مشتری درحدود چگالی آب است.

۲۴. وقتی یک اتومبیل در پیچ جاده حرکت می‌کند، اصطکاک وارد بر لاستیکها از طرف جاده شتاب مرکزی تولید می‌کند. این نیرو با وزن اتومبیل متناسب بوده و ثابت تناسب μ را *ضریب اصطکاک* می‌نامند. اگر اصطکاک نباشد، اتومبیل " روی مماس از مسیر منحرف می‌شود"؛ یعنی، واژگون می‌گردد. اگر $\mu = 0.5$، سرعت یک اتومبیل در یک جاده به شعاع انحنای 625 ft چقدر باید باشد تا واژگون نشود؟

۲۵. با ایجاد " مانع " در یک جاده خمیده، مثل شکل ۵۲، می‌توان از واژگون شدن اتومبیل جلوگیری کرد. در این صورت



شکل ۵۲

حتی وقتی بین جاده و لاستیکها اصطکاک محسوسی وجود نداشته باشد، مؤلفهٔ افقی نیروی قائم واکنش $\mathbf{F}$ وارد از جاده بر اتومبیل را می‌توان با شتاب مرکزی لازم تأمین کرد مشروط بر اینکه تندی اتومبیل چندان زیاد نباشد. *تندی متزاید* v_r منحنی با مانع تندی ماکزیممی تعریف می‌شود که در آن اتومبیل می‌تواند بدون کمک گرفتن از اصطکاک واژگون نشود (تصور کنید اتومبیل روی یک قطعه یخ خیس حرکت می‌کند). نشان دهید $v_r = \sqrt{gR \tan \alpha}$، که در آن R شعاع انحنای جاده و α زاویهٔ مانع باشد.

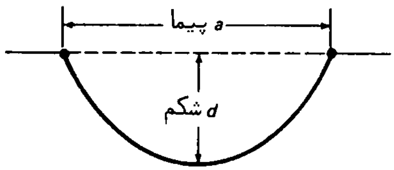
۲۶. یک مردتنومند بر دوچرخه‌ای در دایرهٔ افقی داخل یک بشکهٔ استوانه‌ای بزرگ به شعاع R سوار است. این فقط وقتی میسر است که بین بشکه و لاستیکهای دوچرخه

---

1. John Flamsteed

اصطکاک موجود بوده و تندی دوچرخه دست کم به اندازهٔ تندی بحرانی v_{cr} باشد .
نشان دهید $v_{cr} = \sqrt{gR/\mu}$ ، که درآن μ ضریب اصطکاک می‌باشد . (در واقع، دوچرخه نیز باید کمی به بالا کج شده باشد ، ولی از این صرف‌نظر کرده و دوچرخه و راننده را یک ذره تلقی می‌کنیم .)

۲۷ . فاصلهٔ a بین نقاط تکیه‌گاه یک کابل (یا زنجیر) **پیمای** آن نام دارد ،وفاصلهٔ قائم d بین نقاط تکیه‌گاه و پایین‌ترین نقطهٔ کابل شکم نامیده می‌شود (ر.ک. شکل ۵۳).



شکل ۵۳

در کابل سهموی مثال ۶ ،رابطهٔ بین پیما و شکم چیست ؟ نشان‌دهیدکه کشش ماکزیمم کابل در هر نقطه از تکیه‌گاه مساوی $\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}w^2a^2}$ است . کشش مینیمم چقدر و کجا می‌باشد ؟

۲۸ . پیمای یک پل معلق دو کابلی 200 ft ، شکم هر کابل 50 ft ، و وزن جاده 400 تن‌است. با فرض یکنواخت بودن جاده ، کشش هر کابل در وسط‌آن ؟ در هر نقطه از تکیه‌گاه چقدر است ؟

۲۹ . فرض کنید s طول منحنی‌زنجیری(۱۶) بین پایین‌ترین نقطه و نقطهٔ (x, y) باشد . نشان دهید که

$$s = \frac{H}{w} \sinh \frac{wx}{H}.$$

۳۰ . پیما و شکم زنجیر مثال ۷ چه رابطه‌ای باهم دارند ؟ نشان دهید که کشش ماکزیمم زنجیر در هر نقطه از تکیه‌گاه $H + wd$ است .کشش مینیمم چقدر و کجاصورت‌می‌گیرد ؟

۳۱ . نشان دهید که یک منحنی زنجیری کشیده (H/w بزرگ) نزدیک به سهموی است .

۳۲ . یک طناب سنگین به طول 40 m دارای شکم 10 m است . پیمای آن چیست ؟

اصطلاحات و مباحث کلیدی

اسکالرها و بردارها

اعمال جبری بر بردارها

بردارهای اساسی، مؤلفه‌های یک بردار
پایه‌های متعامد و متعامد یکه
نمایش بردارها به‌وسیلهٔ جفتهای مرتب
حاصل‌ضرب نقطه‌ای
تصویر یک بردار روی دیگری
کار به عنوان حاصل‌ضرب نقطه‌ای
توابع برداری
حد یک تابع برداری
مشتقگیری و انتگرالگیری از توابع برداری
سرعت و تندی
تابع طول قوس، طول قوس به عنوان پارامتر
بردار یکهٔ مماس
بردار یکهٔ قائم
انحنا، شعاع انحنا، دایرهٔ انحنا
شتاب، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب
حرکت گلوله
حرکت مستدیر یکنواخت
پل معلق و کابل آویزان

مسائل تکمیلی

فرض کنید $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$، $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$، و $\mathbf{c}=5\mathbf{i}+3\mathbf{j}$. حاصل عبارات زیر را بیابید.

۱. $-\mathbf{a}+3\mathbf{b}-2\mathbf{c}$ ۲. $\mathbf{a}-2\mathbf{b}+\mathbf{c}$ ۳. $4\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$

۴. $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}$ ۵. $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{|\mathbf{b}+\mathbf{c}|}$ ۶. $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|}$

۷. چه شرطی بر $|\mathbf{a}|$ و $|\mathbf{b}|$ تضمین می‌کند که $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نصف می‌کند؟

۸. فرض کنید $OABCDE$ یک‌شش ضلعی منتظم به‌طول ضلع 1 باشد. $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{EO}$، $\overrightarrow{OD}$، و$\overrightarrow{DA}$ را به صورت ترکیباتی‌خطی از بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$ بیان نمایید.

۹. رئوس یک چندضلعی منتظم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ و مرکز آن O است. نشان دهید که $\overrightarrow{OP}_1+\overrightarrow{OP}_2+\cdots+\overrightarrow{OP}_n=\mathbf{0}$.

۱۰. شخصی می‌تواند قایقی را با تندی 5 mph پارو بزند. او می‌خواهد از یک رودخانهٔ

مستقیم به پهنای 1 میل که در آن آب با سرعت 3-mph جریان دارد بگذرد . در چه جهتی باید پارو بزند تا هرچه زودتر از رودخانه عبور کند؟ در چه جهتی باید پارو بزند که مستقیماً " به نقطهٔ مقابل در آن طرف برسد ، و این کار چقدر طول خواهد کشید؟

۱۱ . $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ را درصورتی بیابید که $|\mathbf{a}|=13, |\mathbf{b}|=19, |\mathbf{a}+\mathbf{b}|=24$.

۱۲ . نشان دهید که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\frac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-\frac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2$.

۱۳ . $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ و $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ را درصورتی بیابید که $|\mathbf{a}|=5$ ، $|\mathbf{b}|=8$ ، و زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مساوی $2\pi/3$ باشد .

۱۴ . نشان دهید که هر چهارضلعی‌که اقطارش منصف هم‌باشندباید متوازی‌الاضلاع باشد .

۱۵ . بردارهای $\mathbf{a}=2t\mathbf{i}+\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}$ به ازای چه مقادیری از t موازیند؟ برهم‌عمودند؟

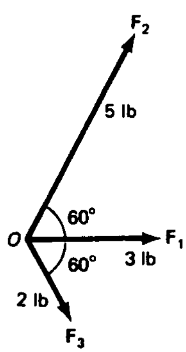
۱۶ . فرض کنید $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ دو بردار یکه باشند که باهم زاویهٔ $\pi/3$ می‌سازند . طول اقطار متوازی‌الاضلاع پیموده‌شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a}=2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$ و $\mathbf{b}=\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2$ رابیابید.

۱۷ . زاویهٔ حادهٔ بین اقطار یک مستطیل به طول 5 و عرض 3 چقدر است؟

۱۸ . زاویهٔ بین پاره‌خطهای مرسوم از یک رأس مستطیل به طول 6 و عرض 4 تا نقاط میانی اضلاع مقابل چقدر است؟

۱۹ . یک اتومبیل به وزن 2100-lb با تندی ثابت 25 mph از یک شیب $30°$ بالا می‌رود . توان مینیمم موتور اتومبیل چقدر است؟ از اصطکاک صرف‌نظر کنید .

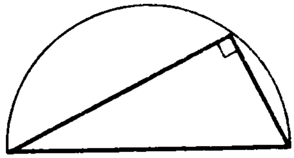
۲۰ . اندازه و جهت برآیند سه نیروی شکل ۵۴ را که همه بر O اثر می‌کنند پیدا نمایید .



شکل ۵۴

۲۱ . $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AB}}\,\overrightarrow{CD}$ و $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{CD}}\,\overrightarrow{AB}$ را به ازای نقاط $A=(1,2)$ ، $B=(2,3)$ ، $C=(3,4)$ ، و $D=(4,1)$ حساب کنید .

۲۲. با استفاده از بردارها، نشان دهید که هر زاویهٔ محاط شده در یک نیمدایره قائمه است (ر.ک. شکل ۵۵).



شکل ۵۵

۲۳. فرض کنید $\mathbf{r}$ بردار موضع یک نقطهٔ متغیر در صفحه بوده، و $\mathbf{a}$ بردار موضع نقطهٔ ثابتی باشد. با استفاده از حاصل‌ضرب نقطه‌ای، معادلهٔ برداری دایرهٔ مار بر مبداء و مرکز نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ را بنویسید.

۲۴. با استفاده از بردارها، نشان‌دهید که خط واصل بین مراکز دوایر متقاطع برخط واصل بین نقاط اشتراک عمود است.

حدود زیر را حساب کنید.

۲۵. $\lim_{t \to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t}\,\mathbf{i} + \frac{t-\sin t}{t^3}\,\mathbf{j}\right)$

۲۶. $\lim_{t \to -\infty}\left(\frac{2}{\tanh t}\,\mathbf{i} + \frac{|t|}{t}\,\mathbf{j}\right)$

۲۷. $\frac{d}{dt}[(\arcsin t)\mathbf{i} - (\arccos t)\mathbf{j}]$

۲۸. $\frac{d}{dt}\left(\sqrt{t+1}\,\mathbf{i} + \frac{2}{t+1}\,\mathbf{j}\right)$

۲۹. $\frac{d}{dt}[(t^2 e^t)\mathbf{i} + (\tanh^{-1} t)\mathbf{j}]$

۳۰. $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2}\,\mathbf{i} - \frac{1}{4-t^2}\,\mathbf{j}\right) dt$

۳۱. $\int_0^{\pi/3} [(\tan t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}]\, dt$

۳۲. $\int [(t \sin t)\mathbf{i} + (te^{-t})\mathbf{j}]\, dt$

۳۳ . آیا $\mathbf{r}\cdot(d\mathbf{r}/dt)\equiv 0$ ایجاب می‌کند که اندازهٔ تابع برداری $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ ثابت باشد ؟ جواب خود را توضیح دهید .

۳۴ . جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل برداری $d\mathbf{r}/dt=c\mathbf{r}$ بیابید که در شرط اولیهٔ $\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0$ صدق کند . در اینجا c یک اسکالر ثابت بوده ، و $\mathbf{r}_0$ بردار ثابتی می‌باشد .

بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر منحنی داده شده در نقطهٔ نظیر به مقدار ذکر شده از پارامتر t را بیابید .

۳۵ . $x=t^4-2t^2,\ y=t^3+1,\ t=-1$

۳۶ . $x=t+\cos t,\ y=\sin t,\ t=\pi/6$

۳۷ . $x=\ln(t+1),\ y=e^t,\ t=0$

۳۸ . $x=\sec t,\ y=\tan t,\ t=\pi/4$

۳۹ . انحنای $k=\kappa(x)$ منحنی $y=\ln(\sec x)$ را بیابید .

۴۰ . نشان دهید که شعاع انحنای $R=R(\theta)$ لمنیسکات $r^2=\cos 2\theta$ در هر نقطه غیراز مبداء با مختص شعاعی r تناسب معکوس دارد .

برای دایرهٔ بوسان منحنی داده شده در نقطهٔ $(1,1)$ معادله بنویسید . در هر حالت، منحنی و دایره را رسم کنید .

۴۱ . سهمی $y=x^2$

۴۲ . هذلولی $xy=1$

۴۳ . توپی را از یک پنجره به ارتفاع 64 ft به طور افقی به خارج پرتاب می‌کنیم . توپ در در فاصلهٔ 100 ft از دیوار ساختمان به زمین می‌خورد . تندی اولیهٔ توپ چقدر است ؟

۴۴ . گلوله‌ای از یک خمپاره‌انداز با سرعت گریز 600 m/sec با زاویهٔ ارتفاع $60°$ شلیک شده است . گلوله چقدر بالا می‌رود ؟ فاصلهٔ محل فرود گلوله تا خمپاره‌انداز چقدراست ، و چقدر در هوا می‌ماند ؟ (از $g=9.8\ \text{m/sec}^2$ استفاده کنید .)

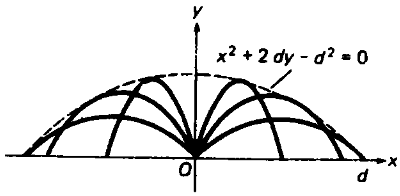
۴۵ . شخصی که در یک اتومبیل روباز در یک جادهٔ مستقیم حرکت می‌کند تفنگ خود را به طور قائم به بالا شلیک می‌کند . اگر تندی اتومبیل تغییر نکند ، کجا گلوله به زمین می‌رسد ؟ (از مقاومت هوا صرف نظر می‌شود .)

۴۶ . یک شکارچی با تیر و کمان مستقیما " جانوری را که از یک شاخه درخت آویزان است نشانه می‌رود . تیر درست به شاخه نرسیده ، بلکه در عوض به تنهٔ درخت جایی زیر شاخه می‌خورد . نشان دهید اگر جانور اشتباه کرده و در لحظهٔ پرتاب تیر خود را از شاخه رها کند مورد اصابت قرار خواهد گرفت .

۴۷ . یک توپ با برد ماکزیمم d واقع در مبداء در چه دو زاویهٔ ارتفاعی می‌تواند هدف واقع در $(\frac{1}{2}d,\frac{1}{4}d)$ را بزند ؟

۴۸ . نشان دهید که توپ مسئلهٔ قبل می‌تواند هرهدف داخل یا روی سهمی $x^2+2dy-d^2=0$ را بزند ولی ، همانطور که شکل ۵۶ نشان می‌دهد ، هیچ هدف داخل این سهمی را

نخواهد زد .



شکل ۵۶

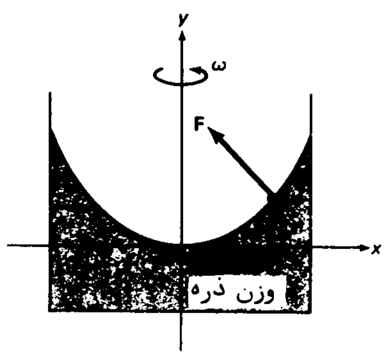
۴۹ . یک خلبان برای یک لحظه می‌تواند شتاب $8g$ ولی نه بیشتر را تحمل کند . اگر تندی هواپیما 420 mph باشد . شعاع انحنای ماکزیممی که خلبان می‌تواند هواپیما را در آخر شیرجه به بالا برگرداند چقدر است ؟

۵۰ . تندی متزاید (ر.ک . مسئلهٔ ۲۵ ، صفحهٔ ۱۱۱۷) یک جادهٔ مستدیر به شعاع 2250 ft که در زاویهٔ $30°$ سد شده است چقدر است ؟

۵۱ . مقطع مستدیر یک راه آهن ، به شعاع 1 mi ، برای اطمینان تا تندی 120 mph سد شده است . فاصلهٔ بین ریلها $4\ \text{ft}\ 8\frac{1}{2}$ است (فاصلهٔ متعارف) . " ابر ارتفاع " h ، یعنی ارتفاع ریل خارجی بالای ریل داخلی ، را پیدا کنید .

۵۲ . یک سطل استوانه‌ای که قدری آب دارد باتندی زاویه‌ای ثابت ω حول محورش می‌گردد. آب ، که ابتدا در حالت سکون است ، مآلا" سرعت دورانی سطح را می‌یابد . نشان دهید که شکل تعادل سطح آب یک سهمی‌گون دوار است . ω را درصورتی بیابید که قطر سطل 1 ft و سطح آب در مرکز سطل 4 in زیر سطح آب در محیط باشد .

راهنمایی . مختصات قائم x و y را مثل شکل ۵۷ اختیارکرده ، و فرض می‌کنیم $y = y(x)$ فصل مشترک صفحهٔ xy با سطح آب باشد . بر ذرهٔ آب $P = (x, y)$ روی سطح نیروی



شکل ۵۷

قائم واکنش **F** وارد می‌شود که از ناحیهٔ بقیهٔ مایع است، و **F** باید وزن ذره را خنثی کرده و شتاب‌مرکزی وی را تأمین نماید. نشان دهید که این به‌یک‌معادلهٔ دیفرانسیل برای $y = y(x)$ منجر می‌شود که حل ساده‌ای دارد.

یک طناب سنگین به طول 105 ft بین دو تکیه‌گاه به فاصلهٔ 100 ft آویزان است.

۵۳. شکم طناب چقدر است؟

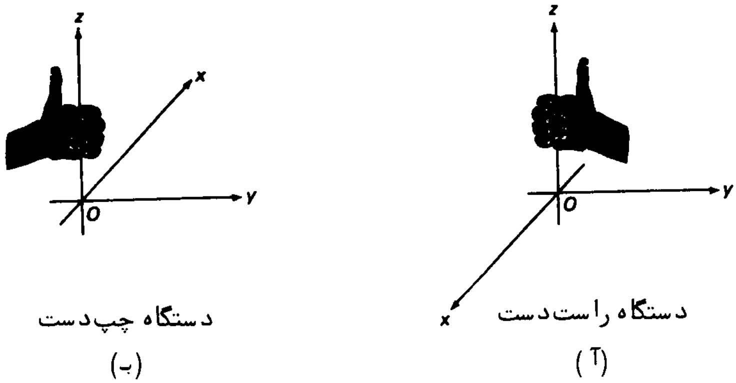
۵۴. اگر وزن طناب 2 lb/ft باشد، کشش مینیمم در طناب چقدر است؟ کشش‌ماکزیمم چقدر است؟

بردارها در فضا و هندسهٔ تحلیلی فضایی [12]

حال وقت آن است که از صفحهٔ دوبعدی به فضای سه بعدی برویم ، و ما این کار را در این فصل و فصول آتی انجام می‌دهیم . بحث را با معرفی مختصات قائم در فضا ومطالعهٔ چند سطح ساده آغاز می‌کنیم . سپس جبر بردارها را از بعد دو به بعد سه تعمیم می‌دهیم .ابتدا نکات مطرح شده در فصل پیش فقط با تعدیل مختصری عرضه می‌شوند ، ولی پس از آن در بخش ۳.۱۲ مفهومی جدید ،یعنی *حاصل ضرب خارجی* دوبردار فضایی ،وارد صحنه‌می شود . خطوط و صفحات در فضا در بخش ۴.۱۲ عنوان می‌شوند ، و در بخش ۵.۱۲ توابع برداری سه‌بعدی را مطرح کرده ، و صورت جدیدی از استنتاج نیوتن از قوانین حرکت سیاره‌ای کپلر عرضه می‌شود . ما مطالعهٔ سه‌بعدی یا هندسهٔ تحلیلی " فضایی " خود را بابررسی حالاتی که در رسم معادلهٔ درجهٔ دو از سه متغیر پیش می‌آیند خاتمه خواهیم داد .

۱.۱۲ مختصات قائم در فضا

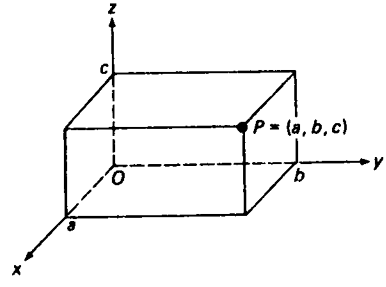
مختصات قائم در فضا توسیع طبیعی مختصات قائم در صفحه‌اند . فرض کنید سه‌خط دو به دو متعامد Ox ، Oy ، و Oz ، به نام *محورهای مختصات* ، هر یک مجهز به *جهت مثبت* (که در شکل ۱ با سر سهم نموده شده است) ساخته باشیم که در نقطهٔ O به نام *مبداء* متقاطع باشند . محورهای مختصات Ox ، Oy ، و Oz را به ترتیب محور x ، محور y ، و محور z می‌نامند . این محورها سه صفحهٔ *مختصات* دو به دو متعامد مشخص می‌کنند ، به نام صفحهٔ xy شامل محورهای x و y ، صفحهٔ xz شامل محورهای x و z ، و صفحهٔ yz شامل محورهای y و z . صفحهٔ yz در هر دو قسمت شکل ۱ صفحهٔ کاغذ است ، لیکن در قسمت (آ) محور x اشاره به خواننده دارد ، ولی در قسمت (ب) از خواننده دور می‌شود . دستگاه مختصات قسمت (آ) *راست دست* است بدین معنی که اگر انگشتان دست *راست* را طوری خم کنیم که از محور x مثبت به محور y مثبت بروند ، انگشت شست در امتداد محور z مثبت است ، ولی دستگاه مختصات قسمت (ب) *چپ دست* است ، بدین معنی که همان خاصیت را



شکل ۱

در رابطهٔ با دست چپ دارد. توجه کنید که دو دستگاه مختصات منعکس هم نسبت به صفحهٔ yz اند. از حالا به بعد ما فقط با دستگاههای مختصات راست دست کار خواهیم کرد. در این گونه دستگاه یک پیچ گوشتی، که تیغه‌اش $90°$ از محور x مثبت تا محور y مثبت می‌چرخد، به صورت عادی در امتداد محور z مثبت خواهد پیچید.

سه تاییهای مرتب و مختصات قائم. حال فرض کنیم (a, b, c) ***سه‌تایی‌مرتبی*** از اعداد حقیقی باشد، که در آن نماد نشان می‌دهد که a اول، b دوم، و c سوم خواهد آمد. در هر سه محور از یک واحد طول استفاده شده، a را به صورت نقطه‌ای از Ox (به عنوان خط اعداد) b را نقطه‌ای از Oy، و c را نقطه‌ای از Oz رسم می‌کنیم. سپس صفحهٔ عمود بر Ox در a، صفحهٔ عمود بر Oy در b، و صفحهٔ عمود بر Oz در c را رسم می‌نماییم. همانند شکل ۲، این سه صفحه در نقطهٔ P متقاطع اند که نمایش سه‌تایی مرتب (a, b, c) گرفته می‌شود. گوییم نقطهٔ P دارای ***مختصات قائم*** (یا ***دکارتی***) a، b، و c یا دقیقتر، مختص x، a، مختص y، b، و مختص z، c می‌باشد. با عکس کردن این ترسیم، یعنی با رسم صفحات ماربر

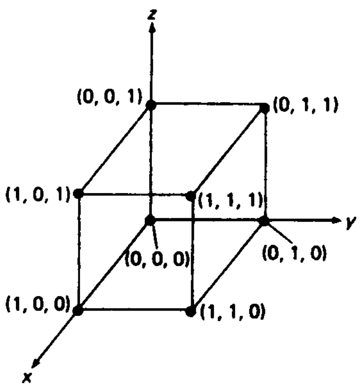


شکل ۲

P عمود بر محورهای مختصات (یا به‌صورت دیگر، رسم صفحات مار بر P موازی صفحات مختصات) می‌توان مختصات، ودرنتیجه‌سه‌تایی مرتب نظیربه نقطهٔ داده‌شدهٔ P رایافت.

لذا، یک نقطهٔ منحصر به فرد در فضا وجود دارد که نظیر یک سه‌تایی مرتب است، و به عکس یک سه‌تایی مرتب منحصر به فرد وجود دارد که نظیر یک نقطه در فضا می‌باشد. به خاطر این تناظر یک به یک، معمولاً" بین سه‌تاییهای مرتب و نقاط نمایش آنها فرق کمی می‌گذاریم یا اصلاً" تمایزی قایل نمی‌شوند. بخصوص، $P = (a, b, c)$ یعنی P نقطه‌ای‌است‌به مختص x، a، مختص y، b، و مختص z، c. (بعضی از موءلفان این نقطه را با $P(a, b, c)$ نشان می‌دهند.) توجه کنید که مبداءٔ O نقطهٔ $(0, 0, 0)$ است. البته تساوی‌دو سه‌تایی مرتب (a, b, c) و (d, e, f) یعنی دو سه تایی که عنصر اول، عنصر دوم، و عنصر سوم یکسان داشته‌باشند؛ درنتیجه، $a = d$، $b = e$، و $c = f$. مثلاً"، $(\sqrt{9}, 4, 0) = (3, 2^2, 0)$ ولی $(1, -1, 2) \neq (-1, 1, 2)$.

مثال ۱. چهار رأس $(0, 0, 0)$، $(1, 0, 0)$، $(0, 1, 0)$، و $(0, 0, 1)$ یک مکعب داده شده‌اند. چهار رأس دیگر آن را بیابید.



شکل ۳

حل. جواب از شکل ۳ واضح است. توجه کنید که هشت رأس مکعب نظیر هشت سه تایی مرتب متمایز است که هر عنصرشان 0 یا 1 می‌باشد. تمام دوازده ضلع مکعب به طول واحد بوده و هر شش وجه آن دارای مساحت واحد می باشد. حجم مکعب مساوی یک‌خواهدبود.

نقطهٔ (x, y, z) در صفحهٔ yz واقع است اگر و فقط اگر $x = 0$، و بر محور z واقع است اگر و فقط اگر $x = y = 0$. به بیان دیگر، صفحهٔ yz از تمام نقاط به شکل $(0, y, z)$ تشکیل

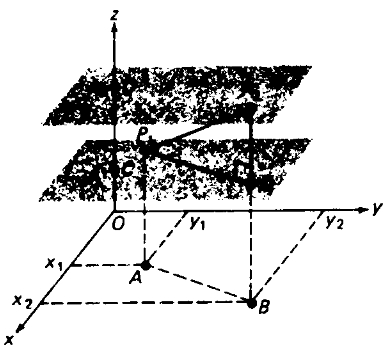
شده است ، ولی محور z از تمام نقاط به شکل $(0, 0, z)$ تشکیل شده است . به عنوان تمرین ، سایر صفحات و محورهای مختصات را توصیف نمایید . صفحات مختصات فضا را به‌هشت ناحیهٔ بی‌کران به نام **یکهشت** تقسیم می‌کنند . یکهشت *اول* از تمام نقاط (x, y, z) تشکیل شده است که در آن $x > 0, y > 0, z > 0$ ، ولی سایر یکهشتها معمولاً اسم خاصی ندارند .

فرمول فاصله. فاصلهٔ بین دونقطهٔ P_1 و P_2 در فضا ، مثل حالت نقاط در صفحه ، با $|P_1P_2|$ نموده می‌شود ، و قضیهٔ زیر تعمیم سه‌بعدی قضیهٔ ۶ ، صفحهٔ ۳۵ ، می‌باشد .

قضیهٔ ۱ (فاصلهٔ بین دو نقطه در فضا) . *فاصلهٔ بین دو نقطهٔ* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ در فضا *از فرمول زیر به دست می‌آید* :

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \qquad (۱)$$

برهان . از دو نقطهٔ P_1 و P_2 خطوطی بر صفحهٔ xy و صفحاتی بر محور z عمود می‌کنیم . در این صورت ، P_1P_2 وتر مثلث‌قائم‌الزاویهٔ P_1QP_2 شکل ۴ است ، که در آن $Q = (x_2, y_2, z_1)$ واضح است که $|P_1Q| = |AB|$ و $|QP_2| = |CD|$ ، که در آنها A و B نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) اند که در صفحهٔ xy درنظر گرفته می‌شوند ، ولی C و D نقاط z_1 و z_2 اند که برمحور z گرفته



شکل ۴

می‌شوند . لذا ، طبق قضیهٔ فیثاغورس و فرمول فاصله در صفحه و روی خط ، داریم

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 = |AB|^2 + |CD|^2\\ &= [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] + (z_1 - z_2)^2,\end{aligned}$$

که با (۱) معادل می‌باشد .

شکل ۴ تحت فرض $x_1 < x_2$ ، $y_1 < y_2$ ، و $z_1 < z_2$ رسم شده است ، ولی به آسانی معلوم می‌شود که فرمول فاصلهٔ (۱) در صورت عکس‌کردن یکی (یا چند تا) از این نامساویها نیز به دست می‌آید .

مثال ۲ . فاصلهٔ بین نقاط $P_1 = (3, 1, 9)$ و $P_2 = (-1, 4, -3)$ را پیدا نمایید .

حل . بنابر فرمول (۱) ،

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2 + (9+3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

نمودار معادلات و نامعادلات . منظور از *نمودار* یک یا چند معادله یا نامعادله‌از سه متغیر x ، y ، و z یعنی مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) در فضا که در معادلات یا نامعادلات‌داده شده صدق‌می‌کنند . لازم‌نیست همهٔ متغیرها حاضر باشند ،و دراین‌صورت مقادیر متغیرهای غایب نامحدودند . مثلاً ، نمودار $x = a$ صفحهٔ موازی صفحهٔ yz است که از $(a, 0, 0)$ می‌گذرد ، حال‌آنکه نمودار معادلات $x = a$، $y = b$ خط موازی محور z است که‌از $(a, b, 0)$ می‌گذرد .

مثال ۳ . معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{۲}$$

را رسم نمایید .

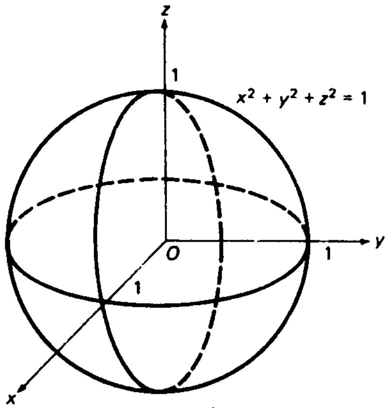
حل . چون $x^2 + y^2 + z^2$ مربع فاصلهٔ بین‌نقطهٔ (x, y, z) ومبداء $O = (0, 0, 0)$ است ،نقطهٔ (x, y, z) تعلق به نمودار (۲) دارد اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y, z) و O مساوی 1 باشد . لذا ، نمودار (۲) *کرهٔ یکه* است؛ یعنی ، کره به شعاع 1 و مرکز O (ر .ک . شکل ۵) .

مثال ۴ . نامعادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1 \tag{۳}$$

را رسم کنید .

حل . بنابر (۳) ، مربع فاصلهٔ بین نقطهٔ (x, y, z) و نقطهٔ O از ۱ کمتر است؛ و درنتیجه ،



کرهٔ یکه

شکل ۵

همین امر در مورد خود فاصله درست است. لذا، نمودار (۳) ناحیهٔ داخل کرهٔ یکهٔ (۲) است؛ این ناحیه **گوی یکهٔ باز** نام دارد. نمودار نامعادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \qquad (۳')$$

گوی یکهٔ بسته است؛ یعنی، مجموعهٔ مرکب از گوی یکهٔ باز همراه با مرزش (کرهٔ یکه) می‌باشد.

کرات . با تعمیم مثال ۳ معلوم می‌شود که مختصات نقطهٔ (x, y, z) در معادلهٔ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \qquad (r > 0) \qquad (۴)$$

صدق می‌کنند اگر و فقط اگر مجذور فاصلهٔ بین (x, y, z) و نقطهٔ ثابت (a, b, c) مساوی r^2 باشد یا، معادلاً"، اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y, z) و (a, b, c) مساوی r باشد. لذا، مختصات (x, y, z) در (۴) صدق می‌کنند اگر و فقط اگر (x, y, z) بر کره‌ای به شعاع r و مرکز (a, b, c) قرار داشته باشد. توجه کنید که اگر $a = b = c = 0$ و $r = 1$ اختیار شود، (۴) به معادلهٔ (۲) کرهٔ یکه تحویل می‌گردد.

مثال ۵. معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 11 = 0 \qquad (۵)$$

را رسم نمایید.

حل . با کامل کردن مربعها ، داریم

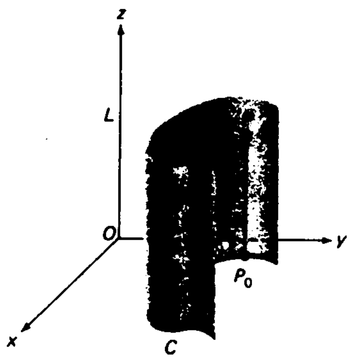
$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4, \qquad y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9, \qquad z^2 + 2z = (z + 1)^2 - 1,$$

و با گذاردن این عبارات در (۵) ، به دست می‌آوریم

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25,$$

که معادلهٔ کره‌ای به شعاع 5 و مرکز $(-2, 3, -1)$ می‌باشد . لذا ، معادلهٔ اصلی (۵) نیز این کره را به عنوان نمودار دارد .

استوانه‌ها . فرض‌کنیم C یک منحنی مسطح‌بوده ،و L خطی‌باشد که باصفحهٔ C موازی نباشد (یا در این صفحه قرار نداشته باشد) . در این صورت ، سطح S ساخته شده‌ازتمام‌خطوط مار بر C موازی L ***استوانه*** نام دارد . منحنی C را ***هادی*** استوانهٔ S نامیده ، و بی‌نهایت خطی که موازی L بوده و S را تشکیل می‌دهند ***خطوط جاری*** (یا ***مولدهای*** S) نام‌دارند . مثلا" ، شکل ۶ بخشی از استوانهٔ S را با منحنی C در صفحهٔ xy به عنوان هادی‌و



استوانه

شکل ۶

محور z به عنوان خط L نشان‌می‌دهد ؛ درنتیجه ،خطوط جاری همه موازی محور z می‌باشند . فرض‌کنیم $F(x, y)$ عبارتی شامل دو متغیر x و y بوده ، و منحنی C در شکل نمودارمعادلات همزمان

$$F(x, y) = 0, \qquad z = 0 \tag{۶}$$

است ، که معادلهٔ دوم $z = 0$ صرفا" به ما می‌گوید که C یک منحنی در صفحهٔ xy است. در این صورت ، استوانهٔ S ، با هادی C و خطوط جاری موازی محور z ، نمودار تنها معادلهٔ

$$F(x, y) = 0 \tag{۷}$$

است که از (۶) با حذف معادلهٔ دوم، یعنی با مجاز کردن z که مقادیر نامحدود (و نه فقط 0) را بگیرد، به‌دست‌می‌آید. درواقع، به ازای هر نقطهٔ $P=(x,y,z)$، $P_0=(x,y,0)$ را نقطهٔ اشتراک خط مار بر P موازی محور z و صفحهٔ xy می‌گیریم (ر.ک. شکل ۶). در این صورت، P بر S واقع است اگر و فقط اگر P_0 بر C باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر مختصات x و y نقطهٔ P_0، و درنتیجه P، در اولین معادلهٔ (۶) صدق نمایند. اما این بدان معنی است که، همانطور که حکم شده، S نمودار معادلهٔ (۷) می‌باشد.

عدم ظهور مختص z در معادلهٔ (۷) نشان می‌دهد که خطوط جاری S موازی محور z می‌باشند. به همین نحو،

$$F(x, z) = 0$$

معادلهٔ یک استوانه با خطوط جاری موازی محور y، و

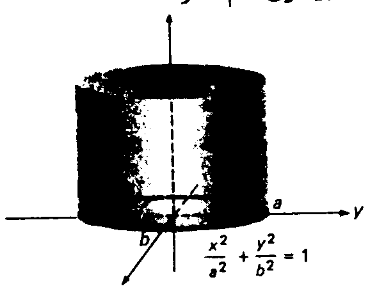
$$F(y, z) = 0$$

معادلهٔ یک استوانه با خطوط جاری موازی محور x می‌باشد. در هر حالت، خطوط جاری موازی محوری هستند که با مختص غایب نموده شده است.

مثال ۶. نمودار معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (۸)$$

استوانه‌ای است که خطوط جاری‌اش موازی‌محور z می‌باشند. اثر این‌استوانه در صفحهٔ xy؛ یعنی، اشتراک با صفحهٔ (x,y)، یک بیضی است (ر.ک. شکل۷)؛ یعنی، بیضی با همان معادلهٔ (۸) به عنوان معادله‌ای با مختصات نقطهٔ متغیر از صفحهٔ xy (فضای 2 بعدی) تا معادله ای با مختصات نقطهٔ متغیر (x,y,z) از فضای سه بعدی. به این دلیل، استوانه یک *استوانهٔ* بیضوی نام دارد.



استوانهٔ بیضوی

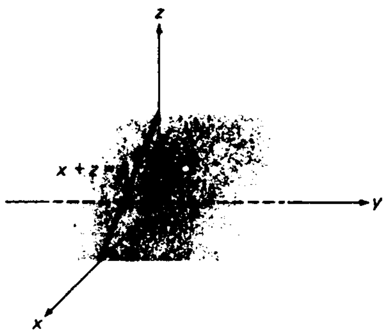
شکل ۷

هر مقطع عرضی استوانه به وسیلهٔ صفحهٔ موازی صفحهٔ xy یک بیضی است که با اثرش در صفحهٔ xy همنهشت است . اگر $a = b = r$، استوانهٔ بیضوی به استوانهٔ مستدیر قائم به‌شعاع r بدل می‌شود که محور z محور تقارن آن می‌باشد .

مثال ۷. در صفحهٔ xz نمودار

$$x + z = 1 \tag{۹}$$

یک خط است ، ولی در فضای 3 بعدی نمودار معادلهٔ خطی (۹) صفحهٔ شکل ۸ می‌باشد . این صفحه را استوانه‌ای تعبیر کنید که خطوط جاری‌اش موازی محور y اند .



شکل ۸

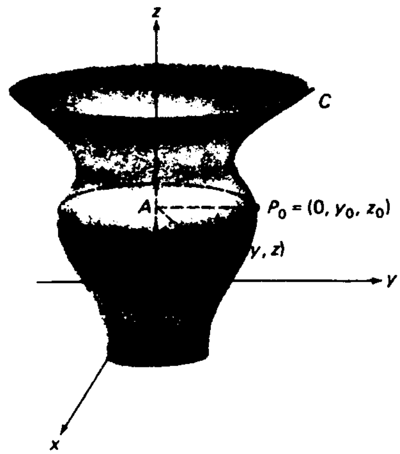
سطوح دوار . سطح حاصل از دوران یک منحنی مسطح حول خطی در صفحهٔ آن یک سطح دوار نام دارد . (ما قبلاً در بخش ۵.۸ با سطوح دوار، بدون تلاش‌در یافتن معادلاتشان در فضای سه‌بعدی ،برخورد داشته‌ایم .) مثلاً ، فرض کنیم منحنی C درصفحهٔ yz، نمودار معادلهٔ

$$F(y, z) = 0 \qquad (x = 0) \tag{۱۰}$$

بوده ، و C را حول‌محور z دوران‌داده سطح دوار S شکل ۹ را تولید می‌کنیم .دراین‌صورت، S نمودار معادلهٔ

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \tag{۱۱}$$

است که از $F(y, z) = 0$ به وسیلهٔ تعویض y با $\sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید (دراینجا موقتاً فرض می‌کنیم هر نقطهٔ C دارای مختص y نامنفی است) . در واقع ، به ازای هر نقطهٔ $P = (x, y, z)$ ، نقطهٔ $P_0 = (0, y_0, z_0)$ را اشتراک‌صفحهٔ yz بادایرهٔ‌مار بر P موازی‌صفحهٔ xy و مرکز A واقع بر محور z می‌گیریم . در این صورت ، P بر S واقع است اگر و فقط اگر



سطح دوار

شکل ۹

P_0 بر C واقع باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر $F(y_0, z_0) = 0$. از شکل واضح است که $z_0 = z$ و

$$y_0 = |AP_0| = |AP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

بنابراین، $F(y_0, z_0) = 0$ معادل (۱۱) است، و P بر S واقع است اگر و فقط اگر (۱۱) برقرار باشد؛ یعنی، همانطور که حکم شده، S نمودار معادلهٔ (۱۱) می‌باشد.

در هر نقطه از منحنی C با مختص y منفی، به جای $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ داریم $y_0 = -\sqrt{x^2 + y^2}$. لذا، به‌طورکلی، سطح S معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \qquad (۱۱')$$

که در آن اگر $y_0 \geq 0$ علامت مثبت و اگر $y_0 < 0$ علامت منفی را اختیار می‌کنیم.

اگر منحنی (۱۰) درصفحهٔ yz را به جای محور y حول محور z دوران دهیم، استدلالی مشابه نشان می‌دهد که سطح دوار حاصل از این کار معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

(ممکن است در بعضی حالات جلو رادیکال علامت منها لازم باشد). درجدول زیر فرمولهای فوق، همراه با نتایج مشابه برای منحنیها در صفحات xy و xz، داده شده‌اند. نکاتی در جدول را که قبلاً" بحث نشده‌اند تحقیق نمایید.

منحنی	محور دوران	سطح دوار
$F(y, z) = 0 \quad (x = 0)$	محور y محور z	$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(x, z) = 0 \quad (y = 0)$	محور x محور z	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(x, y) = 0 \quad (z = 0)$	محور x محور y	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$

مثال ۸. سهمی

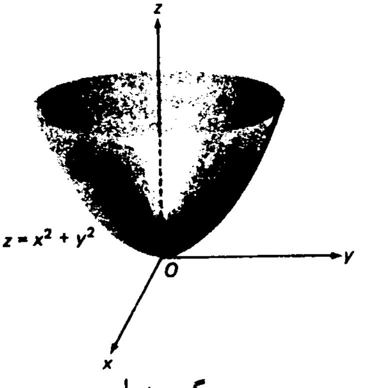
$$z = y^2 \qquad (x = 0, y \geq 0)$$

در ربع اول از صفحهٔ yz را حول محور z (محور تقارن آن) دوران داده، سهمی‌گون دوار شکل ۱۰ به معادلهٔ

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2,$$

یا معادلا "

$$z = x^2 + y^2 \tag{۱۲}$$

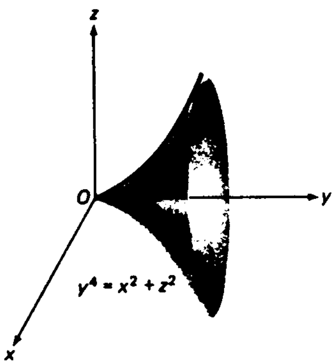


سهمی‌گون دوار

شکل ۱۰

به دست می‌آید . اثر این سطح در صفحهٔ $z = c > 0$ دایره‌ای به شعاع $\sqrt{c}$ و مرکز $(0, 0, c)$ است ، ولی اثرش در صفحهٔ xz سهمی $z = x^2$ است که می‌توان آن را با قرار دادن $y = 0$ در معادلهٔ (۱۲) به دست آورد . از دوران همین سهمی حول محور y ، سطح قیفی کاملاً متفاوت شکل ۱۱ به معادلهٔ

$$\sqrt{x^2 + z^2} = y^2,$$



شکل ۱۱

یا معادلاً

$$y^4 = x^2 + z^2,$$

که در آن $y \geq 0$ ، به دست می‌آید .

مثال ۹ . از دوران خط

$$y = z \qquad (x = 0)$$

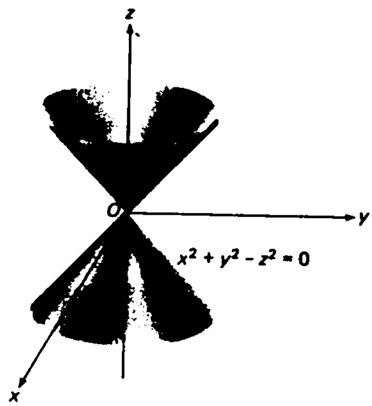
در صفحهٔ yz حول محور z ، سطح دوار S شکل ۱۲ به معادلهٔ

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = z$$

(وقتی $y < 0$ ، علامت منفی لازم است) ، یا معادلاً

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

به دست می‌آید . S یک مخروط مستدیر قائم دوپارچه به رأس مبداء است که هر مولد آن با محور مخروط، یعنی محور z ، زاویهٔ $45°$ می‌سازد . اثر S در صفحهٔ $z = c > 0$ دایره‌ای به شعاع c (نه $\sqrt{c}$ مثل مثال ۸) و مرکز $(0, 0, c)$ می‌باشد . برای همسازی با مطالب بخش ۵.۱۰، نشان دهید که اثر S در هر صفحهٔ $x = c$ یا $y = c$ هذلولی است اگر $c \neq 0$ و یک جفت خطوط متقاطع است اگر $c = 0$. اثر S در صفحهٔ xy چیست ؟

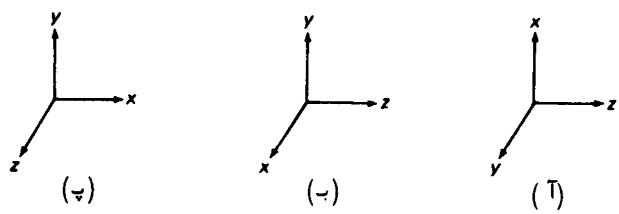


مخروط مستدیر قائم دوپارچه

شکل ۱۲

مسائل

۱. از سه دستگاه مختصات قائم شکل ۱۳ فقط دو تا راست دست‌اند.



شکل ۱۳

کدامها چنین‌اند؟

۲. یکی از دستگاههای مختصات شکل ۱۳ چپ‌دست است. چگونه می‌توان آن را راست دست ساخت؟

۳. یک مکعب مستطیل (جعبه) وجوهش موازی صفحات مختصاتند و مبداء O و نقطهٔ $(2, -3, 4)$ دورأس آن هستند. مکعب مستطیل را رسم کرده و شش رأس دیگرآن‌رابیابید.

۴. یک مکعب مستطیل به اضلاع موازی محورهای مختصات نقاط $(2, 1, -1)$ و $(-1, 3, 1)$ را به عنوان دو رأس دارد. مکعب مستطیل را رسم کرده و شش رأس دیگرآن‌رابیابید.

۵. در چه نقاط خط مار بر $(6, -7, 9)$ موازی محور y صفحهٔ مار بر $(8, -4, 5)$ موازی‌صفحهٔ xz را قطع می‌کند؟

فاصلهٔ بین نقطهٔ (a, b, c) و محورهای زیر را بیابید.

۶. محور x ۷. محور y ۸. محور z

فاصلهٔ بین جفت نقاط داده شده را بیابید .

۹. $(0, 0, 0), (12, -15, 16)$

۱۰. $(0, 1, 0), (-4, 3, 4)$

۱۱. $(4, -5, 3), (6, -2, -3)$

۱۲. $(1, 1, 5), (10, 3, -1)$

۱۳. $(8, 11, 9), (4, 12, 2)$

۱۴. $(3, \pi, -14), (-9, \pi, -9)$

۱۵. $(5, 0, -3), (0, 4, 0)$

۱۶. $(1, -1, 1), (-1, 1, -1)$

۱۷. نقطه‌ای روی محور y بیابید که از نقاط $(-1, 3, 7)$ و $(5, 7, -5)$ به یک فاصله باشد .

۱۸. نشان دهید که نقاط $A = (3, -1, 6)$ ، $B = (-1, 7, -2)$ ، و $C = (1, -3, 2)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند . چه ضلعی وتر است ؟

۱۹. کدام یک از نقاط $(-3, 0, 2)$ ، $(2, 1, 3)$ ، $(-1, 3, 1)$ ، و $(2, 2, -2)$ به مبداء نزدیکتر است ؟

۲۰. فرض کنید M نقطهٔ میانی پاره‌خط P_1P_2 واصل بین نقاط $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ باشد . نشان دهید که

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

راهنمایی . ر.ک. مثال ۴ ، صفحهٔ ۳۷ .

نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین جفت نقاط داده شده را بیابید .

۲۱. $(1, -7, 0), (-9, 11, 12)$

۲۲. $(-4, 9, 2), (6, 3, 8)$

۲۳. $(-1, 3, -5), (2, -4, 6)$

۲۴. $(-5, 10, -20), (5, -10, 20)$

گوییم دو نقطهٔ متمایز P و Q نسبت به نقطهٔ M متقارن اند اگر M نقطهٔ میانی پاره‌خط PQ باشد ، و نسبت به خط L یا صفحهٔ Π متقارن‌اند اگر L یا Π از نقطهٔ میانی M پاره‌خط PQ گذشته و بر PQ عمود باشد . فرض کنید P نقطهٔ $(5, -3, 2)$ باشد . نقطهٔ متقارن P را نسبت به

۲۵. مبداء

۲۶. نقطهٔ $(3, 1, -2)$

۲۷. محور x

۲۸. محور y

۲۹. محور z

۳۰. صفحهٔ xy

۳۱. صفحهٔ xz

۳۲. صفحهٔ yz

بیابید .

معادلهٔ کره به شعاع و مرکز داده شده را پیدا کنید .

۳۳. $5, (0, 0, 0)$

۳۴. $8, (-1, 1, -1)$

۳۵. $\sqrt{11}, (3, -2, 4)$

۳۶. $15, (10, -5, 10)$

نمودار معادلهٔ داده شده را رسم کنید.

۳۷. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 10z - 83 = 0$

۳۸. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 6 = 0$

۳۹. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 12y - 8z + 77 = 0$

۴۰. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3y - 4z = 0$

۴۱. $x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 16z + 90 = 0$

۴۲. $x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 14y - 22z + 270 = 0$

۴۳. معادلهٔ کره‌ای را بیابید که از نقطهٔ $(4, -1, -1)$ گذشته و بر هر سه صفحهٔ مختصات مماس است.

۴۴. معادلهٔ درجهٔ دو

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{(یک)}$$

را درنظر بگیرید، که در آن ضرایب x^2 ، y^2 ، و z^2 همه مساوی 1 اند، و فرض کنید

$$E = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D.$$

نشان دهید که نمودار (یک) کره‌ای است به شعاع $\sqrt{E}$ و مرکز $(-A/2, -B/2, -C/2)$ اگر $E > 0$ ، نقطهٔ $(-A/2, -B/2, -C/2)$ اگر $E = 0$ ، و مجموعهٔ تهی اگر $E < 0$.

نمودار معادله یا نامعادلهٔ داده شده را در فضای 3 بعدی توصیف کنید.

۴۵. $xy = 0$

۴۶. $xyz = 0$

۴۷. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

۴۸. $1 < y^2 + z^2 < 4$

نمودار معادلهٔ داده شده را در فضای 3 بعدی توصیف و رسم کنید.

۴۹. $z^2 - y^2 = 0$

۵۰. $x^2 + z^2 = 2z$

۵۱. $xy = -1$

۵۲. $y^2 + 4z^2 = 4$

۵۳. $y^2 - 8x = 0$

۵۴. $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

۵۵. $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

۵۶. $y^2 + z^2 - x = 0$

معادلهٔ سطح حاصل از دوران منحنی داده شده حول محور مشخص شده را بیابید.

۵۷. $x = 4z^2\ (y = 0)$ ، محور z

۵۸. همان منحنی، محور x

۵۹. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1\ (z = 0)$ ، محور x

۶۰. همان منحنی، محور y

۶۱. $y = \sqrt{z}\ (x = 0)$ ، محور y

۶۲. همان منحنی، محور z

۲.۱۲ از بردارها در صفحه تا بردارها در فضا

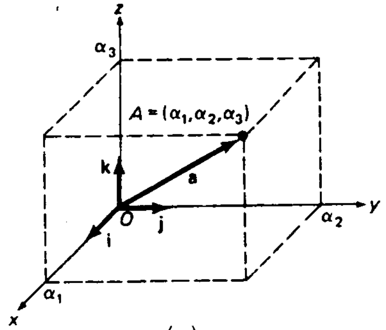
در صفحات ۱۰۵۰ تا ۱۰۴۵ بردارهای در صفحه و اعمال مختلفی مانند جمع ، تفریق ، و ضرب در اسکالرها را برآنها تعریف نمودیم . این تعاریف ، و قواعد حاکم بر این اعمال ، بدون هیچ تغییری برای بردارها در فضا صادقند ، به این دلیل ساده که اینها صرفا " هندسی و " فارغ از مختصات " می‌باشند . از حالا به بعد ، منظور از واژهٔ " بردار " بدون شرح بیشتر ، همواره یعنی بردار در فضای سه‌بعدی معمولی نه در یک صفحه .

مؤلفه‌های یک بردار. با اینحال ، وقتی مختصات وارد می‌شوند ، البته می‌توان انتظار تفاوتهایی بین حالات دوبعدی و سه‌بعدی را داشت . به‌طور مشخص ، فرض کنید دستگاهی از مختصات قائم x ، y ، و z در فضا به مبداء O داشته باشیم . همچنین ، $\mathbf{i}$ بردار یکه در امتداد محور x مثبت ، $\mathbf{j}$ بردار یکه در امتداد محور y مثبت ، و $\mathbf{k}$ بردار یکه در امتداد محور z مثبت ، مثل شکل ۱۴ (آ) ، باشد . در این صورت ، هر بردار مانند $\mathbf{a}$ (در فضا) نمایش منحصر به فردی به شکل زیر دارد :

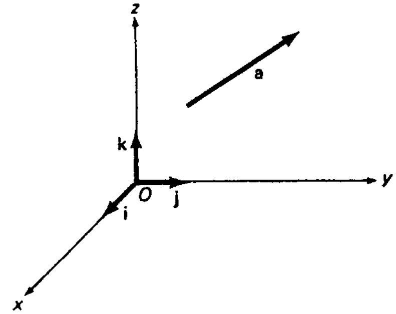
$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}. \qquad (۱)$$

اسکالرهای α_1 ، α_2 ، و α_3 *مؤلفه‌های* $\mathbf{a}$ نام دارند ، و به صورت زیر تعیین می‌شوند . بردار $\mathbf{a}$ را انتقال می‌دهیم ، یعنی به موازات خود بدون دوران حرکت می‌دهیم ، تا نقطهٔ شروعش بر مبداء O منطبق شود . در این صورت ، نقطهٔ پایان $\mathbf{a}$ نقطهٔ $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ از فضاست ، و البته $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ، زیرا تمام انتقال یافته‌های یک بردار باهم مساویند . اما ، همانطور که از شکل ۱۴ (ب) برمی‌آید ، مختصات α_1 ، α_2 ، و α_3 نقطهٔ A درست اسکالرهایی هستند که در نمایش یا " بسط " (۱) می‌آیند . به‌علاوه ، اندازهٔ $\mathbf{a}$ چیزی جز فاصلهٔ O تا A نیست ؛ یعنی ،

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \qquad (۲)$$



(ب)



(آ)

شکل ۱۴

منظور از یک *پایه* در فضا یعنی مجموعه‌ای از سه بردار ثابت مانند $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ ، به نام *بردارهای پایه* ، به طوری که هر بردار دلخواه $\mathbf{a}$ نمایش منحصر به فردی به‌شکل زیر داشته باشد:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \tag{۱'}$$

که *بسط* $\mathbf{a}$ نسبت به $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ نامیده می‌شود. در این صورت، اسکالرهای α_1 ، α_2 ، و α_3 *مؤلفه‌های* $\mathbf{a}$ (نسبت به $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$) نام دارند. می‌توان نشان داد که‌سه‌بردار ناصفر $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ یک پایه در فضا تشکیل می‌دهند اگر و فقط‌اگر غیر همصفحه باشند؛ یعنی، اگر و فقط‌اگر صفحه‌ای شامل (یا موازی) هر سه بردار موجود نباشد. اگربردارهای $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ از یک پایه دو به دو متعامد باشند، گوییم پایه **متعامد** است، واگر علاوه‌بر عمود بودن **یکه** نیز باشند، گوییم پایه **متعامد یکه** است. مثلاً، بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ در امتداد محورهای مختصات یک پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند. توجه کنید که فرمول (۲) فقط‌برای یک پایهٔ متعامد یکه معتبر است (چرا؟).

بردارها به عنوان سه‌تاییهای مرتب. از اینجا به بعد، باتوجه به نکات فوق، سه‌تاییهای مرتب را برای نمایش هم نقاط و هم بردارها درفضا به کارمی‌بریم. لذا، $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ می‌تواند به معنی نقطه به *مختصات* قائم α_1 ، α_2 ، و α_3 یا بردار $\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ با *مؤلفه‌های* α_1 ، α_2 ، و α_3 (نسبت به پایهٔ متعامد یکهٔ زمینهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$) باشد. همچنین، از آنجا که $\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ، $\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$ ، سه تاییهای مرتب نمایش بردارهای پایه خود عبارتنداز

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

حال می‌توان اعمال جبری را از دیدگاه سه‌تاییهای مرتب تعبیر کرد. فرض کنیم $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ بردارهای دلخواهی در فضا باشند. در این صورت،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) + (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}),$$

و درنتیجه،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{i} + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{j} + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{k} \tag{۳}$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3). \tag{۳'}$$

هرگاه p یک اسکالر باشد، آنگاه $p\mathbf{a} = p(\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k})$؛ و درنتیجه،

$$p\mathbf{a} = p\alpha_1\mathbf{i} + p\alpha_2\mathbf{j} + p\alpha_3\mathbf{k} \tag{۴}$$

یا

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (p\alpha_1, p\alpha_2, p\alpha_3). \qquad (۴')$$

پس از (۳') معلوم می‌شود که به ازای هر بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ،

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (0, 0, 0) = (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0, \alpha_3 + 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

درنتیجه ، $(0, 0, 0)$ سه‌تایی مرتب نمایش بردار صفر $\mathbf{0}$ است . برای به دست آوردن سه‌تایی مرتب نمایش $\mathbf{a}-$ ، در فرمول (۴) قرار می‌دهیم $p = -1$ ، خواهیم داشت $-\mathbf{a} = -\alpha_1\mathbf{i} - \alpha_2\mathbf{j} - \alpha_3\mathbf{k}$ یا معادلا"

$$-\mathbf{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3).$$

به‌علاوه ، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ ؛ درنتیجه ،

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3) \qquad (۵)$$

یا

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3). \qquad (۵')$$

همچنین ، دو بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ در فضا مساویند اگر و فقط اگر $\alpha_1 = \beta_1$ ، $\alpha_2 = \beta_2$ ، و $\alpha_3 = \beta_3$ ، و این درست به دلیل مشابهی است که درصفحات ۱۰۵۳ تا ۱۰۵۴ برای بردارها در صفحه ذکر شد .

مثال ۱ . فرض‌کنید $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ ، $\mathbf{b} = (-1, 4, -2)$ ، و $\mathbf{c} = (1, 8, 7)$. بردار $2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ را حساب کرده ، و سپس اندازه‌اش را بیابید .

حل . با استفادهٔ آزاد از قواعد (۳) تا (۵) ، داریم

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} &= 2(2, -1, 3) + (-1, 4, -2) - (1, 8, 7) \\ &= (4 - 1 - 1, -2 + 4 - 8, 6 - 2 - 7) = (2, -6, -3), \end{aligned}$$

یا معادلا"

$$2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

بنابر فرمول (۲) ، اندازهٔ این بردار مساوی است با

$$|2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

مثال ۲ . بردار یکهٔ $\mathbf{u}$ را همجهت بردار $15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ پیدا کنید .

حل . اندازهٔ $15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ عبارت است از

$$|15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}| = \sqrt{15^2 + (-12)^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25,$$

و درنتیجه ،

$$\mathbf{u} = \frac{15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}}{|15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{12}{25}\mathbf{j} + \frac{16}{25}\mathbf{k}.$$

حاصل‌ضرب نقطه‌ای. همانند بردارها در صفحه ، *حاصل‌ضرب نقطه‌ای* دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در فضا با فرمول زیر تعریف می‌شود :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos \theta, \tag{۶}$$

که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است $(0 \le \theta \le \pi)$. پس از (۶) نتیجه می‌شودکه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ ، و نیز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمود باشند (بردار صفر بر هر بردار عمود فرض می‌شود) . هرگاه $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ، آنگاه

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{۷}$$

برهان اساساً همان برهان قضیهٔ ۱ ،صفحهٔ ۱۰۶۳، است ، و به عنوان تمرین گذارده می‌شود. با استفاده از فرمول (۷) ، می‌توان به آسانی تحقیق کرد که هرگاه p و q اسکالر باشند ، آنگاه ، به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ،

$$(p\mathbf{a}) \cdot (q\mathbf{b}) = pq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

حال آنکه ، به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ ،

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

درست مثل نتیجهٔ صفحهٔ ۱۰۶۳ .

مثال ۳. بنابر فرمول (۷) ،حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a} = (4, -3, 6)$ و $\mathbf{b} = (2, 5, -1)$ مساوی است با $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4(2) - 3(5) + 6(-1) = 8 - 15 - 6 = -13$.

بردارهای یکهٔ $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ، $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ، و $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ در فرمولهای مهم

$$\begin{gathered} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{gathered} \tag{۸}$$

صدق می‌کنند . مثلاً ، $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1(1) + 0(0) + 0(0) = 1$ ، $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1(0) + 0(1) + 0(0) = 0$ و غیره . فرمولهای (۸) نیز نتیجهٔ فوری تعریف (۶) و این امر که $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ پایهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند می‌باشند .توجه کنید که هرگاه $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ ، آنگاه به کمک (۸) ،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = \alpha_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + \alpha_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \alpha_1,$$

و به همین نحو، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}=\alpha_2$ و $\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}=\alpha_3$.

فرض کنیم θ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر **a** و **b** باشد. از (۶) نتیجه می‌شود که

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}. \tag{۹}$$

مثال ۴. زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=-4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ را بیابید.

حل. در اینجا داریم

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=1(-4)-2(1)+4(-2)=-14,$$
$$|\mathbf{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21},\qquad |\mathbf{b}|=\sqrt{(-4)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{21}.$$

بنابراین،

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\frac{-14}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=-\frac{2}{3},$$

که ایجاب می‌کند

$$\theta=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\approx 131.8°.$$

فرض کنیم **a** و **b** دو بردار ناصفر در فضا باشند. دراین صورت، ***مولفهٔ a در امتداد b*** با $\operatorname{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ ، و ***تصویر a روی b*** با $\operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ نموده و، مثل حالت بردارها در صفحه، با فرمولهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\operatorname{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},\qquad \operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$$

(ر.ک. صفحهٔ ۱۰۶۶). توجه کنید که $\operatorname{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ اسکالر است، ولی $\operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ بردارمی‌باشد.

مثال ۵. $\operatorname{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ و $\operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ را درصورتی‌بیابید که $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$. **a** را به صورت مجموع یک بردار موازی **b** و یک بردار متعامد به **b** ("متعامد" مترادف "عمود برهم" است) نمایش دهید.

حل. چون

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2(1)-3(2)+1(-2)=-6,\qquad |\mathbf{b}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3,$$

داریم

$$\operatorname{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = -\frac{6}{3} = -2,$$

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{-6(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})}{9} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}.$$

بردار $\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ موازی $\mathbf{b}$ است ، و بردار

$$\mathbf{a} - \operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) - \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{8}{3}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

متعامد به $\mathbf{b}$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۲۲ ، صفحهٔ ۱۰۶۶) . لذا ، نمایش $\mathbf{a}$ به صورت مجموع برداری موازی $\mathbf{b}$ و برداری متعامد به $\mathbf{b}$ عبارت است از

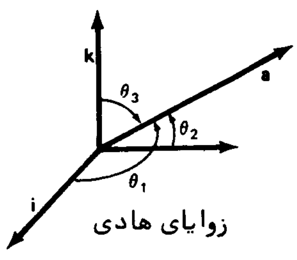
$$\mathbf{a} = \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}\right) + \left(\frac{8}{3}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right).$$

زوایای هادی و کسینوسهای هادی . فرض کنیم $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ بردار ناصفری‌باشد . همچنین ، θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 زوایای بین $\mathbf{a}$ و بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ باشند (ر.ک. شکل ۱۵) . در این صورت ، از (۹) معلوم می‌شود که

$$(10)\quad \cos\theta_1 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|} = \frac{\alpha_1}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\theta_2 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}||\mathbf{j}|} = \frac{\alpha_2}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}||\mathbf{k}|} = \frac{\alpha_3}{|\mathbf{a}|},$$

یا معادلاً

$$(10')\qquad \alpha_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta_1, \qquad \alpha_2 = |\mathbf{a}|\cos\theta_2, \qquad \alpha_3 = |\mathbf{a}|\cos\theta_3.$$



زوایای هادی

شکل ۱۵

زوایای θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 *زوایای هادی* بردار $\mathbf{a}$ (یا هرخط جهتدار L همجهت $\mathbf{a}$)نام دارند، و اعداد $\cos\theta_1$ ، $\cos\theta_2$ ، و$\cos\theta_3$ را *کسینوسهای‌هادی* $\mathbf{a}$ (یا L) می‌نامند. کسینوسهای

هادی جهت $\mathbf{a}$ را کاملا" مشخص می‌کنند، ولی راجع به اندازهٔ $\mathbf{a}$ چیزی نمی‌گویند. با گذاردن (′۱۰) در فرمول $|\mathbf{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ برای مجذور اندازهٔ $\mathbf{a}$، معلوم می‌شود که

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3).$$

لذا، کسینوسهای هادی $\cos\theta_1$، $\cos\theta_2$، و $\cos\theta_3$ باید در شرط زیر صدق کنند:

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1. \qquad (۱۱)$$

مثال ۶. کسینوسهای هادی و زوایای هادی بردار $\mathbf{a} = (4, -8, 1)$ را بیابید.

حل. با استفاده از (۱۰) به ازای $\alpha_1 = 4$، $\alpha_2 = -8$، $\alpha_3 = 1$، و

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9,$$

معلوم می‌شود که بردار $\mathbf{a}$ دارای کسینوسهای هادی

$$\cos\theta_1 = \frac{4}{9}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{8}{9}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{1}{9},$$

و زوایای هادی

$$\theta_1 = \arccos\frac{4}{9} \approx 63.6°,$$

$$\theta_2 = \arccos\left(-\frac{8}{9}\right) \approx 152.7°$$

$$\theta_3 = \arccos\frac{1}{9} \approx 83.6°$$

می‌باشد.

مثال ۷. آیا یک بردار یا خط جهتدار می‌تواند زوایای هادی $\theta_1 = 45°$ $\theta_2 = 135°$، و $\theta_3 = 60°$ داشته باشد؟

حل. خیر، زیرا شرط (۱۱) برقرار نیست. در واقع،

$$\cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{1}{2},$$

و درنتیجه،

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1.$$

بالاخره، می‌گوییم که *وابستگی خطی* و *استقلال خطی* برای بردارها در فضا درست مثل بردارها در صفحه تعریف می‌شوند (ر.ک. صفحهٔ ۱۰۵۷). می‌توان نشان داد که هر **چهار بردار در فضا وابستهٔ خطی‌اند و سه بردار در فضا مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر غیر همصفحه باشند**. مثلاً، بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$، $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ غیر همصفحه می‌باشند (چرا؟)؛ و درنتیجه، مستقل خطی می‌باشند. این را می‌توان با نشان دادن اینکه $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ تساویهای $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ راایجاب می‌کند امتحان نمود.

مسائل

بردارهای $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ و $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ را در هر حالت بیابید.

۱. $\mathbf{a} = (1, -2, 4), \mathbf{b} = (3, 2, -1)$

۲. $\mathbf{a} = (4, 0, 7), \mathbf{b} = (2, 5, 0)$

۳. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۴. $\mathbf{a} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

بردار $\overrightarrow{AB}$ را با نقاط انتهایی داده شده بیابید.

۵. $A = (-3, 2, 5), B = (4, 1, -1)$

۶. $A = (7, 0, 3), B = (6, 2, 9)$

۷. $A = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), B = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{6})$

۸. $A = (13, -11, 5), B = (15, 17, -9)$

۹. نقطهٔ پایان بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ را درصورتی بیابید که نقطهٔ شروعش $(1, 2, -3)$ باشد؟

۱۰. نقطهٔ شروع بردار $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ را درصورتی بیابید که نقطهٔ پایانش $(-4, 0, 5)$ باشد.

اندازهٔ بردار داده شده را بیابید.

۱۱. $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۲. $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۱۳. $6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۱۴. $-4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را یافته، و زاویهٔ بین آنها را نیزپیداکنید.

۱۵. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۶. $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۷. $\mathbf{a} = (1, 1, -1), \mathbf{b} = (-1, 1, 1)$

۱۸. $\mathbf{a} = (12, -15, 16), \mathbf{b} = (2, 2, 1)$

۱۹. مقدار t را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a}=t\mathbf{i}-5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ متعامد باشند.

۲۰. مقادیر s و t را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ موازی باشند.

$\mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$ را به ازای بردارهای داده شدهٔ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ حساب کنید.

۲۱. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

۲۲. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۲۳. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۲۴. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

آیا یک بردار می‌تواند زوایای داده شده را به عنوان زوایای هادی داشته باشد؟

۲۵. $45°, 45°, 60°$ ۲۶. $90°, 150°, 60°$ ۲۷. $45°, 60°, 120°$

آیا یک بردار می‌تواند با دوتا از سه محور مختصات مثبت زوایای داده شده را بسازد؟

۲۸. $30°, 45°$ ۲۹. $150°, 30°$ ۳۰. $60°, 60°$

کسینوسهای هادی و زوایای هادی بردار داده شده را بیابید.

۳۱. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

۳۲. $12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۳۳. $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

۳۴. $-15\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

۳۵. برداری با هر سه محور مثبت مختصات زاویهٔ حادهٔ θ می‌سازد. θ را بیابید.

۳۶. مکعبی بردارهای $2\mathbf{i}$ ، $2\mathbf{j}$ ، و $2\mathbf{k}$ را به عنوان سه یال خود دارد. زاویهٔ بردار واصل از مبداء O تا مرکز وجه جلو مکعب با بردار واصل از O تا مرکز وجه بالایی را بیابید.

۳۷. در یک کارت مربع شکل یکی از اقطارش رسم شده است، و نیز دو خط دیگر در آن ترسیم شده که کارت را به سه نوار مستطیلی همنهشت تقسیم کرده‌اند. سپس کارت در امتداد اضلاع نوارهای مستطیلی تاخورده و به یک منشور مثلث القاعدهٔ منتظم تبدیل شده است. تازدن سبب شده تا قطر یک مسیر چندضلعی مرکب از سه پاره‌خط گردد، بر هر وجه جانبی منشور یکی. زاویهٔ بین دوپاره‌خط متوالی این مسیر را بیابید.

۳۸. بردار $\mathbf{b} = (4, 2, 3)$ را به صورت ترکیبی‌خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$ ، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$ و $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ بیان کنید.

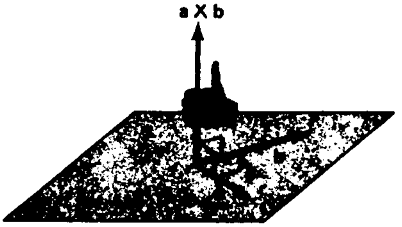
۳۹. یک پایهٔ غیرمتعامد در فضا مثال بزنید.

۳.۱۲ حاصل‌ضرب خارجی

مفهوم " حاصل‌ضرب خارجی " دوبردار هم در مسائل هندسی یافتن برداری عمود بر دو بردار داده شده و هم در مسائل مختلف فیزیکی ، از جمله رفتار نوک دوک و حرکت‌یک‌ذرهٔ باردار در میدان مغناطیسی ظاهر می‌شود . منظور از *حاصل‌ضرب خارجی* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ (به همین ترتیب) یعنی بردار با اندازهٔ

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \theta, \tag{1}$$

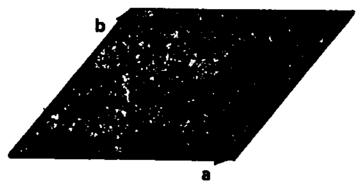
که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است (که در صفحهٔ ۱۰۶۰ تعریف شد) ، به‌طوری‌که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بر صفحهٔ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود می‌باشد . همچنین ،ازدوراستادرامتدادعمودجهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را جهتی اختیار می‌کنیم که با آن بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ یک " دستگاه راست‌دست" تشکیل دهند . این بدان معنی است که هرگاه انگشتان دست راست را طوری خم کنیم‌که از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ به اندازهٔ θ بروند ، آنگاه شست اشاره به جهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ خواهد داشت .ر.ک. شکل ۱۶ . به بیان دیگر، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ اشاره به‌جهت حرکت یک‌پیچ معمولی (با شیارهای‌راست‌دست) دارد که توسط یک پیچ گوشتی که تیغه‌اش از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ به اندازهٔ θ می‌چرخد پیچیده می‌شود. هرگاه $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ یا $\mathbf{b} = \mathbf{0}$، آنگاه θ تعریف نشده‌است ، و طبق تعریف‌قرارمی‌دهیم $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.



تعبیر هندسی حاصل‌ضرب خارجی

شکل ۱۶

حاصل‌ضرب خارجی را *حاصل‌ضرب برداری* نیز می‌نامند ، زیرا $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *بردار*است. این با حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ از آنجهت فرق دارد که حاصل ضرب نقطه‌ای *اسکالر* می‌باشد . (توجه کنید که حاصل‌ضرب خارجی را می‌توان فقط برای بردارهای در*فضا*تعریف کرد .) از فرمول (۱) و شکل ۱۷ معلوم می‌شود که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است . در واقع ، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ حاصل ضرب قاعدهٔ $|\mathbf{a}|$ در ارتفاع $|\mathbf{b}| \sin \theta$ این متوازی‌الاضلاع است .



شکل ۱۷

خواص حاصل‌ضرب خارجی. زاویهٔ بین یک بردار و خودش صفر است. بنابراین،

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| \sin 0 = 0,$$

درنتیجه،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}. \qquad (۲)$$

حاصل ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ مساوی $\mathbf{0}$ است اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ موازی $\mathbf{b}$ باشد، که به‌صورت $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ نوشته شده و به معنی $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$ است که در آن p اسکالر است. (با اختیار $p = 0$ می‌بینیم که بردار صفر موازی هر بردار است.) در واقع، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ معادل است با

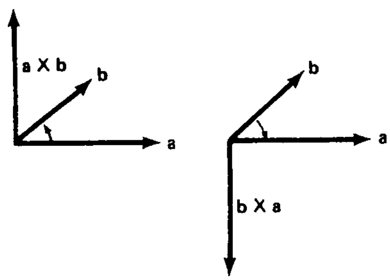
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \theta = 0 \qquad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

و این فرمول برقرار است اگر و فقط اگر $\sin \theta = 0$؛ و درنتیجه، $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$، یا دست کم یکی از بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مساوی $\mathbf{0}$ می‌باشد؛ لذا، در هر حالت، $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

اگر وقتی انگشتان دست‌راست شما از $\mathbf{a}$ به $\mathbf{b}$ خم شده‌اند شستتان در جهتی باشد، با خم شدن انگشتان از $\mathbf{b}$ به $\mathbf{a}$ شست جهت مقابل را نشان می‌دهد. (امتحان کنید: "شست بالا، شست پایین"، آزمایش کنید و ببینید!) لذا، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ جهتهای مختلف دارند. ولی اندازهٔ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ یکسان است، و این را می‌توان از مقایسهٔ فرمول (۱) با فرمول

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}| \sin \theta$$

دریافت. بنابراین، مثل شکل ۱۸،



حاصل‌ضرب خارجی پاد تعویضپذیر است

شکل ۱۸

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad (۳)$$

زیرا بردارهای هم‌اندازه و مختلف‌الجهت قرینهٔ یکدیگرند. فرمول (۳) نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب خارجی تعویضپذیر نیست؛ درواقع، **پاد تعویضپذیر** است، بدین‌معنی‌که ***تغییر ترتیب عوامل $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ علامت حاصل‌ضرب $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را تغییر می‌دهد.***

مثال ۱. نشان دهید که

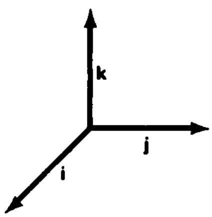
$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \end{array} \qquad (۴)$$

که درآن $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بردارهای پایهٔ یکهٔ دستگاه راست دست مختصات‌قائم می‌باشند.

حل. سه فرمول اول نتایج فوری فرمول (۲) هستند. برای اثبات سه فرمول‌وسط، ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ یک دستگاه راست دست تشکیل می‌دهند؛ و درنتیجه، $\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}$ و $\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ نیز چنین می‌کنند (ر.ک. شکل ۱۹)، ولی

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{j}| \sin 90° = 1,$$

و به همین نحو، $|\mathbf{j} \times \mathbf{k}| = |\mathbf{k} \times \mathbf{i}| = 1$. چون حاصل‌ضرب خارجی پاد تعویضپذیر است، سه فرمول اخیر فوراً از سه فرمول وسط به دست می‌آیند.



شکل ۱۹

توجه کنید که هر فرمول حاصل‌ضرب خارجی مستلزم هر سه بردار $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ ، در صورت تعویض $\mathbf{i}$ با $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}$ با $\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k}$ با $\mathbf{i}$ ، برقرار است. لذا، برای تولید تمام فرمولهای مهم (۴)، کافی است تنها فرمول $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ را همراه با قواعد (۲) و (۳) به‌یاد آوریم.

قضیهٔ زیر شبیه نتیجهٔ صفحهٔ ۱۰۶۲ برای حاصل‌ضربهای خارجی است.

قضیهٔ ۲ (**خواص دیگر حاصل‌ضرب خارجی**). *هرگاه p و q اسکالر باشند، آنگاه، به ازای*

هر دو بردار دلخواه **a** و **b**،

$$(p\mathbf{a}) \times (q\mathbf{b}) = pq(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{۵}$$

ضرب خارجی در قوانین پخشپذیری

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \tag{۶}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \tag{۶}$$

نیز به ازای بردارهای دلخواه **a**، **b**، و **c** صدق می‌کنند.

برهان این قضیه کمی خسته‌کننده است؛ و لذا، تا آخر بخش به تعویق می‌افتد.

مثال ۲. با استفاده از قضیهٔ ۲ و پاد تعویضپذیری حاصل‌ضرب خارجی، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) &= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + 4(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - 6(\mathbf{b} \times \mathbf{b})\\ &= 0 - 4(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - 3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - 0 = -7\mathbf{a} \times \mathbf{b},\end{aligned}$$

که در آن $p\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ اختصاری برای $p(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ است.

مثال ۳. حاصل‌ضربهای خارجی شرکت *نا*پذیر اند؛ یعنی $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ لزوماً مساوی $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ نیست؛ لذا، نمی‌توان پرانتزها را حذف کرد و فقط نوشت $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. مثلاً، طبق (۴) و (۶)،

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{j} - \mathbf{i},$$

حال آنکه

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j})) = \mathbf{i} \times [(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + (\mathbf{j} \times \mathbf{j})] = \mathbf{i} \times (-\mathbf{k}) = \mathbf{j},$$

درنتیجه،

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j})).$$

دترمینانها، پیش از ادامهٔ بحث، کمی منحرف شده یک مفهوم جبری معرفی می‌کنیم که بررسی حاصل‌ضربهای خارجی را بسیار ساده می‌کند. علایمی به شکل

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{۷}$$

که در آنها یک آرایهٔ مربع شکل از اعداد حقیقی بین دو خط قائم می‌آید، **دترمینان** نام دارد (به‌طورکلی، n سطر هر یک شامل n عدد وجود دارند). تعداد سطرها یا ستونهای یک دترمینان **مرتبهٔ** آن نام دارد، و دترمینان مرتبهٔ n دترمینان $n \times n$ (یا n در n)

نیز نامیده می‌شود . لذا ، علامت اول در (۷) یک دترمینان 2×2 است ، و علامت دوم یک دترمینان 3×3 می‌باشد . هر یک از این علایم صورت بسیار فشردهٔ نوشتن عدد خاصی است . به طور مشخص، اولین علامت (۷) نشانگر عدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{۸}$$

است ، و دومین علامت معرف عدد

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{۹}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

می‌باشد . توجه کنید که در فرمول (۹) دترمینان 2×2 که از راست در a_i $(i = 1, 2\ ,\ 3)$ ضرب شده از دترمینان 3×3 سمت چپ با حذف هر دو سطر و ستون شامل a_i بـه دست می‌آید ، و این امر در نمودارهای زیر مجسم شده است :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

اینکه a_2 در طرف راست (۹) با علامت منها ظاهر شده غلط چاپی نبوده ، بلکه‌قسمت‌ذاتی تعریف یک دترمینان 3×3 می‌باشد .

مثال ۴ . بنابر فرمول (۸) ،

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-1) = 20 + 3 = 23.$$

مثال ۵ . بنابر فرمول (۹) ،

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2[7(9) + 2(5)] - 3[4(9) + 2(1)] + 8[4(5) - 7(1)]$$
$$= 2(73) - 3(38) + 8(13) = 136.$$

شکل مؤلفه‌ای حاصل‌ضرب خارجی . حال برای حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ فرمولی‌برحسب

مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نسبت به بردارهای پایهٔ یکهٔ $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ به دست آورده ،وسپس نشان می‌دهیم که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را می‌توان به صورت دترمینان نوشت .

قضیهٔ ۳ (شکل مؤلفه‌ای حاصل‌ضرب خارجی) . هرگاه

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}.$$

آنگاه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{j} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{k}. \tag{۱۰}$$

برهان . به کمک قضیهٔ ۲ و فرمولهای (۴) برای حاصل ضربهای خارجی بردارهای $\mathbf{i}$ ،و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ ، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \times (\beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}) \\
&= \alpha_1\beta_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + \alpha_1\beta_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + \alpha_1\beta_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + \alpha_2\beta_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + \alpha_2\beta_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \alpha_2\beta_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\
&\quad + \alpha_3\beta_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \alpha_3\beta_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + \alpha_3\beta_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\
&= \alpha_1\beta_1\mathbf{0} + \alpha_1\beta_2\mathbf{k} + \alpha_1\beta_3(-\mathbf{j}) + \alpha_2\beta_1(-\mathbf{k}) + \alpha_2\beta_2\mathbf{0} \\
&\quad + \alpha_2\beta_3\mathbf{i} + \alpha_3\beta_1\mathbf{j} + \alpha_3\beta_2(-\mathbf{i}) + \alpha_3\beta_3\mathbf{0} \\
&= \alpha_1\beta_2\mathbf{k} - \alpha_1\beta_3\mathbf{j} - \alpha_2\beta_1\mathbf{k} + \alpha_2\beta_3\mathbf{i} + \alpha_3\beta_1\mathbf{j} - \alpha_3\beta_2\mathbf{i},
\end{aligned}$$

که با (۱۰) معادل است .

باتوجه به فرمول (۱۰) معلوم می‌شود که می‌توان آن را برحسب دترمینانهای 2×2 به صورت زیر نوشت :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \tag{۱۰'}$$

از مقایسهٔ مجموع سمت راست با مجموع مشابه در فرمول (۹) ، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{۱۱}$$

این دترمینان 3×3 " علامتی " است بدین معنی که سطر اولش به جای عـدد از بردار تشکیل شده است ، ولی آن را با این علم نوشته‌ایم که روش بسیار فشرده‌ای برای نمایش مجموع آمده در (۱۰َ) می‌باشد .

مثال ۶. حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ را بیابید.

حل. بنابر فرمول (۱۱)،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (3-1)\mathbf{i} - (1+2)\mathbf{j} + (-1-6)\mathbf{k}$$

$$= 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

مثال ۷. مساحت مثلث PQR به رأسهای $P = (1, 2, 0)$، $Q = (3, 0, -3)$، و $R = (5, 2, 6)$ را بیابید.

حل. مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ مساوی است با $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$، و این دوبرابر مساحت A است. چون

$$\overrightarrow{PQ} = OQ - \overrightarrow{OP} = (3, 0, -3) - (1, 2, 0) = (2, -2, -3)$$

$$PR = OR - \overrightarrow{OP} = (5, 2, 6) - (1, 2, 0) = (4, 0, 6)$$

(که در آن O مبداء است)، داریم

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (-12+0)\mathbf{i} - (12+12)\mathbf{j} + (0+8)\mathbf{k} = -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

بنابراین،

$$2A = |-12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}| = |(-2)(6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k})|,$$

درنتیجه،

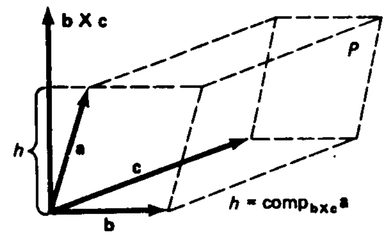
$$A = |6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k}| = \sqrt{36 + 144 + 16} = \sqrt{196} = 14$$

حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر. در بین حاصل‌ضربهای مختلف شامل سه یا چند بردار، مهمترین آنها *حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ است‌که حاصل‌ضرب‌اسکالر یا نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ می‌باشد. برای‌تعبیرهندسی‌عدد $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$، آن را بافرض $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

به شکل زیر می‌نویسیم :

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\,\frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|} = |\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\,\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a}. \qquad (۱۲)$$

در اینجا $\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a}$ مولفهٔ $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ است . قدرمطلق این موٴلفه ارتفاع h متوازی السطوح P پیموده شده‌به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ مثل شکل ۲۰ است که در آن



شکل ۲۰

$\mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a} > 0$ فرض کنیم V حجم P باشد . چون $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ مساحت پایهٔ P است ، از (۱۲) نتیجه‌می‌شودکه

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{cases} V & \text{، اگر } \mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a} > 0 \\ -V & \text{، اگر } \mathrm{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,\mathbf{a} < 0 \end{cases}$$

درنتیجه ، در هر حال ،

$$V = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|. \qquad (۱۳)$$

موٴلفهٔ $\mathbf{a}$ در امتداد $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ صفر است اگر و فقط اگر $\mathbf{a}$ در صفحهٔ $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ قرار داشته باشد . بنابراین ،طبق (۱۲) ، سه‌بردار ناصفر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ *همصفحه‌اند اگروفقط اگر* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$. (چرا این حتی اگر $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{0}$ مجاز باشد نیز درست است ؟)

برای بیان حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ برحسب مولفه‌های $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ ، قرار می‌دهیم

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} \qquad \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{i} + \gamma_2\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}.$$

در این صورت ، طبق فرمول (۱۱) ،

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

درنتیجه ،

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\alpha_1\mathbf{i}+\alpha_2\mathbf{j}+\alpha_3\mathbf{k})\cdot\left(\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$
$$= \alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix} - \alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix} + \alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix},$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (۱۴)$$

مثال ۸. آیا بردارهای $\mathbf{a}=(2,3,-1)$ ، $\mathbf{b}=(1,-1,3)$ ، و $\mathbf{c}=(1,9,-11)$ همصفحه‌اند؟

حل. بلی، زیرا طبق (۱۴) داریم

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 9 & -11\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -11\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 9\end{vmatrix}$$
$$= 2(11-27) - 3(-11-3) - (9+1) = -32+42-10 = 0.$$

مثال ۹. حجم V متوازی‌السطوح پیموده شده به وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k}+\mathbf{i}$ را بیابید.

حل. در اینجا

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1-(-1) = 2,$$

و درنتیجه، طبق (۱۳)، $V=2$.

مثال ۱۰. نشان دهید که به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ، $\mathbf{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ ، و $\mathbf{c}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ ،

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \qquad (۱۵)$$

حل. از (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\left(\begin{vmatrix}\alpha_2&\alpha_3\\\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_3\\\beta_1&\beta_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\right)\cdot(\gamma_1\mathbf{i}+\gamma_2\mathbf{j}+\gamma_3\mathbf{k})$$
$$=\gamma_1\begin{vmatrix}\alpha_2&\alpha_3\\\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}-\gamma_2\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_3\\\beta_1&\beta_3\end{vmatrix}+\gamma_3\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2\\\beta_1&\beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\\\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}.$$

اگر این دترمینان و دترمینان (۱۴) را حساب کنید، درمی‌یابید که هر دو یک مقدار دارند، و بدین ترتیب فرمول (۱۵) ثابت می‌شود. جزئیات جبری را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

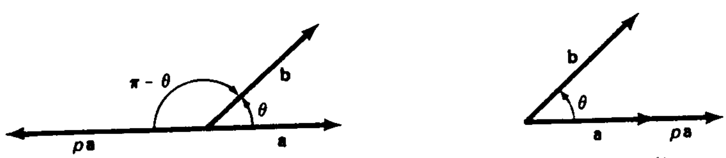
در واقع، ابهامی در نوشتن $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ و $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ به صورت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ و $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ وجود ندارد، زیرا عبارات $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ و $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ هر دو بی‌معنی‌اند (چرا؟). لذا، فرمول (۱۵) به ما می‌گوید که در عبارت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ می‌توان علایم نقطه و ضرب را بدون تغییر در مقدار باهم ضرب کرد.

برهان قضیهٔ ۲ *(اختیاری)*. از تعبیر هندسی حاصل‌ضرب خارجی فوراً معلوم می‌شود که به ازای $p\neq 0$،

$$(p\mathbf{a})\times\mathbf{b}=p(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \qquad (۱۶)$$

همانطور که شکل ۲۱ نشان داده، حالات $p>0$ و $p<0$ باید از هم متمایز شوند، ولی این مشکل نیست زیرا $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$. از تلفیق (۱۶) با فرمول همتای

$$\mathbf{a}\times(q\mathbf{b})=q(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \qquad (۱۶')$$



حالت $p<0$ حالت $p>0$

شکل ۲۱

به ازای $q\neq 0$ فوراً معلوم می‌شود که

$$(p\mathbf{a})\times(q\mathbf{b})=p[\mathbf{a}\times(q\mathbf{b})]=p[q(\mathbf{a}\times\mathbf{b})],$$

درنتیجه،

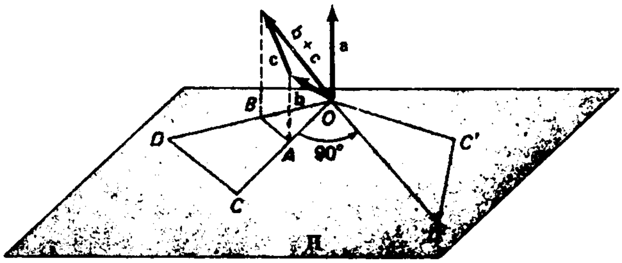
$$(p\mathbf{a})\times(q\mathbf{b})=pq(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),$$

و این فرمول درصورت صفر بودن هر دو اسکالر p و q نیز برقرار می‌ماند.

برای اثبات قوانین پخشپذیری

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \tag{۱۷}$$

فرض‌کنیم بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ،و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ دارای نقطهٔ شروع مشترک O بوده ، و Π صفحهٔ مار بر O عمود بر $\mathbf{a}$ مثل شکل ۲۲ باشد . عمودهای مرسوم از نقاط پایان $\mathbf{b}$ و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ بر Π این صفحه را در نقاط A و B قطع می‌کنند . با بزرگ‌کردن مثلث OAB به وسیلهٔ عامل $|\mathbf{a}|$ ،مثلث OCD به دست می‌آید ("بزرگ‌سازی درصورت $|\mathbf{a}| < 1$ عملا" کوچک‌سازی است ،واگر $|\mathbf{a}| = 1$ ، OCD بر OAB منطبق می‌شود) . سپس OCD را به اندازهٔ $90°$ حول O در صفحهٔ Π می‌چرخانیم،



شکل ۲۲

این دوران OCD را به مثلث همنهشت $OC'D'$ می‌برد ، و از دو جهت دوران ممکن جهتی را اختیار می‌کنیم که بردارهای $\overrightarrow{OC}$ ، $\overrightarrow{OC'}$ ، و $\mathbf{a}$ یک دستگاه راست‌دست تشکیل می‌دهند . از شکل واضح است که

$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'D'}. \tag{۱۸}$$

اما

$$\overrightarrow{OC'} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{OD'} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \overrightarrow{C'D'} = \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

و با گذاردن این عبارات در (۱۸) فرمول اول (۱۷) به‌دست می‌آید . برای به‌دست‌آوردن فرمول دوم ، از فرمول اول و پاد مشتقپذیری حاصلضرب خارجی استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= -[\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] = -[(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{b})] \\ &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).\end{aligned}$$

مسائل

حاصلضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را بیابید .

۱. $\mathbf{a} = 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{j}$

۲. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۳. $\mathbf{a} = (0, 2, 1),\ \mathbf{b} = (1, 0, 2)$

۴. $\mathbf{a} = (10, 0, 5),\ \mathbf{b} = (0, -2, 6)$

۵. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۶. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۷. $\mathbf{a} = (1, 3, 4),\ \mathbf{b} = (2, 6, -3)$

۸. $\mathbf{a} = (9, -7, 1),\ \mathbf{b} = (8, 5, -2)$

مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای داده شده را بیابید.

۹. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۰. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k},\ \mathbf{b} = -6\mathbf{k}$

مساحت مثلث با رئوس داده شده را بیابید.

۱۱. $P = (3, 4, 7),\ Q = (0, 6, 1),\ R = (5, -2, 4)$

۱۲. $P = (-1, 4, 5),\ Q = (1, 3, 7),\ R = (2, 5, 6)$

۱۳. با استفاده از حاصل‌ضرب خارجی، نشان دهید که مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ اقطار متوازی‌الاضلاع P دوبرابر مساحت خود P است.

۱۴. نشان دهید که به ازای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دلخواه، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$.

بردار یکه‌ای بیابید که بر هر دو بردار داده شده عمود باشد.

۱۵. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۶. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

۱۷. $\mathbf{a} = (2, 0, -1),\ \mathbf{b} = (-2, 1, 0)$

۱۸. $\mathbf{a} = (3, 1, 2),\ \mathbf{b} = (-1, 3, -1)$

۱۹. آیا $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$، که در آن $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$، تساوی $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ را ایجاب می‌کند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

۲۰. نشان دهید که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

دترمینان داده شده را حساب کنید.

۲۱. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

۲۲. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

۲۳. $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x \end{vmatrix}$

۲۴. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

۲۵. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

۲۶. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

۲۷. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ ✓ ۲۸. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ ✓ ۲۹. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ ✓

۳۰. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 11 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ ✓ ۳۱. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$ ✓ ۳۲. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$ ✓

۳۳. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ ✓

۳۴. نشان دهید که $|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ بردارهای داده شده را بیابید.

۳۵. $\mathbf{a} = (1, -1, 3), \mathbf{b} = (-2, 2, 1), \mathbf{c} = (3, -2, 5)$ ✓

۳۶. $\mathbf{a} = (1, 2, 5), \mathbf{b} = (1, -1, 3), \mathbf{c} = (3, -6, -1)$ ✓

۳۷. $\mathbf{a} = (-4, 2, 1), \mathbf{b} = (-5, 1, 2), \mathbf{c} = (-1, -1, 1)$ ✓

۳۸. $\mathbf{a} = (2, -1, 6), \mathbf{b} = (3, -5, 1), \mathbf{c} = (4, -7, 1)$ ✓

۳۹. نشان دهید که $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{a}) = 0$. بااستفاده ازاین‌نشان‌دهید یک دترمینان 3×3 درصورتی صفر است که دو سطرش یکسان باشند.

۴۰. با استفاده از این امر که تعویض دو سطر یک دترمینان علامتش را تغییرمی‌دهد، ثابت کنید که $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

آیا بردارهای داده شده همصفحه‌اند؟ جوابتان را توضیح دهید.

۴۱. $\mathbf{a} = (-1, 2, 2), \mathbf{b} = (2, -3, 1), \mathbf{c} = (-4, 7, 3)$ ✓

۴۲. $\mathbf{a} = (3, -2, 1), \mathbf{b} = (2, 1, 2), \mathbf{c} = (3, -1, -4)$ ✓

۴۳. نشان‌دهیدکه‌چهارنقطهٔ $A = (1, 2, -1)$ ، $B = (0, 1, 5)$ ، $C = (-1, 2, 1)$ و $D = (2, 1, 3)$ همصفحه‌اند.

حجم متوازی‌السطوح پیموده شده به‌وسیلهٔ بردارهای داده شده را بیابید.

۴۴. $\mathbf{a} = \mathbf{i}\times\mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j}\times\mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{k}\times\mathbf{i}$

۴۵. $\mathbf{a} = (1, 3, -1), \mathbf{b} = (-2, 1, 2), \mathbf{c} = (3, 5, -2)$ ✓

۴۶. $\mathbf{a} = (-4, 5, 0), \mathbf{b} = (6, 2, 5), \mathbf{c} = (2, 1, 7)$ ✓

۴۷. ✓ حجم چهار وجهی به رئوس $A = (-1, 2, 1)$ ، $B = (5, 5, 4)$ ، $C = (2, 3, -1)$ و $D = (1, 4, 3)$ را بیابید.

۴۸ . حاصل‌ضرب سه‌گانه به شکل $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ **حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ برداری** نام دارد. توجه کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ برخلاف $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ که اسکالر است بردار می‌باشد. با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. وقتی به شکل

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

نوشته شود، " قاعدهٔ بک ـ کب" نام دارد و فرمول مفیدی است که ارزش حفظ کردن دارد.

حاصل‌ضربهای سه‌گانهٔ برداری $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ و $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ را به ازای بردارهای داده‌شده حساب کنید.

۴۹ . $\mathbf{a} = (2, 1, 3), \mathbf{b} = (1, -2, 2), \mathbf{c} = (1, 1, 1)$ ✓

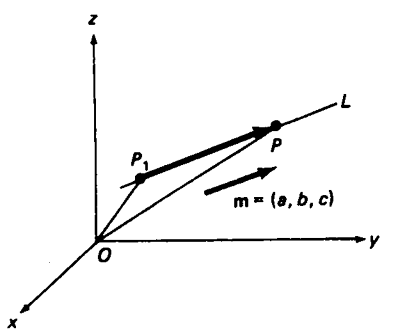
۵۰ . $\mathbf{a} = (4, 0, 5), \mathbf{b} = (0, -1, 6), \mathbf{c} = (1, 2, 0)$ ✓

۵۱ . $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

۵۲ . ذره‌ای با بار q با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ تحت اثر نیروی $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ قرار دارد. فرض کنید، همانند در سیکلوترون، میدان مغناطیسی ثابت و بر صفحهٔ حرکت ذره عمود باشد. نشان‌دهید ذره یک مسیر مستدیر به شعاع mv/qB طی می‌کند، که‌در آن $v = |\mathbf{v}|$ ، $B = |\mathbf{B}|$ ، و m جرم ذره است. نشان دهید این مسیر با تندی زاویه‌ای qB/m ، به نام **فرکانس سیکلوترون**، توصیف می‌شود.

۴.۱۲ خطوط و صفحات در فضا

معادلات پارامتری خطوط . خط L در فضا به‌وسیلهٔ نقطهٔ ثابت $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ بر L و بردار ناصفر $\mathbf{m} = (a, b, c)$ موازی L منحصراً معین می‌شود. در این صورت، همانطور که شکل ۲۳ نشان داده، نقطهٔ P بر L واقع است اگر وفقط اگر بردارهای $\overrightarrow{P_1P}$ و $\mathbf{m} = (a, b, c)$



شکل ۲۳

موازی باشند، یا معادلاً

$$\overrightarrow{P_1P} = t\mathbf{m} = t(a, b, c),$$

که در آن t اسکالر دلخواهی است. اما

$$\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

که در آن O مبداء است؛ و لذا، P بر L واقع است اگر و فقط اگر

$$x - x_1 = at, \qquad y - y_1 = bt, \qquad z - z_1 = ct, \tag{۱}$$

یا

$$x = x_1 + at, \qquad y = y_1 + bt, \qquad z = z_1 + ct. \tag{۲}$$

وقتی t از $\infty-$ تا ∞ افزایش یابد، نقطه به مختصات (۲) L را می‌پیماید. لذا، معادلات (۲) *معادلات پارامتری* L با پارامتر t می‌باشند.

معادلات تقارنی خطوط. اعداد a ، b ، و c *پارامترهای هادی* خط L نام دارند. اگر همه مخالف صفر باشند، می‌توان t را از معادلات (۱) حذف کرد. با این کار *معادلات تقارنی*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{۳}$$

برای یک خط در فضا به دست می‌آید. می‌توان از این معادلات حتی وقتی یکی (یا چندتا) از پارامترهای هادی صفرند استفاده کرد، و در این حالت این فرض می‌شود که صورت نظیر نیز صفر است. مثلاً، اگر $c = 0$ ، سومین معادلهٔ (۲) به ما می‌گوید که $z = z_1$ و معادلات تقارنی به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}, \qquad z = z_1.$$

توجه کنید هرگاه a ، b ، و c پارامترهای هادی L باشند، آنگاه pa ، pb ، و pc نیز چنین اند، که p ثابت ناصفری است، زیرا بردار $p\mathbf{m}$ موازی L نیز می‌باشد. بخصوص، کسینوسهای هادی بردار $\mathbf{m} = (a, b, c)$ پارامترهای هادی خط L می‌باشند.

مثال ۱. معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر نقطهٔ $P_1 = (3, -1, 2)$ موازی بردار $\mathbf{m} = (-2, 4, 5)$ را بنویسید.

حل. در اینجا $x_1 = 3, y_1 = -1, z_1 = 2$ و $a = -2, b = 4, c = 5$؛ و در نتیجه، معادلات پارامتری (۲) خواهند شد

$$x = 3 - 2t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 2 + 5t \qquad (-\infty < t < \infty),$$

و معادلات تقارنی (۳) به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}.$$

برای یافتن خط L مار بر دو نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$، بردار $\mathbf{m} = (a, b, c)$ موازی L را بردار

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

واقع بر L می‌گیریم. در این صورت، طبق (۲) و (۳)، L به معادلات پارامتری

(۴) $$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t,$$

که در آنها $-\infty < t < \infty$، و معادلات تقارنی

(۴′) $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

می‌باشد.

مثال ۲. معادلات پارامتری و تقارنی خط L مار بر نقاط $P_1 = (3, 2, -1)$ و $P_2 = (4, -1, 1)$ را بنویسید. نقطهٔ اشتراک L با صفحهٔ yz را بیابید.

حل. چون $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -3, 2)$، از (۴) و (۴′) نتیجه می‌شود که L به‌معادلات‌پارامتری

(۵) $$x = 3 + t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -1 + 2t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

و معادلات تقارنی

(۵′) $$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2}$$

است. نقطهٔ اشتراک L با صفحهٔ yz نقطه‌ای است به شکل $(0, y, z)$ که مختصاتش در (۵′) صدق می‌کنند. با گذاردن $x = 0$ در (۵′)، به دست می‌آوریم

$$\frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2} = -3,$$

درنتیجه، $y = 11, z = -7$. لذا، خط L صفحهٔ yz را در نقطهٔ $(0, 11, -7)$ قطع می‌کند.

قضیهٔ زیر توان روشهای برداری را در هندسهٔ تحلیلی نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۴ (فاصلهٔ بین یک نقطه و یک خط در فضا). خط L در فضا و نقطهٔ p غیرواقع بر

L داده شده است . فرض کنیم $\mathbf{m}$ برداری موازی L بوده و Q نقطه‌ای از آن باشد . در این صورت ، فاصلهٔ d بین P و L از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$d = \frac{|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{m}|}. \tag{۶}$$

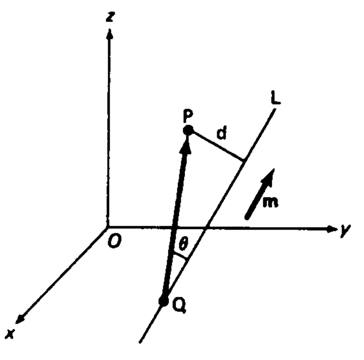
برهان . فرض کنیم θ زاویهٔ بین $\mathbf{m}$ و $\overrightarrow{QP}$ باشد (ر . ک . شکل ۲۴) . دراین‌صورت ، $0 \le \theta \le \pi$ و (۶) از مقایسه با فرمولهای

$$d = |\overrightarrow{QP}| \sin \theta$$

و

$$|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}| = |\mathbf{m}|\, |\overrightarrow{QP}| \sin \theta.$$

فورا " به دست می‌آید .



شکل ۲۴

مثال ۳ . فاصلهٔ بین نقطهٔ $P = (4, 2, -2)$ و خط L به معادلات پارامتری

$$x = 3 - 2t, \quad y = 6t, \quad y = -1 + 9t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

را بیابید .

حل . با گذاردن $t = 0$ در این معادلات ، معلوم می‌شود که $Q = (3, 0, -1)$ نقطه‌ای بر L است . چون $\mathbf{m} = (-2, 6, 9)$ و $\overrightarrow{QP} = (1, 2, -1)$ ، داریم

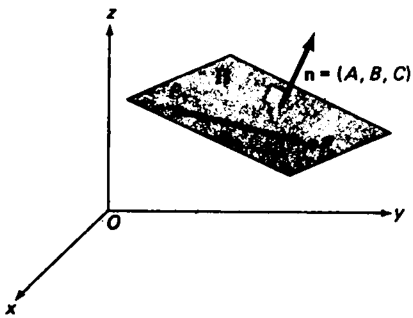
$$\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= -24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

لذا، طبق (۶)،

$$d = \frac{|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{|-24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}|}{|-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{(-24)^2 + 7^2 + (-10)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 9^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{725}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11}\sqrt{29} \approx 2.45.$$

صفحات و معادلات آنها. حال صفحات در فضا را درنظر می‌گیریم. درست مثل خط L که با نقطهٔ P_1 بر آن و بردار $\mathbf{m}$ موازی آن معین شد، صفحهٔ Π با نقطهٔ P_1 در Π وبردارناصفر $\mathbf{n} = (A, B, C)$ عمود بر Π مشخص می‌شود. بردار $\mathbf{n}$ را قائم به صفحهٔ Π می‌نامیم. فرض کنیم $P = (x, y, z)$ نقطهٔ متغیری در فضا باشد. از شکل ۲۵ معلوم می‌شود که P در Π است



شکل ۲۵

اگر و فقط اگر بردارهای $\mathbf{n} = (A, B, C)$ و $\overrightarrow{P_1P}$ برهم عمود باشند، یا معادلاً

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0.$$

اما $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$؛ و لذا، P در Π است اگر و فقط اگر

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (۷)$$

پس از (۷) نتیجه می‌شود که

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (۸)$$

که در آن

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1. \qquad (۸')$$

به عکس، نمودار هر معادله به‌شکل (۸)، که در آن A، B، و C همه صفر نیستند، صفحه‌ای با قائم $\mathbf{n} = (A, B, C)$ است. در واقع، فرض کنیم x_1، y_1، و z_1 سه عدد صادق در شرط

(۸′) باشند . (چرا یافتن این سه عدد همیشه مقدور است؟) با جانشانی (۸′) در (۸) معادله‌ای معادل (۷) به دست می‌آید ، که معادلهٔ صفحهٔ مار بر نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ عمود بر بردار $\mathbf{n} = (A, B, C)$ است . توجه کنید که نمودار (۸) صفحه‌ای مار بر مبداءاست اگر $D = 0$ ، صفحه‌ای موازی محور z است اگر $C = 0$ ، و صفحه‌ای عمود بر محور z است اگر $A = B = 0$. بر خواننده است حالات دیگری که در آنها بعضی از اعداد A ، B ، C، و D صفرند امتحان شوند .

مثال ۴ . معادلهٔ صفحهٔ مار بر نقطهٔ $P_1 = (-2, 1, 3)$ عمود بر بردار $\mathbf{n} = (4, 5, -1)$ را بیابید .

حل . در اینجا $x_1 = -2, y_1 = 1, z_1 = 3$ و $A = 4, B = 5, C = -1$ ؛ درنتیجه ، معادلهٔ (۷) به صورت

$$4(x + 2) + 5(y - 1) - (z - 3) = 0,$$

یا معادلاً

$$4x + 5y - z + 6 = 0$$

درمی‌آید .

مثال ۵ . فصل مشترک L دو صفحهٔ

$$x + 2y - z + 3 = 0 \text{ و } 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \qquad (۹)$$

را بیابید .

حل . صفحهٔ اول دارای قائم $\mathbf{n}_1 = (2, -3, 4)$ و صفحهٔ دوم دارای قائم $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -1)$ است . چون خط L در هر دو صفحه است ، باید بر هر دوی $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ عمود باشد . لعذا ، L موازی بردار

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

می‌باشد . برای یافتن نقطه‌ای بر L ، در هر دو معادلهٔ (۹) قرار می‌دهیم $z = 0$ ودستگاه حاصل از معادلات $x + 2y + 3 = 0, 2x - 3y - 1 = 0$ را نسبت به x و y حل می‌کنیم تا

به دست آید $x = -1,\ y = -1$.

لذا، نقطهٔ $(-1, -1, 0)$ بر L قرار دارد، و L به معادلات تقارنی زیر است:

$$\frac{x+1}{-5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{7}.$$

برای تعیین یک خط فقط دو نقطه لازم است، ولی برای تعیین صفحه سه نقطه می‌خواهیم.

مثال ۶. برای صفحهٔ Π مار بر نقاط $P_1 = (2, -1, 3)$ ، $P_2 = (1, 2, 2)$ ، و $P_3 = (-2, 1, 1)$ معادله بنویسید.

حل. چون نقاط P_1 ، P_2 ، و P_3 در Π واقعند، بردارهای $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 3, -1)$ و $\overrightarrow{P_1P_3} = (-4, -2, -2)$ نیز چنین‌اند. لذا، بردار

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k},$$

که بر هردوی $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ عمود است، قائم به Π می‌باشد. چون Π صفحهٔ ماربر $P_1 = (2, -1, 3)$ با قائم $\mathbf{n} = (-4, 6, 10)$ است، به کمک (۷) معلوم می‌شود که Π معادله‌ای به شکل

$$-4(x-2) + 6(y+1) + 10(z-3) = 0,$$

یا معادلاً

$$2x - 3y - 5z + 8 = 0$$

دارد.

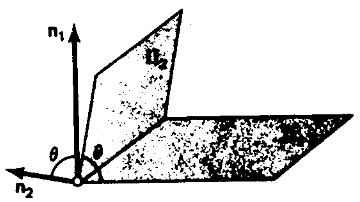
مثال ۷. زاویهٔ بین صفحات $6x + 6y - 3z + 5 = 0$ و $x - 2y + 2z - 4 = 0$ را بیابید.

حل. زاویهٔ بین دو صفحهٔ Π_1 و Π_2 مساوی زاویهٔ θ بین قائمهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ تعریف می‌شود اگر $0 \le \theta \le \pi/2$ (ر.ک. شکل ۲۶)، یا مساوی $\pi - \theta$ تعریف می‌شود اگر $\pi/2 < \theta \le \pi$ (بدین ترتیب، زاویهٔ بین دو صفحه همیشه کوچکترین مقدار از دو انتخاب ممکن‌است). دراینجا $\mathbf{n}_1 = (6, 6, -3)$ و $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 2)$ ؛ درنتیجه،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{6(1) + 6(-2) - 3(2)}{\sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$
$$= \frac{-12}{\sqrt{81}\sqrt{9}} = \frac{-12}{9(3)} = -\frac{4}{9}.$$

چون $\cos\theta$ منفی است ، θ منفرجه بوده و زاویهٔ بین صفحات داده شده مساوی است با

$$\pi - \theta = \pi - \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) = \arccos\frac{4}{9} \approx 63.6°.$$



زاویهٔ بین صفحات Π_1 و Π_2 مساوی θ است .

شکل ۲۶

قضیهٔ بعدی شبیه قضیهٔ ۱۰ ، صفحهٔ ۵۵، برای صفحات است .

قضیهٔ ۵ (فاصلهٔ بین یک نقطه و یک صفحه) . فاصلهٔ d بین نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و صفحهٔ Π به معادلهٔ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

مساوی است با

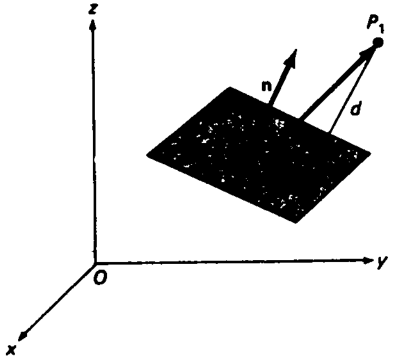
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (۱۰)$$

برهان . بردار $\mathbf{n} = (A, B, C)$ قائم به صفحهٔ Π است . فرض کنیم $Q = (a, b, c)$ ، مثل شکل ۲۷ ، نقطه‌ای در Π باشد . در این صورت ،

$$d = |\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP}_1|,$$

که در آن

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP}_1 = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP}_1}{|\mathbf{n}|}$$



شکل ۲۷

مؤلفهٔ $\overrightarrow{QP_1} = (x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c)$ در امتداد $\mathbf{n}$ است . بنابراین ،

$$d = \frac{|A(x_1 - a) + B(y_1 - b) + C(z_1 - c)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (۱۱)$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Aa + Bb + Cc)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

اما $Aa + Bb + Cc + D = 0$ ، زیرا $Q = (a, b, c)$ در Π واقع است ؛ درنتیجه ،

$$D = -(Aa + Bb + Cc)$$

با گذاردن این عبارت برای D در (۱۱) ، فورا" (۱۰) به دست می‌آید .

مثال ۸. فاصلهٔ بین نقطهٔ $(2, 6, -1)$ و صفحهٔ $3x - 4y + 12z - 22 = 0$ را بیابید .

حل . به کمک فرمول (۱۰) ، معلوم می‌شود که

$$d = \frac{|3(2) - 4(6) + 12(-1) - 22|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{|-52|}{\sqrt{169}} = \frac{52}{13} = 4.$$

از دیدگاه هندسه واضح‌است‌که دوصفحه‌موازیند اگر و فقط اگر قائمهایشان بردارهایی موازی باشند . زاویهٔ بین صفحات موازی صفر است (چرا؟) .

مثال ۹ . تحقیق کنید که صفحات $3x + 6y - 12z + 7 = 0$ و $x + 2y - 4z - 1 = 0$ موازیند ، و فاصلهٔ d بین آنها را بیابید .

حل. دو صفحه، که با Π_1 و Π_2 نموده می‌شوند، دارای قائمهای $\mathbf{n}_1 = (3, 6, -12)$ و $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -4)$ اند. چون $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{n}_1$، بردارهای $\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ موازیند؛ و درنتیجه، صفحات Π_1 و Π_2 نیز چنین می‌باشند. واضح است که d مساوی فاصلهٔ بین Π_1 و هر نقطه از Π_2، یا بین Π_2 و هر نقطه از Π_1، می‌باشد. نقطهٔ $(1, 0, 0)$ در Π_2 قرار دارد؛ و لذا،

$$d = \frac{|3(1) + 6(0) - 12(0) + 7|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-12)^2}} = \frac{|3 + 7|}{3\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{3\sqrt{21}} \approx 0.73.$$

مسائل

معادلات پارامتری خط مار بر نقطهٔ $(1, -2, 4)$ موازی

۱. بردار $\mathbf{m} = (2, 3, -1)$

۲. بردار $\mathbf{m} = (5, 1, 0)$

۳. خط $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{z+1}{-3}$

۴. خط $x = -1 + 3t,\ y = 3 - 2t,\ z = 2 + 5t$

را بنویسید.

معادلات تقارنی خط مار بر نقطهٔ $(-3, 2, 0)$ موازی

۵. بردار $\mathbf{m} = (9, -4, 3)$

۶. بردار $\mathbf{m} = (-1, 1, -1)$

۷. خط $x = 6t,\ y = 4,\ z = 10 - 5t$

۸. خط $\dfrac{x-6}{-2} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+7}{8}$

را بنویسید.

معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر جفت نقاط داده شده را بنویسید.

۹. $(1, -2, 2), (3, 1, -1)$ ۱۰. $(0, 0, 1), (0, 2, -2)$

۱۱. $(4, 1, 4), (-1, 5, 3)$ ۱۲. $(3, -6, 5), (10, 4, 8)$

فاصلهٔ بین نقطهٔ P و خط داده شده را بیابید.

۱۳. $P = (1, 3, 2),\ x = 3 - 2t,\ y = 1 + 2t,\ z = -2 + t$

۱۴. $P = (4, -1, 2),\ x = 2 + 3t,\ y = -3 - 4t,\ z = 1 + 12t$

۱۵. $P = (0, 1, 0),\ \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{4}$

۱۶. $P = (-6, 5, -7),\ \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z+8}{6}$

معادلهٔ صفحهٔ مار بر

۱۷. مبداء با قائم $\mathbf{n} = (4, 5, -3)$

۱۸. نقطهٔ $(2, 1, -1)$ با قائم $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$

۱۹. نقطهٔ $(3, -1, 5)$ عمود بر خط مار بر این نقطه و نقطهٔ $(6, -7, 9)$

۲۰. نقطهٔ $(3, 4, -5)$ موازی هر دو بردار $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ و $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$

۲۱. نقاط $(2, -1, 3)$ و $(3, 1, 2)$ موازی بردار $\mathbf{a} = (3, -1, -4)$

۲۲. نقاط $(3, -1, 2)$ ، $(4, -1, -1)$ ، و $(2, 0, 2)$

۲۳. نقاط $(1, -1, -2)$ و $(3, 1, 1)$ عمود بر صفحهٔ $x - 2y - 3z - 5 = 0$

۲۴. نقطهٔ $(2, -1, 1)$ عمود بر هر دو صفحهٔ $y = 0$ و $2x - z + 1 = 0$

را بیابید.

۲۵. نقطهٔ برخورد خط

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

با صفحهٔ $2x + 3y + z - 11 = 0$ را بیابید.

۲۶. فرض کنید L خط مار بر نقاط $(6, -6, 5)$ و $(-12, 6, -1)$ باشد.
نقاط برخورد L با صفحات مختصات را بیابید.

فصل مشترک جفت صفحات داده شده را بیابید.

۲۷. $x - 2y + 3z - 6 = 0, 3x + 2y - 5z - 10 = 0$

۲۸. $4x + y + z = 0, 2x + 3y - 2z + 5 = 0$

۲۹. $x - 2y + 3z + 2 = 0, 2x + y - 4z - 16 = 0$

۳۰. نشان دهید که خط

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{1}$$

و فصل مشترک صفحات $x + y - z + 3 = 0$ و $x - y - 5z = 0$ موازیند.

زاویهٔ بین جفت صفحات داده شده را بیابید.

۳۱. $6x + 3y - 2z = 0, x + 2y + 2z = 0$

۳۲. $x - \sqrt{2}y + z + 4 = 0, x + \sqrt{2}y - z - 6 = 0$

۳۳. $3y - z + 1 = 0, 2x + z - 2 = 0$

۳۴. $9x - 2y + 6z + 5 = 0, 4x + 2y - 4z + 1 = 0$

فاصلهٔ بین نقطهٔ p و صفحهٔ داده شده را بیابید.

۳۵. $P=(4,\ -1,\ 1),\ 16x-12y+15z+9=0$

۳۶. $P=(1,\ 6,\ -3),\ 6x-2y-9z+12=0$

۳۷. $P=(8,\ 3,\ -2),\ 12y-5z-27=0$

فاصلهٔ بین جفت صفحات موازی داده شده را بیابید.

۳۸. $x-2y+2z+12=0,\ x-2y+2z-6=0$

۳۹. $6x+18y-9z-21=0,\ 4x+12y-6z+7=0$

۴۰. $15x-16y+12z+5=0,\ 30x-32y+24z-5=0$

۴۱. به ازای چه مقداری از c صفحهٔ $x+y+z=c$ بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=12$ در یکهشتم اول مماس است؟ نقطهٔ تماس را بیابید.

۴۲. گوییم دو خط در فضا *متنافر* اند اگر نه موازی و نه متقاطع باشند. نشان دهید که خطوط L_1 و L_2 به معادلات تقارنی

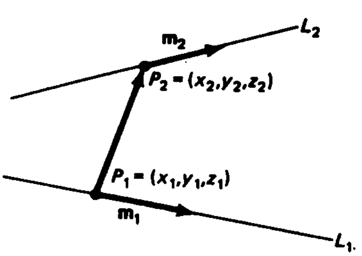
$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},\qquad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2} \qquad \text{(یک)}$$

متنافرند اگر و فقط اگر دترمینان

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ناصفر باشد.

راهنمایی. با فرض $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ ، $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ ، $\mathbf{m}_1=(a_1,b_1,c_1)$ ، و $\mathbf{m}_2=(a_2,b_2,c_2)$ ، ملاحظه‌کنید که L_1 و L_2 موازی یا متقاطع اند اگر وفقط اگر بردارهای $\overrightarrow{P_1P_2}$ ، $\mathbf{m}_1$ ، و $\mathbf{m}_2$ همصفحه باشند (که در شکل ۲۸ چنین‌اند).



شکل ۲۸

۴۳. نشان دهید هرگاه خطوط (یک) متنافر باشند، آنگاه (کوتاهترین) فاصلهٔ بین‌آنها

مساوی است با

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}, \qquad \text{(دو)}$$

که در آن P_1 ، P_2 ، $\mathbf{m}_1$ ، و $\mathbf{m}_2$ همان معانی داشته در مسئلهٔ قبل را دارند.

۴۴. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}, \qquad \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{5}$$

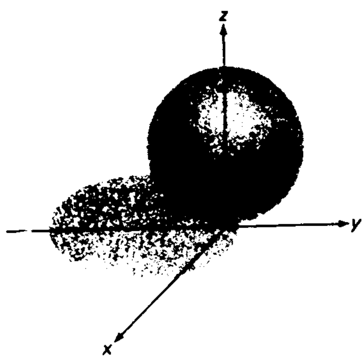
متنافرند. با استفاده از فرمول (دو)، فاصلهٔ بین آنها را بیابید.

۴۵. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-4}, \qquad \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{1}$$

متقاطعند. نقطهٔ اشتراک را بیابید.

۴۶. کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ به وسیلهٔ یک دسته شعاع نورانی موازی خط $x = 0, y = z$ روشن شده است. سایهٔ کره را روی صفحهٔ xy بیابید (ر.ک. شکل ۲۹).



شکل ۲۹

۵.۱۲ منحنیهای فضایی و حرکت مداری

منظور از یک منحنی در فضا یا یک منحنی فضایی یعنی نمودار سه معادلهٔ (پارامتری)

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad (۱)$$

یعنی، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) که مختصاتشان در (۱) صدق می‌کنند؛ در اینجا $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ سه تابع پیوسته با قلمرو تعریف مشترک‌اند، که همواره بازه‌ای چون I اختیار می‌شود. همچنین، فرض کنیم $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ همه توابعی ثابت نباشند، زیرا درغیراین

صورت منحنی (۱) به یک نقطه تحویل می‌شود. وقتی پارامتر t، که می‌توان آن را زمان گرفت، روی بازهٔ I تغییر کند، نقطهٔ $P = (x, y, z)$ مواضع مختلفی در فضا گرفته، ومنحنی (پارامتری) (۱) را رسم می‌کند. منظور از یک قوس از منحنی (۱) یعنی هر منحنی با همین معادلات پارامتری، ولی قلمرو $x(t)$، $y(t)$، و $z(t)$ زیربازه‌ای از I است. همهٔ اینها چیزی جز تعمیم طبیعی تعریف منحنی مسطح داده شده در صفحهٔ ۷۲۳ به ابعاد سه‌نیست.

مثال ۱. منحنی به معادلات پارامتری

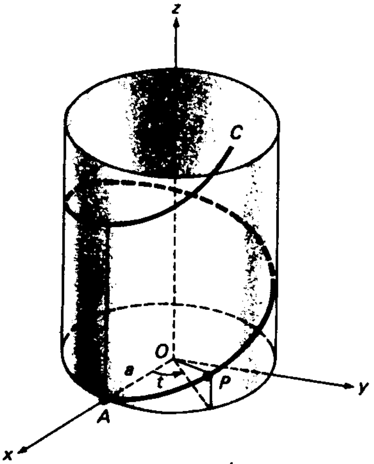
$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct \qquad (-\infty < t < \infty)$$

خط مستقیمی است مار بر نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) با پارامترهای هادی a، b، و c.

مثال ۲. فرض کنید a و b اعداد مثبتی‌باشند. دراین صورت، منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \qquad (0 \le t < \infty) \tag{۲}$$

منحنی پیچ سر بطری به‌اشکل ۳۰ است، که یک مارپیچ مستدیر نام دارد. چون $x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$، مارپیچ C بر سطح یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع a قرار دارد، که محور تقارنش محور z است. وقتی t افزایش می‌یابد، مارپیچ حول استوانه می‌پیچد؛ از نقطهٔ شروع $A = (a, 0, 0)$ آغاز کرده و باافزایش t به اندازهٔ 2π یکبار استوانه را دور می‌کند. فاصلهٔ قائم h بین "پیچهای" متوالی C، که مساوی $2\pi b$



مارپیچ مستدیر

شکل ۳۰

است ، **پای** مارپیچ نام دارد .

تبصره. مارپیچ آمده در شکل *راست* دست است ، بدین معنی که شبیه به شیارهای یک پیچ راست دست می‌باشد . اگر شرط مثبت بودن b را حذف کنیم ، به ازای $b = 0$ دایره‌وبه‌ازای $b < 0$ مارپیچ چپ دست خواهیم داشت (تحقیق کنید) .

طول یک منحنی فضایی. طول منحنی فضایی C همانند طول یک منحنی مسطح تعریف می‌شود ؛ یعنی ، حد طول یک مسیر چندضلعی محاط شده در C مشروط برآنکه‌این‌حد موجود و متناهی باشد ، که در این صورت گوییم C ***با طول متناهی*** است . استدلالی شبیه‌به‌آن که در صفحهٔ ۷۴۱ آمد نشان می‌دهد که هرگاه $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ بر بازهٔ $[a, b]$ به‌طورپیوسته مشتقپذیر باشند ، آنگاه منحنی

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \qquad (a \le t \le b)$$

با طول متناهی بوده و طولش L از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (۳)$$

(فرض است که C تنها می‌تواند تعدادی متناهی خود قطعی داشته باشد) .

مثال ۳ . طول L یک دور از مارپیچ $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t$ را بیابید .

حل . وقتی t به اندازهٔ 2π افزایش یابد ، نقطهٔ $P = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$ یک دورمارپیچ را می‌زند . لذا ، با اختیار 0 و 2π به عنوان حدود انتگرالگیری در (۳) ، معلوم می‌شود که

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 16}\, dt = 5 \int_0^{2\pi} dt = 10\pi.$$

فرض کنیم C منحنی به‌معادلات‌پارامتری (۱) باشد . در این صورت ،همانند صفحات ۱۰۸۰ تا ۱۰۸۱، می‌توان *تابع طول قوس*

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\, du \qquad (۴)$$

نقطهٔ $P(t)$ را معرفی کرد ،که مساوی طول قوس C با نقطهٔ شروع ثابت $P(a) = (x(a), y(a), z(a))$ ونقطهٔ پایان متغیر $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ است . دراینجا u را متغیرانتگرالگیری می‌گیریم تا باحدبالایی t انتگرالگیری اشتباه نشود . بامشتقگیری از (۴) نسبت به t ، داریم

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{۴'}$$

توابع برداری در فضا . توابع بردار مقدار (یا فقط توابع برداری) در فضا درست مثل توابع در صفحه تعریف می‌شوند جزآنکه در اینجا بردارها علاوه‌بر مؤلفه‌های x و y مؤلفهٔ z نیز دارند . صرف‌نظر از این تفاوت‌جزئی ،حدود ، مشتقات ، و انتگرالهای توابع برداری سه بعدی درست مثل حالت دوبعدی ، "مؤلفه‌به‌مؤلفه" حساب‌می شوند. مثلا" ،حد تابع برداری

$$\mathbf{r}(t) = (2\tan t)\mathbf{i} + (4t)\mathbf{j} + (\sec t)\mathbf{k},$$

وقتی $t \to \pi/4$ ، برابر است با

$$\lim_{t\to\pi/4} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t\to\pi/4} 2\tan t\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t\to\pi/4} 4t\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t\to\pi/4} \sec t\right)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k},$$

و مشتقش مساوی است با

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) &= \left(\frac{d}{dt}2\tan t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d}{dt}4t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d}{dt}\sec t\right)\mathbf{k}\\ &= (2\sec^2 t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (\sec t\tan t)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

مثال ۴ . مشتق حاصلضرب خارجی توابع برداری مشتقپذیر $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ را بیابید.

حل . به جای مشتقگیری از مؤلفه‌ها ، از تعریف مشتق شروع می‌کنیم . لذا ،

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) &= \lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)\times\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\\ &= \lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)\times\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(u) + \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\\ &= \lim_{u\to t}\left(\frac{\mathbf{r}_1(u)-\mathbf{r}_1(t)}{u-t}\times\mathbf{r}_2(u) + \mathbf{r}_1(t)\times\frac{\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\right)\\ &= \left(\lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)-\mathbf{r}_1(t)}{u-t}\right)\times\left(\lim_{u\to t}\mathbf{r}_2(u)\right) + \mathbf{r}_1(t)\times\left(\lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_2(t)}{u-t}\right).\end{aligned}$$

اما

$$\lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_1(u)-\mathbf{r}_1(t)}{u-t}=\frac{d\mathbf{r}_1}{dt},\qquad \lim_{u\to t}\mathbf{r}_2(u)=\mathbf{r}_2(t),\qquad \lim_{u\to t}\frac{\mathbf{r}_2(u)-\mathbf{r}_2(t)}{u-t}=\frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

و درنتیجه ،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)=\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\times\mathbf{r}_2\right)+\left(\mathbf{r}_1\times\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right). \tag{۵}$$

در اینجا مراحل زیادی وجود دارند ،و برخواننده است که برقراری آنها را تحقیق نماید .

به تشابه بین فرمول (۵) و قاعدهٔ مشابه برای مشتقگیری از حاصلضرب توابع اسکالر توجه کنید . ولی حاصلضربهای سمت راست (۵) معمولی نبوده بلکه حاصلضرب *خارجی* اند. فرمول همتای

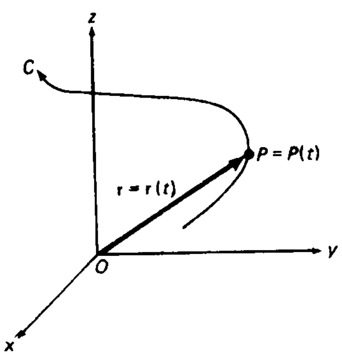
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)=\left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\cdot\mathbf{r}_2\right)+\left(\mathbf{r}_1\cdot\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right) \tag{۵'}$$

برای حاصلضربهای *نقطه‌ای* را می‌توان اساسا" به همین روش ثابت کرد .

سرعت و تندی . حال از توابع برداری در بررسی حرکت در فضا استفاده می‌کنیم . فرض کنیم

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}\qquad (\text{در } I \;\; t)$$

یک تابع برداری مشتقپذیر باشد که بر بازهٔ I تعریف شده است ، و نقطهٔ شروع $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ مثل شکل ۳۱ ، در مبداء O گذارده شده باشد . در این صورت ، نقطهٔ پایان $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ نقطهٔ متغیر $P=P(t)=(x(t), y(t), z(t))$ در فضاست ، و $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ *بردار موضع* $P=P(t)$ نام دارد .



شکل ۳۱

وقتی t افزایش یابد، $P = P(t)$ یک منحنی فضایی، به نام نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را می‌پیماید؛ یعنی، منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t \text{ در } I),$$

و از حالا به بعد پارامتر t را زمان می‌انگاریم. مشتق

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

سرعت نقطهٔ متحرک $P = P(t)$ نام دارد، و اندازه‌اش

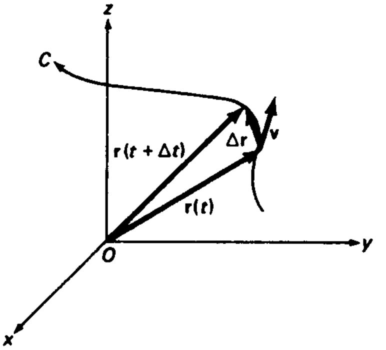
$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

تندی نامیده می‌شود. از مقایسهٔ این فرمول با (۴') نتیجه می‌شود که

$$v = \frac{ds}{dt},$$

درنتیجه، تندی P چیزی جز میزان تغییر مسافت پیموده شده توسط P در امتداد C نیست. همهٔ این ایده‌ها قبلاً در فصل اخیر آمده‌اند، و ما در اینجا فقط آنها را مرور می‌کنیم، و درعین حال $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ را مجاز به داشتن سه مؤلفه به جای دو تا می‌نماییم.

بردار یکهٔ مماس. از حالا به بعد فرض می‌کنیم بردار سرعت $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ناصفر، و نقطهٔ شروعش $P = P(t)$ یعنی نقطهٔ پایان بردارموضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. در این صورت، مثل صفحهٔ ۱۰۸۰، $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ بر C در نقطهٔ P مماس‌است، بدین معنی که $\mathbf{v}$ بارفتن $\Delta t \to 0$ دارای "جهت‌حدی" بردار $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ است، که‌درآن $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ بردار $\Delta \mathbf{r}$ در شکل ۳۲ با فرض $\Delta t > 0$ نموده‌شده‌است. بی‌توجه به علامت Δt، بردار $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$



شکل ۳۲

و درنتیجه سرعت $\mathbf{v}$ ، همواره روی C در جهت افزایش t است (چرا؟) ؛ این جهت در شکل با سر سهم روی C نموده شده است. مثل حالت دوبعدی، **بردار یکهٔ مماس** $\mathbf{T}$ بر منحنی C در نقطهٔ P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|},$$

و مثل خود $\mathbf{v}$ بر C در نقطهٔ P مماس است و به جهت افزایش t اشاره دارد. استدلال صفحهٔ ۱۰۸۲ نشان می‌دهد که اگر C را با پارامتر طول قوس s توصیف شود،

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

مثال ۵. سرعت $\mathbf{v}$ ، تندی v ، و بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ را برای مارپیچ $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 4t$ بیابید. نشان دهید $\mathbf{T}$ با محور z زاویهٔ ثابتی می‌سازد.

حل. در اینجا بردار موضع عبارت است از

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + (4t)\mathbf{k}. \qquad (۶)$$

بنابراین،

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

و

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 16} = \sqrt{9+16} = 5,$$

درنتیجه، تندی مقدار ثابت 5 را دارد. بردار یکهٔ مماس عبارت است از

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \left(-\frac{3}{5}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

هرگاه θ زاویهٔ بین $\mathbf{T}$ و محور z باشد، آنگاه

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{T}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{T}||\mathbf{k}|} = \frac{4}{5},$$

درنتیجه، θ دارای مقدار ثابت $\arccos\frac{4}{5} \approx 36.9°$ است. هرگاه طول قوس در امتداد مارپیچ و از نقطهٔ $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} = (3, 0, 0)$ سنجیده شود، آنگاه

$$s = \int_0^t v\,dt = 5t,$$

درنتیجه ، $t = s/5$ و

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\cos\frac{s}{5}\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

توجه کنید که اگر $t = s/5$ را در فرمول (۶) قرار داده و سپس مشتق $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ را حساب کنیم ، همین عبارت برای $\mathbf{T}$ به دست می‌آید .

بردار یکهٔ قائم . حال فرض کنیم تابع بردار موضع $\mathbf{r}(t)$ بر بازهٔ I مشتق دوم پیوسته داشته باشد ، و مجددا" $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ را بردار یکهٔ مماس بر منحنی C در نقطهٔ $P = P(t)$ می‌گیریم . در این صورت ، چون $|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ ، داریم

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

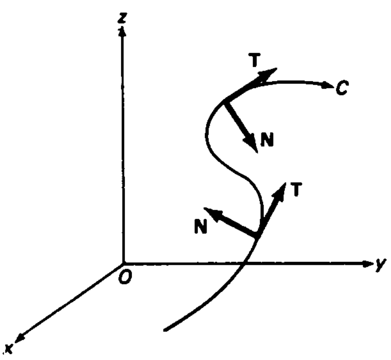
و لذا ،

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

درنتیجه ، $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به $\mathbf{T}$ است . حال ، علاوه‌بر بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ ، بردار دیگر $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t)$ را معرفی و آن را *بردار یکهٔ قائم* برمنحنی C در نقطهٔ $P = P(t)$ می‌نامیم . این بردار یکهٔ

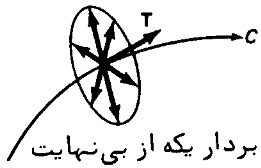
$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \neq \mathbf{0}\right)$$

در جهت $d\mathbf{T}/dt$ با نقطهٔ شروع P است . چون $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به $\mathbf{T}$ بوده و درجهت خمیدگی C اشاره دارد ، همین امر در مورد بردار $\mathbf{N}$ صادق می‌باشد (ر.ک. شکل ۳۳) .



شکل ۳۳

تبصره. بردار $\mathbf{N}$ رااغلب برداریکهٔقائم *اصلی* نامندتابراین امرتأکید شودکه $\mathbf{N}$ در فضا، به خلاف صفحه، تنهایک برداریکه‌ازبی‌نهایت برداریکهٔ عمودبر $\mathbf{T}$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۳۴).



چند بردار یکه از بی‌نهایت
بردار یکهٔ متعامد به $\mathbf{T}$

شکل ۳۴

انحنا. اگر پارامتر را طول‌قوس s بگیریم، بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$، نقطهٔ پایانش $P = P(s)$ بردار مماس یکهٔ $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = d\mathbf{r}/ds$، و بردار قائم یکهٔ

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(s) = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \qquad \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \neq \mathbf{0}\right) \tag{۷}$$

همه توابعی از s اند، و این امر از نمادها مشهود است. پس از (۷) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \mathbf{N}.$$

فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ باشد. در این صورت، اسکالر مثبت $|d\mathbf{T}/ds|$ *انحنای* C در P نام دارد و با κ نموده می‌شود، و معادلهٔ اخیر را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}. \tag{۸}$$

توجه کنید که تعاریف $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، و κ همان تعریفها در مورد منحنیهای در صفحه‌اند (ر.ک. بخش ۱۱۰۴).

منحنی C را معمولاً نمودار تابع بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ می‌گیریم، که در آن t پارامتری غیراز طول قوس s است، و حال، با استفاده از حاصل ضرب خارجی، عبارت فشرده‌ای برای انحنای κ برحسب مشتقات اول و دوم $\mathbf{r}(t)$ پیدا می‌کنیم. ابتدا می‌بینیم که

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\mathbf{T},$$

زیرا طبق تعریف $\mathbf{T} = \mathbf{v}/v$؛ درنتیجه، بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{ds},$$

یا معادلاً ، پس از جانشانی‌از (۸) و استفاده‌از $v = ds/dt$ ،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}. \qquad (۹)$$

از تشکیل حاصل ضرب‌خارجی $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ در $d\mathbf{v}/dt$ ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = v\frac{dv}{dt}\mathbf{T} \times \mathbf{T} + \kappa v^3\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \kappa v^3\mathbf{T} \times \mathbf{N},$$

زیرا $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$. اما v همیشه‌مثبت‌است ،واین‌به‌خاطر فرض $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ است ،و $|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = 1$ زیرا $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بردارهای یکهٔ متعامدی می‌باشند . لذا ، با گرفتن اندازهٔ $\mathbf{v} \times d\mathbf{v}/dt$ وحل نسبت به انحنای κ ، به دست می‌آوریم

$$\kappa = \frac{\left|\mathbf{v} \times \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\right|}{v^3} \quad \text{یا} \quad \kappa = \frac{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}$$

که آن را می‌توان به طور فشرده‌تر زیر نوشت :

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}, \qquad (۱۰)$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد .

شتاب و مؤلفه‌هایش. طبق معمول ، مشتق زمانی $d\mathbf{v}/dt$ از سرعت $\mathbf{v}$ ***شتاب*** نام دارد و با $\mathbf{a}$ نموده می‌شود . لذا ، (۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N},$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N},$$

که در آن اسکالرهای

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \qquad a_N = \kappa v^2 = \frac{v^2}{R} \qquad (۱۱)$$

مولفه‌های مماسی و قائم شتاب بوده ، و $R = 1/\kappa$ ***شعاع انحنا*** می‌باشد . این فرمولهادقیقاً همان همتاهای خود برای منحنیهای مسطح می‌باشند (ر.ک. صفحات ۱۰۹۹تا ۱۱۰۰) .

مثال ۶. انحنای κ ی منحنی مسطح C را بیابید .

حل . فرض قرار داشتن C در صفحهٔ xy خللی به کلیت وارد نمی‌سازد . در این صورت، $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ، $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j}$ ؛ درنتیجه ،

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = (x'y'' - y'x'')\mathbf{k}.$$

لذا ، در این حالت ، از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

و این در صفحهٔ ۱۰۹۶ با استدلال متفاوتی به دست آمده است .

مثال ۷. بردار یکهٔ قائم $\mathbf{N}$ ، شتاب $\mathbf{a}$ ، وانحنای κ را برای مارپیچ $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,$ $z = 4t$ بیابید .

حل . همانطور که قبلا" در مثال ۵ نشان دادیم ، سرعت $\mathbf{v}$ ، تندی v ، و بردار یکهٔ مماس $\mathbf{T}$ عبارتند از

$$\mathbf{v} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \qquad v = |\mathbf{v}| \equiv 5,$$
$$\mathbf{T} = \left(-\frac{3}{5}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

مشتق $\mathbf{T}$ مساوی است با

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{3}{5}[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}],$$

که اندازه‌اش ثابت و برابر است با

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{3}{5}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{3}{5}.$$

لذا ، بردار یکهٔ قائم مساوی است با

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} = -[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}],$$

که همیشه در صفحه‌ای موازی صفحهٔ xy بوده و اشاره به محور z دارد (چرا؟) .

با مشتقگیری از سرعت، معلوم می‌شود که شتاب مساوی است با

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -3[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)]\mathbf{j} = 3\mathbf{N},$$

با مؤلفهٔ مماسی 0 و مؤلفهٔ قائم 3 . چون مؤلفهٔ قائم شتاب κv^2 است، انحنا مقدار ثابت

$$\kappa = \frac{3}{v^2} = \frac{3}{25}$$

را دارد.

مثال ۸. انحنای مکعبی پیچ خوردهٔ $x = t,\ y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3$ رابیابید. همچنین، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را پیدا کنید.

حل. در اینجا $x' = 1,\ y' = t,\ z' = t^2,\ x'' = 0,\ y'' = 1,\ z'' = 2t$؛ درنتیجه،

$$v = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1 + t^2 + t^4},$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

و

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}.$$

لذا، طبق فرمول (۱۰)،

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}.$$

مثلاً، انحنا در مبداء، نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ مساوی است با $\kappa = 1$، ولی انحنا در نقطهٔ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 1$ برابر است با

$$\kappa = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47.$$

توجه کنید که وقتی $t \to \pm\infty$، $\kappa \to 0$، نشانگر آنکه منحنی به‌ازای مقادیر بزرگ $|t|$ خیلی شبیه خط مستقیم است. بنابر (۱۱)، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب عبارتنداز

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{t^4 + t^2 + 1} = \frac{2t^3 + t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

و

$$a_N = \kappa v^2 = \sqrt{\frac{t^4+4t^2+1}{t^4+t^2+1}}.$$

مثلا" ، در مبداء $a_T = 0$ و $a_N = 1$ ولی ، در نقطهٔ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ، $a_T = \sqrt{3}$ و $a_N = \sqrt{2}$.

قوانین کپلر (اختیاری) . بالاخره ، از بردارها استفاده کرده یک مسئلهٔ اساسی مکانیک را حل می‌کنیم ، و آن مسئلهٔ تعیین حرکت مداری جسم P به جـرم m است که تحت اثـر جاذبهٔ ثقلی جسم دیگری با جرم بسیار بزرگتر M قراردارد . مثلا" ، P ممکن است سیاره‌ای باشد که حول خورشید می‌گردد ، یا قمری (حقیقی یا مصنوعی) باشد که حول زمین یـا سیاره‌ای دیگر در حال گردش است . این مسئله ، بدون استفاده از بردارها ، توسط نیوتن (۱۶۸۷) در رسالهٔ معروفش ، *اصول ریاضی*[1] ، پاسخ داده شده است . مبداء O را جسم به جرم M گرفته ، فرض می‌کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بردار موضع P در لحظهٔ t باشد . همچنین $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ بردار یکه‌ای در جهت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، مثل شکل ۳۵ ، باشد؛ درنتیجه ، $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ یا $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ ، که در آن $r = |\mathbf{r}|$. در این صورت ، طبق قانون ثقلی عکس مجذور فاصله (که قبلا" درصفحات ۴۳۲ و ۱۱۰۶ به آن برخورده‌ایم) ، نیروی وارد بر P مساوی است با

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u},$$

که در آن G ثابت عمومی ثقل بوده و علامت منها نیرو را جاذبه می‌سازد[2] . باگذاردن این نیرو در قانون دوم حرکت نیوتن

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

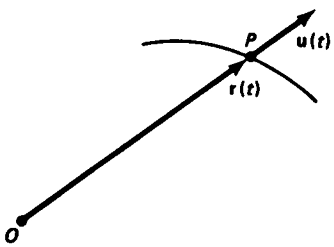
که در آن اینک تمام نیروها بردارهایی فضایی‌اند، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -C\frac{\mathbf{u}}{r^2} = -C\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad (۱۲)$$

---

1. *Principia Mathematica*

۲ . گرفتن اجسام سماوی به عنوان نقطه متکی براین امر است (و توسط خود نیوتن اثبات شده است) که جاذبهٔ ثقلی یک کرهٔ توپر همانند آن است که تمام جرم در مرکز کـره متمرکز شده باشد (ر.ک. مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۱۴۵۹) . تحلیل مشروحتر مسئله نشـان می‌دهد که اگر M خیلی از m بزرگتر باشد ، می‌توان موضع جسم به جرم M را ثابت گرفت.



شکل ۳۵

که در آن $C = GM$ و $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ سرعت P است. توجه کنید که معادلهٔ (۱۲) شامل جرم کوچکتر m نیست.

حال می‌توان از روش برداری به نحو احسن استفاده کرد. با ضرب خارجی (۱۲) در $\mathbf{r}$، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = -\frac{C}{r^3}\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0},$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. ولی

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}') + (\mathbf{r} \times \mathbf{r}'') = \mathbf{r} \times \mathbf{r}''$$

(ر.ک. مثال ۴). لذا، دو معادلهٔ اخیر باهم ایجاب می‌کنند که

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

با انتگرالگیری از این معادلهٔ دیفرانسیل برداری، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}, \qquad (۱۳)$$

که در آن $\mathbf{h}$ یک بردار ثابت است. از (۱۳) نتیجه می‌شود که جسم P همیشه درصفحهٔ مار بر O عمود بر $\mathbf{h}$ قرار دارد. در واقع، اگر (۱۳) را در $\mathbf{r}$ ضرب نقطه‌ای کنیم، خواهیم داشت $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{h} = 0$ (چرا؟)؛ درنتیجه، تصویر بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ درامتداد $\mathbf{h}$ همیشه‌صفر است. توجه کنید که این نتیجه برای هر نیروی مرکزی درست است، یعنی هر نیرویی که در امتداد خط واصل بین P و نقطهٔ ثابت O عمل می‌کند، و این فقط درمورد قانون عکس مجذور نیروی جاذبهٔ ثقلی نخواهد بود.

بردار $\mathbf{h}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}) = r\mathbf{u} \times (r'\mathbf{u} + r\mathbf{u}') = r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}'$$

(مثال ۳ ، صفحهٔ ۱۰۷۵، را به یاد آورید که برای بردارها در فضا نیز به کار می‌رود) .لذا، طبق (۱۲) ،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = -\frac{C}{r^2}\mathbf{u} \times \mathbf{h} = -C\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}'). \tag{۱۴}$$

اما ، به کمک فرمول مسئلهٔ ۴۸ ، صفحهٔ ۱۱۶۲، و اینکه $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ (برای اثبات این ، از $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ مشتق بگیرید) ،

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') - \mathbf{u}'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = -\mathbf{u}',$$

به‌علاوه ،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h}\right) + \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{h}}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h},$$

زیرا $d\mathbf{h}/dt = \mathbf{0}$ ؛ درنتیجه ، (۱۴) معادل است با

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = C\mathbf{u}'. \tag{۱۵}$$

با انتگرالگیری از این معادله ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = C\mathbf{u} + \mathbf{q}, \tag{۱۶}$$

که در آن $\mathbf{q}$ (مانند $\mathbf{h}$) بردار ثابتی می‌باشد .

با ضرب نقطه‌ای (۱۶) در $\mathbf{r}$ ، خواهیم داشت

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = (C\mathbf{u} + \mathbf{q}) \cdot r\mathbf{u} = Cr + qr\cos\theta, \tag{۱۷}$$

که در آن ثابت $= |\mathbf{q}|$ q و θ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{q}$ و $\mathbf{r}$ است . طرف چپ (۱۷) مساوی است با

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$$

(از مثال ۱۰ ، صفحهٔ ۱۱۵۷، استفاده کنید) ، که در آن ثابت $= |\mathbf{h}|$ h . لذا ، (۱۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$h^2 = Cr + qr\cos\theta,$$

که رابطهٔ زیر را ایجاب می‌کند :

$$r = \frac{h^2/C}{1 + (q/C)\cos\theta}, \tag{۱۸}$$

یا معادلا"

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}, \tag{۱۹}$$

که در آن

$$e = \frac{q}{C} = \frac{q}{GM}, \qquad d = \frac{h^2}{q}. \tag{۲۰}$$

اگر اولین فرمول (۶)، صفحهٔ ۱۰۱۴، را به یاد آوریم، درمی‌یابیم که (۱۹) معادلهٔ یک مقطع مخروطی به کانون مبداء، فاصلهٔ کانون تا هادی d، و خروج از مرکز e در مختصات قطبی است. لذا، مدار جسم P یک مخروطی است. به‌طور مشخص، مدار دایره است اگر $e = 0$، بیضی است اگر $0 < e < 1$، سهمی است اگر $e = 1$، و هذلولی است اگر $e > 1$، که در آن مقدار e را می‌توان به صورت توصیف شده در مثال ۱۰ زیر تعیین کرد.

حالت بویژه جالب در ستاره‌شناسی است که در آن مدار بیضی می‌باشد. دراین‌صورت جسم P به مرکز جاذبه "مقید" بوده و، مثال حالت مدار سهموی و هذلولوی، به "بی‌نهایت نمی‌رود". لذا، **قانون *اول کپلر*** در مورد منظومهٔ شمسی را، که کپلر در ۱۶۰۹ بیان داشت، تحقیق کرده‌ایم: ***سیاره‌ها در مدارهای بیضوی حول خورشید طوری‌حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانونها قرار دارد***. لازم به تذکر است که ستاره‌شناس آلمانی، یوهانس کپلر (۱۶۳۰–۱۵۷۱)، این قانون و دو قانون دیگر که نام وی بر آنهاست، را به طور کاملا" **تجربی** و به‌وسیلهٔ تحلیل‌داده‌های مشاهداتی جمع‌آوری‌شده‌توسط استاد دانمارکی‌اش تیکو براهه[1] (۱۶۰۱–۱۵۴۶)، کشف کرد. کار نیوتن در توضیح **نظری** این قوانین، و ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انجام آن، بشر را مبهوت می‌سازد.

قانون دوم کپلر (۱۶۰۹) می‌گوید که ***خط واصل بین خورشید و هر سیاره مساحات مساوی را در زمانهای مساوی جارو می‌کند***. این قانون را می‌توان به صورت زیر ثابت کرد. فرض کنیم $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ یک پایهٔ متعامد یکه بوده و $\mathbf{k}$ در جهت بردار ثابت $\mathbf{h}$ باشد، و مختصات قطبی r و θ را در صفحهٔ مدار با محور قطبی در امتداد $\mathbf{i}$ معرفی می‌کنیم. در این صورت $\mathbf{r} = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j}$؛ و درنتیجه،

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta & r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\theta'\mathbf{k}.$$

چون $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$، نتیجه می‌شود که

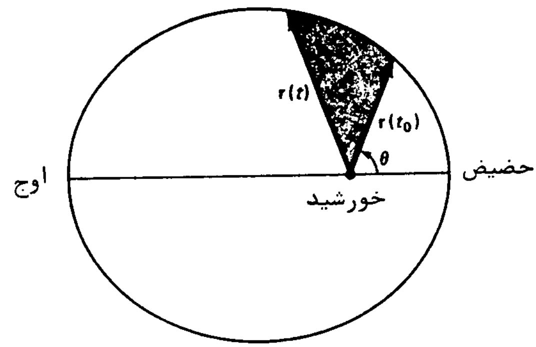
$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{ثابت}.$$

---

1. Tycho Brahe

فرض کنیم t_0 زمان ثابتی بوده و t زمان متغیری بعداز t_0 باشد . در این صورت ، طبق فرمول مساحت در مختصات قطبی (ر.ک. صفحهٔ ۱۰۲۴) ، مساحت A جارو شده به وسیلهٔ بردار شعاعی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ در بازهٔ $[t_0, t]$ ، که مساوی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۳۶ است ، برابر است با

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2 \frac{d\theta}{d\tau} d\tau$$



A مساحت جارو شده به‌وسیلهٔ بردار موضع $r(t)$ در بازهٔ $[t_0, t]$ است .

شکل ۳۶

(توی کوچک یونانی τ از اینجهت به کار رفته است که با حد بالایی انتگرالگیری t اشتباه نشود) . بنابراین ،

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{ثابت}, \qquad (۲۱)$$

که همان قانون دوم کپلر است . فرمول $dA/dt =$ ثابت برای هر نیروی مرکزی درست است (چرا؟) .

قانون سوم کپلر ، که در ۱۶۱۹ پس از ۱۰ سال تحلیل بیشتر داده‌ها ، اعلان شد ، می‌گوید که *مجذور دورهٔ گردش یک سیاره با مکعب نیم محور اطول مدار بیضوی‌اش متناسب است* . برای اثبات این امر ، فرض کنیم مدار سیاره یک بیضی با نیم محور اطول a و نیم محور اقصر b باشد . در این صورت ، مساحت محصور به بیضی مساوی πab است (ر.ک. مثال ۴ ، صفحهٔ ۹۴۹) ، و دورهٔ تناوب سیاره زمان جارو شدن این مساحت می‌باشد ؛ یعنی ،

$$T = \frac{\pi ab}{dA/dt} = \frac{2\pi ab}{h}, \qquad (۲۲)$$

که در آن فرمول (۲۱) در مرحلهٔ دوم به کار رفته است. با ضرب عبارات (۲۰) در خروج از مرکز e و فاصلهٔ کانون تا هادی d، به دست می‌آید

$$ed = \frac{h^2}{GM},$$

و نیز، طبق فرمول (۸)، صفحهٔ ۹۷۴، داریم

$$d = \left(\frac{1}{e} - e\right) a,$$

درنتیجه،

$$ed = (1 - e^2)a = \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) a = \frac{b^2}{a}.$$

با متحد گرفتن این دو عبارت برای حاصل‌ضرب ed، به دست می‌آوریم

$$h^2 = GM\,\frac{b^2}{a}.$$

لذا، $h = b\sqrt{GM/a}$؛ درنتیجه، (۲۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$T = \frac{2\pi ab}{b}\sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\,a^{3/2} \qquad (۲۳)$$

(که در آن G ثابت عمومی ثقل و M جرم خورشید است)، یا معادلاً

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\,a^3, \qquad (۲۳')$$

و این همان قانون سوم کپلر می‌باشد. در این وضع، T^2 برای تمام اقمار یک سیاره با a^3 متناسب است، با ثابت‌تناسب $4\pi^2/GM$، که در آن M جرم سیاره می‌باشد. درفرمول (۱۱) صفحهٔ ۱۱۰۵، قانون سوم کپلر برای مدارهای مستدیر پیش‌بینی شده بود.

در مدارهای بیضوی حول‌خورشید، نزدیکترین نقطه به‌خورشید را **حضیض خورشیدی**، و دورترین نقطه به آن را **اوج خورشیدی** می‌نامند. ر.ک. شکل ۳۶. نقاط مشابه‌درمدارهای حول زمین **حضیض** و **اوج** نام دارند. (اصطلاحات عام برای یک مرکز جاذبهٔ دلخواه عبارتنداز **فرامرکز** و **ورامرکز**.)

مثال ۹. فرض کنیم $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v}_0$ بردار موضع و سرعت سیارهٔ P در حضیض خورشیدی باشند. نشان دهید که ثابتهای h و q عبارتنداز

$$h = r_0 v_0, \qquad q = r_0 v_0^2 - GM, \qquad (۲۴)$$

که برحسب فاصلهٔ حضیضی $r_0 = |\mathbf{r}_0|$ و تندی حضیضی $v_0 = |\mathbf{v}_0|$ داده شده‌اند .

حل . بردارهای $\mathbf{r}_0$ و $\mathbf{v}_0$ برهم عمودند ، زیرا مماسهای بر بیضی‌در نقاط انتهایی محوراطول بر محور اطول عمودند . بنابراین ،

$$h = |\mathbf{h}| = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = |\mathbf{r}_0|\,|\mathbf{v}_0| \sin \frac{\pi}{2} = r_0 v_0.$$

در حضیض خورشیدی ، مختص زاویه‌ای θ ی P مساوی 0 است ،زیرا این مقدار از θ کوچکترین مقدار مختص شعاعی r در فرمول (۱۸) یا (۱۹) را به دست می‌دهد . با فرض $\theta = 0$ در (۱۸) ، معلوم می‌شود که

$$r_0 = r|_{\theta = 0} = \frac{h^2/C}{1 + (q/C)} = \frac{r_0^2 v_0^2}{C + q},$$

ایجابگر آنکه

$$q = r_0 v_0^2 - C = r_0 v_0^2 - GM.$$

در مدارهای سهموی و هذلولوی ، حضیض وجود دارد ولی اوج موجود نیست ، زیرا جسم P فقط یکبار به مرکز جاذبه نزدیک شده و سپس به بی‌نهایت می‌رود . اما ، فرمولهای (۲۴) هنوز به کارند ، چرا که r_0 و v_0 کمیات حضیضی می‌باشند .

مثال ۱۰ . فرض کنیم r_0 و v_0 فاصله و تندی حضیض خورشیدی (حضیضی) جسمی باشند که تحت اثر جاذبهٔ خورشید (زمین) است . نشان دهید که *مدار جسم دایره است اگر* $r_0 v_0^2 = GM$ ، *بیضی است اگر* $GM < r_0 v_0^2 < 2GM$ ، *سهمی است اگر* $r_0 v_0^2 = 2GM$ ، و *هذلولی است اگر* $r_0 v_0^2 > 2GM$.

حل . به کمک فرمولهای (۲۰) و (۲۴) ، معلوم می‌شود که خروج از مرکز مدار مساوی است با

$$e = \frac{q}{GM} = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1.$$

حال می‌توان حکم فوق (با حروف شکسته) را ازاین امر که برای دایره $\mathbf{e = 0}$ ، برای بیضی $\mathbf{0 < e < 1}$ ، برای سهمی $\mathbf{e = 1}$ ، و برای هذلولی $\mathbf{e > 1}$ به دست آورد . توجه کنید که M جرم خورشید برای مدارهای شمسی است ، ولی جرم زمین برای مدارهای زمینی می‌باشد .

مسائل

طول منحنی فضایی داده شده را بیابید .

۱. $x = 12\sin t,\ y = 12\cos t,\ z = 5t \quad (0 \le t \le 4\pi)$

۲. $x = 1 - \cos t,\ y = t - \sin t,\ z = 4\sin(t/2) \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۳. $x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 6)$

۴. $x = 2t,\ y = t^2,\ z = \ln t \quad (1 \le t \le 8)$

۵. $x = \sqrt{2}\,t,\ y = e^t,\ z = e^{-t} \quad (0 \le t \le \ln 2)$

۶. نشان دهید که طول n دور مارپیچ $x = a\cos t\ ,\ y = a\sin t,\ z = bt$ مساوی است با $2n\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

۷. هر مارپیچ از مارپیچ مضاعفی که مولکول DNA می‌سازد به قطر 20 Å و پای 34 Å است(Å واحد آنگستروم و مساوی 10^{-8} cm است) . در هر مارپیچ DNA ی انسان حدودا" 290,000,000 دور وجود دارد . اگر این مارپیچ را باز کنیم ، طولش چقدر خواهد شد ؟

۸. تابع طول قوس $s = s(t)$ را برای منحنی فضایی $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t,\ z = e^t$ بیابید . نقطهٔ $(0, 1, 1)$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ را نقطهٔ شروع بگیرید .

کمیات زیر را محاسبه کنید .

۹. $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}\right)$

۱۰. $\lim_{t\to \pi}\left(\frac{\tan t}{t}\mathbf{i} + \frac{1+\cos t}{t}\mathbf{j} + \frac{10t}{\pi}\mathbf{k}\right)$

۱۱. $\frac{d}{dt}\left[(\arcsin t)\mathbf{i} - e^{t^2}\mathbf{j} + (\cosh t)\mathbf{k}\right]$

۱۲. $\frac{d}{dt}\left[(-\cot t)\mathbf{i} + (\csc t)\mathbf{j} + (\sinh\sqrt{t})\mathbf{k}\right]$

۱۳. $\int_0^1 \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}}{t^2+1}\,dt$

۱۴. $\int\left(te^t\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} + \frac{\ln t}{t}\mathbf{k}\right)dt$

۱۵. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)\right] = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\cdot(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_1\cdot\left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\times\mathbf{r}_3\right) + \mathbf{r}_1\cdot\left(\mathbf{r}_2\times\frac{d\mathbf{r}_3}{dt}\right),$$

که در آن $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ ، $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ ، و $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3(t)$ توابع برداری مشتقپذیری می‌باشند .

۱۶ . با استفاده از مسئلهٔ قبل ، قاعدهٔ زیر را برای مشتقگیری از یک دترمینان 3×3 که سطرهایش از توابع اسکالر مشتقپذیری تشکیل شده است ثابت کنید :

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2' & y_2' & z_2' \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3' & y_3' & z_3' \end{vmatrix}$$

(پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد .)

سرعت $\mathbf{v}$ و تندی $v = |\mathbf{v}|$ نقطهٔ $P = P(t)$ با بردار موضع داده شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را یافته ، و نیز بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را پیدا کنید .

۱۷ . $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$

۱۸ . $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$

۱۹ . $\mathbf{r}(t) = 15t\mathbf{i} + (8 \cos t)\mathbf{j} + (8 \sin t)\mathbf{k}$

۲۰ . $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{k}$

مؤلفه‌های مماسی و قائم a_T و a_N شتاب نقطهٔ $P = P(t)$ به بردار موضع داده شدهٔ $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را یافته ، و نیز انحنای κ ی نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را پیدا کنید .

۲۱ . $\mathbf{r}(t) = (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{i} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$

۲۲ . $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\cosh t)\mathbf{k}$

۲۳ . $\mathbf{r}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \quad (a > 0)$

۲۴ . $\mathbf{r}(t) = (\arctan t)\mathbf{i} + (t - \arctan t)\mathbf{j} + (1/\sqrt{2}) \ln (t^2 + 1)\mathbf{k}$

صفحهٔ شامل بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر منحنی فضایی C در نقطهٔ P **صفحهٔ بوسان** C در P نام دارد (زیرا در P خیلی زیاد به C برازش دارد) . صفحهٔ بوسان

۲۵ . منحنی مسئلهٔ ۲۱ را در نقطه‌ای که $t = -1$ بیابید .

۲۶ . منحنی مسئلهٔ ۲۴ را در نقطه‌ای که $t = 1$ بیابید .

فرض کنید C یک منحنی فضایی بوده ، و $\mathbf{T}$ بردار یکهٔ مماس بر C در نقطهٔ P باشد . دراین صورت ، خط مار بر P شامل $\mathbf{T}$ (*خط*) *مماس* بر C در P نام دارد ، و صفحهٔ مار بر P عمود بر $\mathbf{T}$ صفحهٔ *قائم* به C در P نامیده می‌شود . خط مماس و صفحهٔ قائم به

۲۷ . فصل مشترک صفحهٔ $x + y = 0$ و استوانهٔ سهموی $z = x^2$ در نقطهٔ $(2, -2, 4)$

۲۸ . فصل مشترک استوانه‌های $x^2 + y^2 = 10$ و $x^2 + z^2 = 10$ در نقطهٔ $(3, 1, 1)$

را بیابید .

راهنمایی . ابتدا منحنیها را به صورت پارامتری نمایش دهید .

۲۹. در چه نقاطی مماس بر منحنی $x = t, y = t^2, z = t^3$ موازی صفحهٔ $x + 2y + z - 1 = 0$ است؟

۳۰. فرض کنید منحنی C نمودار تابع برداری پیوستهٔ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \qquad (a \le t \le b)$$

در بعد دو یا سه با مشتق ناصفر $\mathbf{r}'(t)$ در هر نقطهٔ درونی $[a, b]$ بوده، و $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$؛ درنتیجه، نقاط انتهایی C برهم منطبق‌اند (یک چنین منحنی را، مثل صفحهٔ ۷۳۸ بسته می‌نامیم). نشان دهید که نقطه‌ای از C هست که مماس در آن بربردار نا صفر معلوم $\mathbf{m}$ عمود است.

راهنمایی. از قضیهٔ رل استفاده کنید.

۳۱. در مثال ۱، صفحهٔ ۱۱۰۴، در حرکت گلوله، محور z را بر صفحهٔ xy عمود گرفتیم (صفحهٔ قائم شامل بردار سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ است). در این صورت، از قانون دوم نیوتن نتیجه می‌شود که $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{j}$، که در آن g شتاب ثقل است. از این معادلهٔ دیفرانسیل برداری تحت شرایط اولیهٔ $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$، که $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$، انتگرال گرفته، و نشان دهید گلوله همیشه درصفحهٔ xy می‌ماند. بافرض $g = 0$ ***قانون اول حرکت*** نیوتن را ثابت کنید، که می‌گوید جسمی که تحت اثر نیروی خارجی نباشد، اگر ساکن باشد($\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$)در حال سکون می‌ماند، و اگر متحرک باشد ($\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$) به حرکت مستقیم‌الخط خود باسرعت ثابت $\mathbf{v}_0$ ادامه خواهد داد.

۳۲. منظور از ***اندازهٔ حرکت*** یک ذره یعنی حاصل‌ضرب $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ جرمش m در سرعتش $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. قانون دوم نیوتن برحسب اندازهٔ حرکت به‌شکل $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ درمی‌آید، که درآن $\mathbf{F}$ نیروی واردبرذره‌است. حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ***اندازهٔ حرکت زاویه‌ای*** ذره حول مبداء نام دارد؛ یعنی، حول نقطهٔ شروع بردارموضعش $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. نشان دهید که اندازهٔ حرکت زاویه‌ای یک ذره که برآن نیروی مرکزی وارداست ثابت (یا، طبق گفتهٔ فیزیکدانان، ***حفظ شده***) است. بردار $\mathbf{h}$ تعریف شده بافرمول (۱۳) رابر حسب اندازهٔ حرکت زاویه‌ای $\mathbf{L}$ بیان کنید. حرکت را درصورتی‌که $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ توصیف نمایید.

۳۳. نشان دهید که تندی یک سیاره در نقطهٔ P از مدارش با فاصلهٔ عمودی خورشید تا مماس بر مدار در P متناسب است. کجا تندی ماکزیمم است؟ و کجا مینیمم خواهد بود؟

۳۴. در مثال ۸، صفحهٔ ۴۳۲، نشان دادیم که اگر موشکی از سطح زمین باتندی $v_0 = \sqrt{2gR}$ که در آن g شتاب ثقل بوده و R شعاع زمین (≈ 3960 mi) است، به‌طور قائم به بالا پرتاب شود، از جاذبهٔ زمین خارج شده و هرگز به آن باز نمی‌گردد. نشان دهید

این امر برای موشکی که به موازات سطح زمین پرتاب شود نیز درست است (ازمقاومت هوا صرف‌نظر کنید) . v_0 در مقایسه با تندی لازم جهت کشاندن موشک به مداری مستدیر که با سطح زمین تماس دارد به چه اندازه بزرگ است؟

۳۵. ارتفاع و تندی یک قمر مصنوعی در حضیض مساوی 400 mi و 5 mi/sec می‌باشند . خروج از مرکز مدار چقدر است؟ ارتفاع و تندی قمر را در اوج بیابید . دورهٔ گردش آن چقدر است؟ (به جای تقریب خامتر $g \approx 32\ \text{ft/sec}^2$ که تا بحال به کاررفته،ازتقریب $g \approx 32.15\ \text{ft/sec}^2$ برای شتاب ثقل استفاده نمایید .)

۳۶. ارتفاعهای ماکزیمم و مینیمم یک قمر مصنوعی عبارتنداز 840 mi و 360 mi . تندیهای ماکزیمم و مینیمم آن چقدر هستند؟ دورهٔ گردش آن را بیابید .

۳۷. یک سفینهٔ فضایی ، که در مداری مستدیر حول زمین و در ارتفاع 120 mi حرکت‌می‌کند موشکهای فشار آن عمل کرده شتابی برابر 450 mph/sec تولید می‌نمایند . چه مدت باید موشکها عمل کنند تا سفینه تندی لازم برای خروج کامل از جاذبهٔ زمین را بیابد؟

۳۸. نشان دهید وقتی یک سیاره در یکی از نقاط انتهایی محور اطول مدارش باشد ،تندی آن مساوی تندی در یک مدار مستدیر به شعاعی مساوی نیم محور اطول مدار خواهد بود .

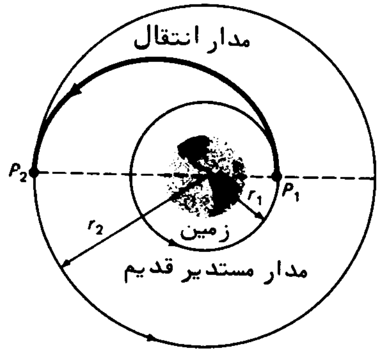
۳۹. یک ماهوارهٔ ژئوفیزیکی در مداری مستدیر و در ارتفاعی مساوی یکسوم شعاع‌زمین‌قرار داده شده است . مدار از دو قطب می‌گذرد . وقتی ماهواره از بالای قطب شمال می‌گذرد ، موشکهای بازگشت وارد عمل شده ، تندی آن را آنقدر تقلیل می‌دهند که مجبور به فرود آمدن در استوا می‌شود . میزان تقلیل لازم تندی چقدر است؟ چه تقلیل تندی موجب فرود آمدن در قطب جنوب می‌شود؟

۴۰. کنترل زمینی می‌خواهد یک قمر مضنوعی متحرک در مدار مستدیری به شعاع r_1 را به مداری مستدیر به شعاع بزرگتر r_2 انتقال دهد . این کار به صورت زیر انجام می‌شود . موشکهای فشار را کمی فعال کرده ، به قمر تندی اضافی Δv_1 در نقطهٔ P_1 از مدار کوچکتر می‌دهیم ، و قمر را مجبور به ورود در یک *مدار انتقال* بیضوی با اوج P_2 در فاصلهٔ r_2 از مرکز زمین می‌کنیم (ر.ک. شکل ۳۷) . سپس، مجددا" در P_2 موشکهای فشار را فعال کرده و به قمر تندی دوم Δv_2 می‌دهیم تا به مدار مستدیری به شعاع r_2 وارد شود. نشان دهید که

$$\Delta v_1 = \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right)\sqrt{\frac{g}{r_1}}\, R,$$

$$\Delta v_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right)\sqrt{\frac{g}{r_2}}\,R.$$

Δv_1 و Δv_2 را به ازای $r_1 = 4500$ mi و $r_2 = 9000$ mi محاسبه کنید.



شکل ۳۷

۶.۱۲ سطوح درجهٔ دو

منظور از یک *معادلهٔ درجهٔ دو* از سه متغیر x ، y ، و z یعنی معادله‌ای به شکل

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \tag{1}$$

که در آن ضرایب A ، B ، C ، D ، E ، و F همه صفر نیستند (در غیر این صورت، (۱) به معادلهٔ درجهٔ یک تحویل می‌شود). نمودار یک چنین معادله یک **سطح درجهٔ دو**، یا فقط درجهٔ دو، نام دارد، و تعمیم طبیعی یک مخروطی در فضای 2 بعدی است. همانند مخروطیها، تعدادی درجهٔ دو "تباه شده" وجود دارند که در جدول زیر لیست شده‌اند.

درجهٔ دو تباه شده	معادلهٔ نمونه
مجموعهٔ تهی	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$
نقطه	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
خط	$x^2 + y^2 = 0$
صفحه	$(x-1)^2 = 0$
یک جفت صفحهٔ موازی	$x^2 - 1 = 0$
یک جفت صفحهٔ متقاطع	$x^2 - y^2 = 0$

اگر یکی از متغیرهای x ، y ، و z در معادلهٔ (۱) نباشد، این معادله به معادلهٔ درجهٔ دو کلی از دو متغیر دیگر تحویل می‌شود. مثلاً ، اگر z غایب باشد، معادلهٔ (۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + J = 0.$$

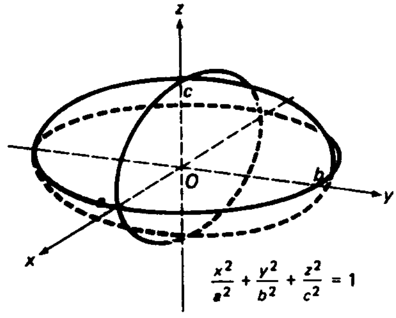
اما از بخش ۶.۱۰ می‌دانیم که نمودار این معادله در صفحهٔ xy مخروطی است؛ ولذا، جدا از بعضی از حالات تباه شده، نمودارش یک *استوانهٔ* **درجهٔ دو** ، یعنی استوانهٔ سهموی، بیضوی، یا هذلولوی، است. این استوانه‌ها قبلاً در بخش ۱۰۱۲ ، علاوه‌بر **سطوح دوار درجهٔ دو** ، مانند کره و سهمی‌گون دوار، مطرح شده‌اند.

در مثالهای زیر درجه دوهایی را مطالعه می‌کنیم که نه استوانه‌اند و نه سطوح دوار، و اینها عبارتنداز بیضی‌گون، دو نوع هذلولی‌گون (یک پارچه و دو پارچه)، مخروط بیضوی، و دو نوع سهمی‌گون (بیضوی و هذلولوی). اینها اساساً تمام انواع ممکن‌اند به دلیل زیر: تحلیل مشروح معادلهٔ (۱)، که در اینجا نخواهد شد، نشان می‌دهدکه‌همواره می‌توان به دستگاه‌جدیدی از مختصات‌قائم x' ، y' ، و z' رفت که در آن (۱) به‌معادله‌ای بدون جملات شامل $x'y'$ ، $x'z'$ ، یا $y'z'$ تبدیل می‌شود که نمودارش یک درجهٔ دو تباه شده، یک استوانهٔ درجهٔ دو، یک سطح دوار درجهٔ دو، یا یکی از شش درجهٔ دو کلیترذکرشده در فوق می‌باشد. مثل حالت دوبعدی، تبدیل از دستگاه xyz قدیم به دستگاه $x'y'z'$ جدید مستلزم یک دوران و یک‌انتقال‌است، ولی در اینجا دوران و انتقال هر دو فضایی می‌باشند.

مثال ۱. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (۲)$$

سطح درجهٔ دو شکل ۳۸ است به نام **بیضی‌گون** . فرض مثبت بودن اعداد a ، b ، و c



بیضی‌گون
شکل ۳۸

خللی به کلیت وارد نمی‌کند (این فرض در مثالهای ۲ تا ۶ نیز می‌شود). اگر دو تا از این اعداد مساوی باشند، بیضی‌گون به یک بیضی‌گون دوار یا کره‌گون تحویل می‌شود، ولی اگر $a = b = c$ ، بیضی‌گون به کره به شعاع a و مرکز مبداء بدل خواهد شد.

بیضی‌گون (۲) نسبت به مبداء، به نام مرکز بیضی‌گون، و نیز نسبت به هرسه‌صفحهٔ مختصات متقارن است. با فرض $y = z = 0$ در (۲)، معلوم می‌شود که بیضی‌گون محور x را در نقاط $(\pm a, 0, 0)$ قطع می‌کند. همچنین، محور y را در نقاط $(0, \pm b, 0)$ و محور z را در نقاط $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌نماید. با قراردادن $z = 0$ در (۲)، معلوم می‌شود که‌اثر بیضی‌گون در صفحهٔ xy (یعنی، اشتراکش با صفحهٔ xy) بیضی زیر است:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (z = 0).$$

به همین نحو، اثر بیضی‌گون در صفحهٔ xz بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (y = 0),$$

و اثر آن در صفحهٔ yz بیضی

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (x = 0)$$

می‌باشد. با فرض $z = k$ در (۲)، داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \qquad (z = k).$$

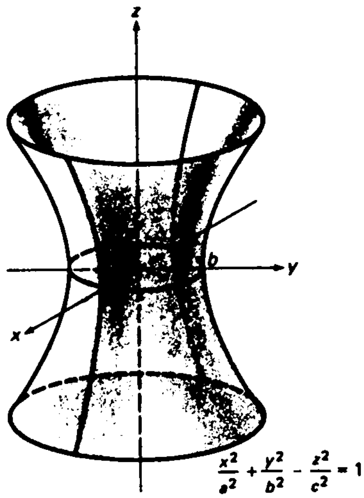
لذا، اثر بیضی‌گون در صفحهٔ $z = k$ بیضی است اگر $|k| < c$ ، یک نقطه است‌اگر $|k| = c$ ، و مجموعهٔ تهی است اگر $|k| > c$. اثر بیضی‌گون در صفحات موازی صفحات xz و yz به همین صورت خواهد بود.

مثال ۲. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (۳)$$

درجهٔ دو شکل ۳۹ به‌نام **هذلولی‌گون یک‌پارچه** است. هذلولی‌گون (۳)، همانند بیضی‌گون نسبت به مبداء، به نام **مرکز هذلولی‌گون**، و هر سه صفحهٔ مختصات متقارن است. این سطح محور x را در نقاط $(\pm a, 0, 0)$ و محور y را در نقاط $(0, \pm b, 0)$ قطع می‌کند، ولی محور z را قطع نمی‌کند، زیرا معادلهٔ $-z^2/c^2 = 1$ حاصل از قرار دادن $x = y = 0$ در (۳)

جواب ندارد. در واقع، هذلولی‌گون، به خلاف بیضی گون، سطحی بی‌کران است: این سطح در امتداد محور z ، که محور هذلولی است، از هر دو جهت " تا بی‌نهایت باز می‌شود".



هذلولی‌گون یک پارچه

شکل ۳۹

اثر هذلولی‌گون (۳) در صفحهٔ xy بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (z=0)$$

است، که دور " گلوگاه " هذلولی‌گون حلقه زده است. به‌طورکلی، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ $z=k$ نمودار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2} \qquad (z=k)$$

است، که به ازای هر k یک بیضی می‌باشد. از آن‌سو، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ xz هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (y=0),$$

و اثر آن در صفحهٔ yz هذلولی

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (x=0)$$

می‌باشد . اگر $a = b$ ، نمودار (۳) به هذلولی‌گون دوار حاصل از دوران هر یک از این هذلولیها حول محور z تحویل می‌شود . توجه کنید که معادلهٔ (۳) را می‌توان از معادلهٔ (۲) بیضی‌گون با تغییر علامت‌جملهٔ شامل z^2 به دست آورد . اگر علامت جملهٔ شامل x^2 یا y^2 تغییر می‌کرد ، نمودار معادلهٔ حاصل نیز یک هذلولی‌گون یک پارچه می‌شد ، ولی‌در این صورت محورش محور x یا محور y می‌بود .

هذلولی‌گون (۳) از یک قطعهٔ همبند یا" پارچه "تشکیل شده است ،و به این جهت آن‌را هذلولی‌گون یک پارچه می‌نامند . مثال زیر نوع دیگری از هذلولی‌گون را شرح می‌دهد که‌از دو پارچهٔ ناهمبند تشکیل شده است .

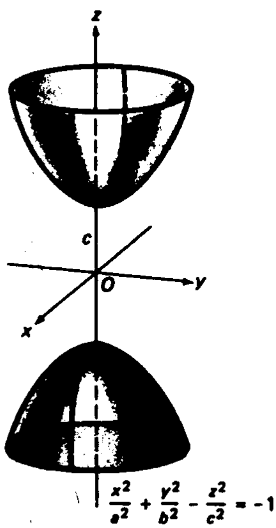
مثال ۳. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{۴}$$

یا معادلهٔ معادل

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{۴'}$$

درجهٔ دو شکل ۴۰ است که **هذلولی‌گون دو پارچه** نام دارد . این هذلولی‌گون محور z را درنقاط $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌کند ،ولی تقاطعی با محورهای x و y ندارد (چرا ؟) . هذلولی‌گون



هذلولی‌گون دوپارچه

شکل ۴۰

(۴) ، مانند هذلولی‌گون یک‌پارچه ،سطح بی‌کرانی است که در امتداد محور z ،که‌مجدداً" محور هذلولی نام دارد ، تا بی‌نهایت باز می‌شود . با قرار دادن $z = k$ در (۴) ،به‌دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 \qquad (z = k).$$

لذا ، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ $z = k$ بیضی است اگر $|k| > c$ ، یک نقطه است‌اگر $|k| = c$ و مجموعهٔ تهی است اگر $|k| < c$. از آن سو ، اثر هذلولی‌گون در صفحهٔ xz هذلولی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (y = 0),$$

و اثر آن در صفحهٔ yz هذلولی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (x = 0)$$

می‌باشد . اگر $a = b$ ، نمودار (۴) به هذلولی‌گون دوار حاصل از دوران هر یک ازاین هذلولیها حول محور z تحویل می‌شود . از این نکات معلوم می‌شود که هذلولی‌گون (۴) از دو قطعه یا پارچهٔ ناهمبند تشکیل شده است .

مثال ۴. از تعویض طرف راست معادلات (۳) و (۴) با صفر ، معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (۵)$$

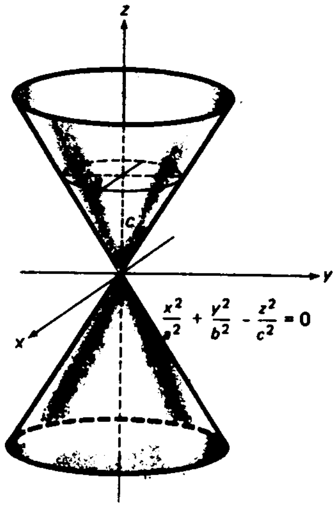
به دست می‌آید . نمودار (۵) ، به نام *مخروط بیضوی* ، در شکل ۴۱ نموده شده است . با فرض $z = k$ در (۵) ، داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \qquad (z = k).$$

لذا ، اثر مخروط در صفحهٔ $z = k$ مبداء است‌اگر $k = 0$ و بیضی‌است اگر $k \neq 0$ ،بخصوص بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ است اگر $k = \pm c$. به عنوان تمرین ، نشان دهید که اثر مخروط در صفحهٔ $x = k$ یا $y = k$ یک جفت خط متقاطع است اگر $k = 0$ و یک هذلولی است اگر $k \neq 0$. اگر $a = b$ ، مخروط بیضوی به مخروط مستدیر قائم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(دو پارچه) تحویل می‌شود ، که یک سطح دوار است . اگر علاوه‌براین $a = c$ ، مخروط



شکل ۴۱

مستدیر قائم بسیار سادهٔ

$$x^2+y^2-z^2=0$$

به دست می‌آید که در مثال ۹، صفحهٔ ۱۱۳۶، مطرح شد.

مثال ۵. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z \tag{۶}$$

سطح درجهٔ دو شکل ۴۲ به نام سهمی‌گون بیضوی است. با قرار دادن $z=k$ در (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{ka^2}+\frac{y^2}{kb^2}=1$$

اگر $k>0$،

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

اگر $k=0$، و

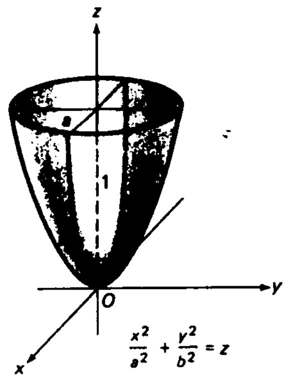
$$\frac{x^2}{|k|a^2}+\frac{y^2}{|k|b^2}=-1$$

اگر $k < 0$. لذا ، اثر سهمی‌گون در صفحهٔ $z = k$ بیضی است اگر $k > 0$ ، مبداءاست اگر $k = 0$ ، و مجموعهٔ تهی است اگر $k < 0$. همچنین ، اثر سهمی‌گون در صفحهٔ xz سهمی

$$\frac{x^2}{a^2} = z \qquad (y = 0),$$

و اثرش در صفحهٔ yz سهمی

$$\frac{y^2}{b^2} = z \qquad (x = 0)$$



سهمی‌گون بیضوی

شکل ۴۲

می‌باشد . اگر $a = b$ ، سهمی‌گون به سهمی‌گون دوار حاصل از دوران هر یک ازاین‌سهمیها حول محور z تحویل می‌شود (حالت $a = b = 1$ قبلاً" در مثال ۸ ، صفحهٔ ۱۱۳۵، مطرح شده است .)

مثال ۶. نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \qquad (۷)$$

سطح درجهٔ دو شکل ۴۳ است به نام **سهمی‌گون هذلولوی** ، که از سایر سطوح درجهٔ دو ساختار پیچیده‌تری دارد . اثرش در صفحهٔ xz سهمی

$$z = \frac{x^2}{a^2} \qquad (y = 0)$$

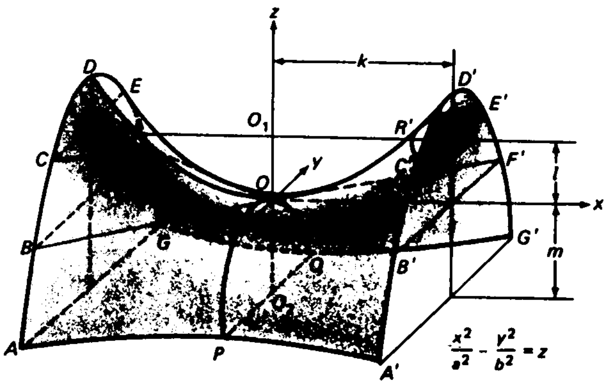
است که به بالا باز می‌شود(DOD' در شکل) ، و اثرش در صفحهٔ yz سهمی

$$z = -\frac{y^2}{b^2} \qquad (x = 0)$$

است که به پایین باز می‌شود (POQ درشکل) . سهمی‌گون (۷) صفحات $x = \pm k$ را درسهمیهای

$$z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2} \qquad (x = \pm k)$$

قطع می‌کند (ADG و $A'D'G'$ در شکل) ، که مانند POQ به پایین باز می‌شود ، ولی رئوسش



سهمی‌گون هذلولوی

شکل ۴۳

به اندازهٔ k^2/a^2 از رأس O در POQ بالاتر است . به‌علاوه ، اثر سهمی‌گون در صفحهٔ xy جفت خطوط متقاطع

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (z = 0),$$

یا معادلا "

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (z = 0)$$

است (BOF' و FOB' در شکل) . همچنین ، صفحهٔ $z = l\ (l > 0)$ را در هذلولی

$$\frac{x^2}{la^2} - \frac{y^2}{lb^2} = 1 \qquad (z = l)$$

با شاخه‌های $CRE, C'R'E'$ و محورمتقاطع RO_1R' ، و صفحهٔ $z = -m\ (m > 0)$ را در هذلولی

$$\frac{x^2}{ma^2} - \frac{y^2}{mb^2} = -1 \qquad (z = -m)$$

با شاخه‌های APA', GQG' و محور متقاطع PO_2Q قطع می‌کند.

توجه کنید که سهمی‌گون‌هذلولوی در مجاورت‌مبداء O به‌شکل‌زین یا گذرگاه‌کوهستانی است. نقطهٔ O یک **نقطهٔ زینی** یا **مینیماکس** سطح است. تناسب واژهٔ "مینیماکس" ازاین ناشی می‌شود که اگرچه ارتفاع سطح در O نه مینیمم دارد نه ماکزیمم، ولی پایین‌ترین‌نقطهٔ سهمی DOD' و بالاترین نقطهٔ سهمی POQ هر دو در O رخ می‌دهند.

برای شناسایی نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دو می‌توان از تبدیلات جبری‌مقدماتی‌یاری جست. مثلاً، پس از کامل‌کردن مربع، معادلهٔ

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 0,$$

که دارای جملهٔ حاصلضرب $2xy$ است، به صورت

$$(x + y)^2 - z^2 = 0$$

یا معادلاً

$$(x + y + z)(x + y - z) = 0,$$

درمی‌آید؛ و درنتیجه، نمودارش سطح درجهٔ دو تباه شده‌ای است‌که از جفت‌صفحهٔ متقاطع $x + y + z = 0$ و $x + y - z = 0$ تشکیل شده است. به همین نحو، معادلهٔ

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 72x + 8z + 4 = 0$$

پس از کامل شدن دو مربع، به صورت

$$36(x - 1)^2 + 9y^2 + 4(z + 1)^2 = 36$$

و پس از تقسیم بر 36، به شکل

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{(z + 1)^2}{9} = 1$$

درمی‌آید؛ درنتیجه، نمودارش بیضی‌گونی است‌که مرکز آن به جای مبداء $(0, 0, 0)$ نقطهٔ $(1, 0, -1)$ می‌باشد.

مسائل

درجهٔ دو را که نمودار معادلهٔ داده‌شده‌است شناسایی کنید، و در صورت تباه‌نشده‌بودن آن را رسم نمایید.

۱. $2x^2 - \frac{1}{9}y^2 + z^2 = 1$

۲. $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{36}z^2 = 1$

۳. $x^2 - y^2 - 2z^2 = 0$

۴. $6x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 6 = 0$

۵. $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z = 1$

۶. $x^2 - y^2 + z^2 + 2xz + 2y - 1 = 0$

۷. $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x + 4y + 7 = 0$

۸. $z^2 - 4x^2 = y$

۹. $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 12z + 11 = 0$

۱۰. $x^2 + 2y^2 - z^2 - 6x - 12y + 26 = 0$

۱۱. $x^2 + z^2 - 2xz + 2x - 2z + 1 = 0$

۱۲. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0$

۱۳. $z = xy$

۱۴. $z^2 = xy$

۱۵. $x^2 = z - y$

۱۶. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0$

۱۷. $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$

۱۸. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4 = 0$

راهنمایی. در مسائل ۱۳ تا ۱۵، ابتدا حول محور z دوران دهید.

فرض کنید S جسم داخل بیضی‌گون $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$ باشد. مساحت ناحیهٔ مشترک S با

۱۹. صفحهٔ $y = 3$ ۲۰. صفحهٔ $x = 1$

را بیابید.

۲۱. نقاط اشتراک خط

$$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{4}$$

با بیضی‌گون $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{81}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$ را بیابید.

۲۲. سهمی‌گون بیضوی $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 2z$ صفحهٔ $2x - y - 2z - 10 = 0$ را فقط در یک‌نقطه قطع می‌کند. چه نقطه‌ای؟

۲۳. مکان هندسی تمام نقاطی را بیابید که از نقطهٔ $(0, 0, c)$ و صفحهٔ $z = -c$ به‌یک‌فاصله باشند.

۲۴. با استفاده از روش مقاطع مخروطی (ر.ک. بخش ۱۰.۸)، نشان دهید که حجم جسم

محدود به سهمی‌گون بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=h-z \qquad (h>0)$$

و صفحهٔ xy مساوی نصف حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است .

۲۵ . با استفاده از روش مقاطع عرضی ، حجم جسم محصور به بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

را پیدا کنید .

۲۶ . نشان دهید که مخروط بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

مجانب هذلولی‌گون یک پارچهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

و هذلولی‌گون دوپارچهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

است بدین معنی که هر دو هذلولی‌گون ، وقتی $z\to\pm\infty$ ، بدلخواه به‌مخروط نزدیک می‌شوند .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

مختصات قائم در فضا

فاصلهٔ بین دو نقطه در فضا

معادلات استوانه‌ها و سطوح دوار

بردارها در فضا و نمایش آنها به صورت سه‌تاییهای مرتب

حاصل‌ضرب خارجی و خواص آن

دترمینانها

حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ اسکالر

معادلات پارامتری و تقارنی خطوط در فضا

فاصلهٔ بین یک نقطه و یک خط در فضا

صفحات و معادلات آنها
زاویهٔ بین دو صفحه
فاصلهٔ بین یک نقطه و یک صفحه
منحنیهای فضایی ، توابع برداری در فضا
حرکت مداری و قوانین کپلر
سطوح درجهٔ دو

مسائل تکمیلی

۱. دو نقطه از محور x بیابیدکه در فاصلهٔ 12 از نقطهٔ $(-3, 4, 8)$ قرارداشته‌باشند.

۲. نشان دهید که نقاط $A = (0, 1, 2)$ ، $B = (2, 0, 1)$ ، و $C = (1, 2, 0)$ رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. طول ضلع این مثلث چقدر است؟

۳. نشان دهید که کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 13 = 0$ بر صفحهٔ xy مماس است.

۴. سطح حاصل از دوران خط $x = 0, y = c$ حول محور y.؛ حول محور z را بیابید.

معادلهٔ استوانه‌ای را بیابید که بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2cx$ محیط شده و خطوط جاری‌اش موازی

۵. محور x ۶. محور y ۷. محور z باشند.

۸. فرض کنید $(2, -6, -3)$ و $(1, -4, 3)$ دورأس مجاور یک‌متوازی‌الاضلاع باشند. همچنین، اقطار در نقطهٔ $(-1, 7, 4)$ متقاطع باشند. دو رأس دیگر را پیدا نمایید.

۹. فرض کنید $(3, -1, 2)$ ، $(1, 2, -4)$ ، و $(-1, 1, 2)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند. رأس دیگر آن را بیابید. (سه حالت وجود دارد.)

۱۰. برداری با محورهای x و z مثبت زوایای $120°$ و $45°$ می‌سازد. این بردار چه زاویه‌ای با محور y مثبت می‌سازد؟

۱۱. بردارهایی به‌اندازهٔ 2 بیابید که با محورهای x و y مثبت زوایای $60°$ و $120°$ بسازند.

۱۲. زوایای مثلثی را بیابید که رئوسش $A = (3, 2, -1)$ ، $B = (1, 1, 1)$ ، و $C = (5, 0, 0)$ باشند.

۱۳. نشان دهید هرگاه $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ، آنگاه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. با استفاده ازاین، قانون سینوسها را (که در مسئلهٔ ۵۳، صفحهٔ ۱۰۰۵ داده شده) اثبات نمایید.

۱۴. فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای یکه‌ای باشند که باهم زاویهٔ $30°$ می‌سازند. مساحت‌مثلث پیموده شده توسط بردارهای $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ و $\mathbf{3v} + \mathbf{2u}$ را بیابید.

۱۵. فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بردارهای یکه‌ای باشند که باهم زاویهٔ $45°$ می‌سازند. مساحت

متوازی‌الاضلاعی را بیابید که بردارهای $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$ و $4\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ اقطار آن باشند .

۱۶ . نشان دهید که مساحت مثلث به رئوس $A = (x_1, y_1)$ ، $B = (x_2, y_2)$ ، و $C = (x_3, y_3)$ در صفحهٔ xy مساوی نصف قدرمطلق دترمینان

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

است . نشان دهید که نقاط A ، B ، و C همخط اند اگر و فقط اگر این دترمینان صفر باشد .

فرض کنید $\mathbf{a} = (3, -2, 5)$ ، $\mathbf{b} = (-2, 2, 1)$ ، و $\mathbf{c} = (1, 4, -1)$. عبارات زیر را بیابید .

۱۷ . $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

۱۸ . $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

۱۹ . $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

۲۰ . $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

۲۱ . حجم متوازی‌السطوح پیموده‌شده به‌وسیلهٔ بردارهای $\mathbf{a} = (3, -7, 1)$ ، $\mathbf{b} = (-2, 0, 4)$ و $\mathbf{c} = (10, 6, 0)$ را بیابید .

۲۲ . نشان دهید که به ازای هر سه بردار $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، و $\mathbf{c}$ ،

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

راهنمایی . از مسئلهٔ ۴۸ ، صفحهٔ ۱۱۶۲ ، استفاده کنید .

۲۳ . نشان‌دهیدهرگاه‌بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ ، و $\mathbf{d}$ همصفحه‌باشند ، آنگاه $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$.

فرض کنید $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ ، و $\mathbf{d}$ بردارهای دلخواهی باشند . نشان دهید که

۲۴ . $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

۲۵ . $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})]\mathbf{c} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d}$

۲۶ . $[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{a} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})]\mathbf{b} + [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})]\mathbf{c} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d} = \mathbf{0}$

۲۷ . فرض کنید $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ سه بردار غیرهمصفحه باشند ؛ درنتیجه ، $\mathbf{e}_1$ ، $\mathbf{e}_2$ ، و $\mathbf{e}_3$ یک پایه تشکیل می‌دهند (ر.ک. صفحهٔ ۱۱۴۷) . نشان دهید که بسط بردار دلخواه $\mathbf{a}$ نسبت به این پایه عبارت است از $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ ، که در آن

$$\alpha_1 = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}, \quad \alpha_3 = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}. \qquad \text{(یک)}$$

بردارهای $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 1)$ ، $\mathbf{e}_2 = (1, 0, 1)$ ، و $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 0)$ غیرهمصفحه بوده ، ودرنتیجه یک پایه تشکیل می‌دهند . با استفاده از فرمولهای (یک) ، بردار دادهٔ شدهٔ $\mathbf{a}$ را نسبت به این پایه بسط دهید .

۲۸ . $\mathbf{a} = (3, -6, 4)$

۲۹ . $\mathbf{a} = (2, 1, 5)$

۳۰. $\mathbf{a}=(-1,2,-3)$

۳۱. خط ماربر نقطهٔ $(5,-7,6)$ موازی خط

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+4}{-1}$$

را بیابید.

۳۲. معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر نقاط $(2,-1,0)$ و $(4,0,-2)$ را بیابید.

۳۳. فاصلهٔ بین نقطهٔ $(3,5,4)$ و خط $x=y=z$ را بیابید.

۳۴. نشان دهید که خط $x=-4+3t, y=2-4t, z=6+4t$ موازی صفحهٔ $4x-3y-6z-2=0$ است.

۳۵. خط مار بر نقطهٔ $(-4,2,5)$ و عمود بر صفحهٔ $6x-3y+8z+10=0$ را بیابید.

۳۶. اگر صفحهٔ Π محور x را در نقطهٔ $(a,0,0)$، محور y را در نقطهٔ $(0,b,0)$، ومحور z را در نقطهٔ $(0,0,c)$ قطع کند، a را قطع x، b را قطع y، و c را قطع z، Π می‌نامیم. نشان دهید که معادلهٔ صفحه با قطع x، a، قطع y، b، و قطع z، c، مساوی است با

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

مشروط براینکه a، b، و c همه ناصفر باشند.

معادلهٔ صفحه با قطعهای داده شده را بیابید.

۳۷. $a=-1, b=5, c=2$

۳۸. $a=10, b=-20, c=15$

۳۹. بدون قطع x، $b=4$، $c=8$

۴۰. $a=2, b=-3$؛ بدون قطع z

قطع x، a، قطع y، b، و قطع z، c صفحهٔ داده شده را بیابید.

۴۱. $2x-3y+4z-12=0$

۴۲. $3x+5y-10z+30=0$

۴۳. $5x+7y-35=0$

۴۴. $6y-7z+21=0$

۴۵. صفحات $3x-5y+az-9=0$ و $x+3y+4z+6=0$ به ازای مقداری از a بر هم عمودند. این مقدار را بیابید.

۴۶. مقادیر a و b را طوری بیابید که صفحات $2x+ay+3z-1=0$ و $bx-10y-6z+5=0$

موازی باشند .

۴۷ . صفحهٔ مار برنقطهٔ $(1, -9, 3)$ را طوری‌بیابیدکه برفصل‌مشترک‌صفحات $x - 2y + z - 5 = 0$ و $x + y - z + 4 = 0$ عمود باشد .

۴۸ . زاویهٔ بین صفحهٔ $x + 2y - 2z - 1 = 0$ و هر یک از صفحات مختصات را بیابید .

۴۹ . فاصلهٔ بین نقطهٔ $(3, -4, 12)$ و صفحهٔ $x + y + z = 180$ را بیابید .

۵۰ . نشان دهید که خطوط $x = y = z$ و

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+10}{6}$$

متقاطع اند . نقطهٔ تقاطع را بیابید .

۵۱ . فاصلهٔ بین خط $x = y = z$ و خط مار بر نقاط $(3, -1, 2)$ و $(6, 1, 4)$ را بیابید .

۵۲ . طول منحنی فضایی

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \ln(\cos t) \qquad (0 \le t \le \pi/4)$$

را پیدا کنید .

عبارات زیر را حساب کنید .

۵۳ . $$\lim_{t \to 1}\left(\frac{\ln t}{t-1}\mathbf{i} - \frac{e^t - e}{t-1}\mathbf{j} + \frac{t+1}{t^2}\mathbf{k}\right)$$

۵۴ . $$\lim_{t \to 0}\left(\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}\mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1}\mathbf{j} - \frac{\sinh t}{t}\mathbf{k}\right)$$

۵۵ . $$\frac{d}{dt}\left(\frac{e^t}{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t}\mathbf{j} + \frac{\cos t}{t}\mathbf{k}\right)$$

۵۶ . $$\frac{d}{dt}[(\cosh t)\mathbf{i} + (\tanh t)\mathbf{j} + 10^t\mathbf{k}]$$

۵۷ . $$\int_{\pi/6}^{\pi/3}[(\cot t)\mathbf{i} - (\tan t)\mathbf{j} + 24\mathbf{k}]\,dt$$

۵۸ . $$\int\left(\frac{1}{t^2+4}\mathbf{i} + \frac{1}{t^2-1}\mathbf{j} + \frac{t^2-1}{t^2+1}\mathbf{k}\right)dt$$

بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بر منحنی داده شده در نقطهٔ P نظیر به مقدارذکرشده از پارامتر t را بیابید . همچنین ، انحنای $\boldsymbol{\kappa}$ در P را پیدا نمایید .

۵۹ . $x = 1 - 6t,\ y = 3 + 2t,\ z = 4 - 3t,\ t = -1$

۶۰ . $x = 2t,\ y = t^2,\ z = \ln t,\ t = 1$

۶۱. $x = \cosh t,\ y = \sinh t,\ z = t,\ t = 0$

۶۲. $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t,\ t = \pi/4$

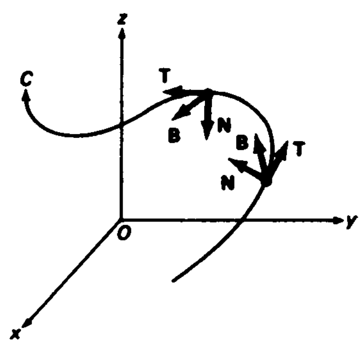
۶۳. طول قوس s را پارامتر گرفته، فرض کنید C منحنی پیموده شده به وسیلهٔ نقطهٔ $P = P(s)$ با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ بوده، و C دارای بردارهای یکهٔ مماس و قائم $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ در P باشند. در این صورت، بردار یکهٔ $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ قائم دوم به C در P نام دارد. واضح است که $\mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}$ و $\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}$. بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، و $\mathbf{B}$، باهمین ترتیب، یک پایهٔ متعامد یکهٔ راست دست تشکیل می‌دهند، که با موضع P تغییر می‌نماید. این پایهٔ موضعی سه وجهی حرکت C نام دارد (ر.ک. شکل ۴۴). با این فرض که $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ مشتق سوم پیوسته دارد، نشان دهید که $d\mathbf{B}/ds$ موازی $\mathbf{N}$ است. لذا،

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N},$$

که در آن اسکالر τ تاب C در P نام دارد؛ انتخاب علامت منها قراردادی است، و به مقدار مثبتی برای تاب یک مارپیچ راست دست منجر می‌شود (ر.ک. مسئلهٔ ۶۵). همچنین، نشان دهید

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T},$$

که در آن κ انحنای C در P است (از قبل می‌دانیم که $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$).



شکل ۴۴

۶۴. منحنی C معمولاً" نمودار تابع بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ گرفته‌می‌شود، که در آن t پارامتری غیر از طول قوس است. نشان دهید که تاب C با فرمول زیر داده می‌شود:

$$\tau = \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}, \qquad \text{(دو)}$$

که در آن طبق معمول پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. نشان دهید C یک منحنی مسطح است اگر و فقط اگر تاب آن متحد صفر باشد.

۶۵. تاب τ مارپیچ مستدیر کلی

$$x = a\cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt \qquad (a > 0)$$

را بیابید.

۶۶. نشان دهید که منحنی $x = t^2, y = 1 - 3t, z = 4t - 2$ در یک صفحه قرار دارد. این صفحه چیست؟

فرض کنید C مکعبی پیچ خوردهٔ $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3$ باشد.

۶۷. انحنای ماکزیمم C را بیابید.

۶۸. تاب τ و بزدارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، و $\mathbf{B}$ سه‌وجهی حرکت C را در مبداء بیابید.

۶۹. تاب τ و بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، و $\mathbf{B}$ را در نقطهٔ $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ بیابید.

۷۰. تاب ماکزیمم C را پیدا کنید.

۷۱. تاب منحنی $x = \cosh t, y = \sinh t, z = t$ در نقطهٔ نظیر به $t = \ln 2$ چقدر است؟

۷۲. نشان دهید که انحنای κ و تاب τ منحنی $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3$ درهرنقطه مساویند.

۷۳. گلوله‌ای از یک توپ شلیک شده است که نقطهٔ شروع بردار موضع آن خود توپ‌است. نشان دهید که اندازهٔ حرکت زاویه‌ای آن حفظ شده‌نیست. اما نقطه‌ای وجود داردکه اندازهٔ حرکت زاویه‌ای حفظ شده است. این نقطه کجاست؟

۷۴. ارتفاع یک قمر مصنوعی در اوج 660 mi بوده، و نسبت تندی ماکزیمم آن به تندی مینیمم اش 1.1 است. ارتفاع قمر در حضیض چقدراست؟دورهٔ گردش آن چقدر است؟ (شعاع زمین را $R = 3960$ mi و شتاب ثقل در سطح زمین را $g = 32.15\ \text{ft/sec}^2$ بگیرید.)

۷۵. یک سفینهٔ هوایی دریک مدارمستدیر به‌ارتفاع 150 mi بالای زمین سر می‌خورد. راننده با فعال کردن موشکهای فشارتندی آن را 900 mph بیشترمی‌کند. ارتفاع ماکزیمم سفینه در مدار جدیدش چقدر است؟

۷۶. فاصلهٔ حضیض خورشیدی یک سیاره r_0 بوده، و خروج از مرکز مدارش e می‌باشد. نشان دهید که شعاع انحنای مدار در نقاط انتهایی محور اطول $(1 + e)r_0$ است.

۷۷. نقطهٔ $(3, -4, 7)$ بر یک مخروط مستدیر قائم دوپارچه قرار دارد که محورش در امتداد محور z و رأسش در مبداء است. معادلهٔ مخروط را پیدا کنید.

۷۸. معادلهٔ کره‌گون کشیدهٔ حاصل از دوران بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

حول محور x را بیابید . همچنین ، معادلهٔ کره‌گون جمع شدهٔ حاصل از دوران‌همین بیضی حول محور z را بیابید . (ر.ک. مسئلهٔ ۴۶ ، صفحهٔ ۷۸۲ .)

۷۹. معادلهٔ مخروط به رأس $(0, 0, 5)$ و مولدهای مماس بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را پیدا کنید .

۸۰. فرض کنید S مجموعهٔ تمام نقاطی در فضا باشد که مجموع فواصلشان تا دو نقطهٔ معین ثابت است . نشان دهید S یک کره‌گون کشیده می‌باشد .